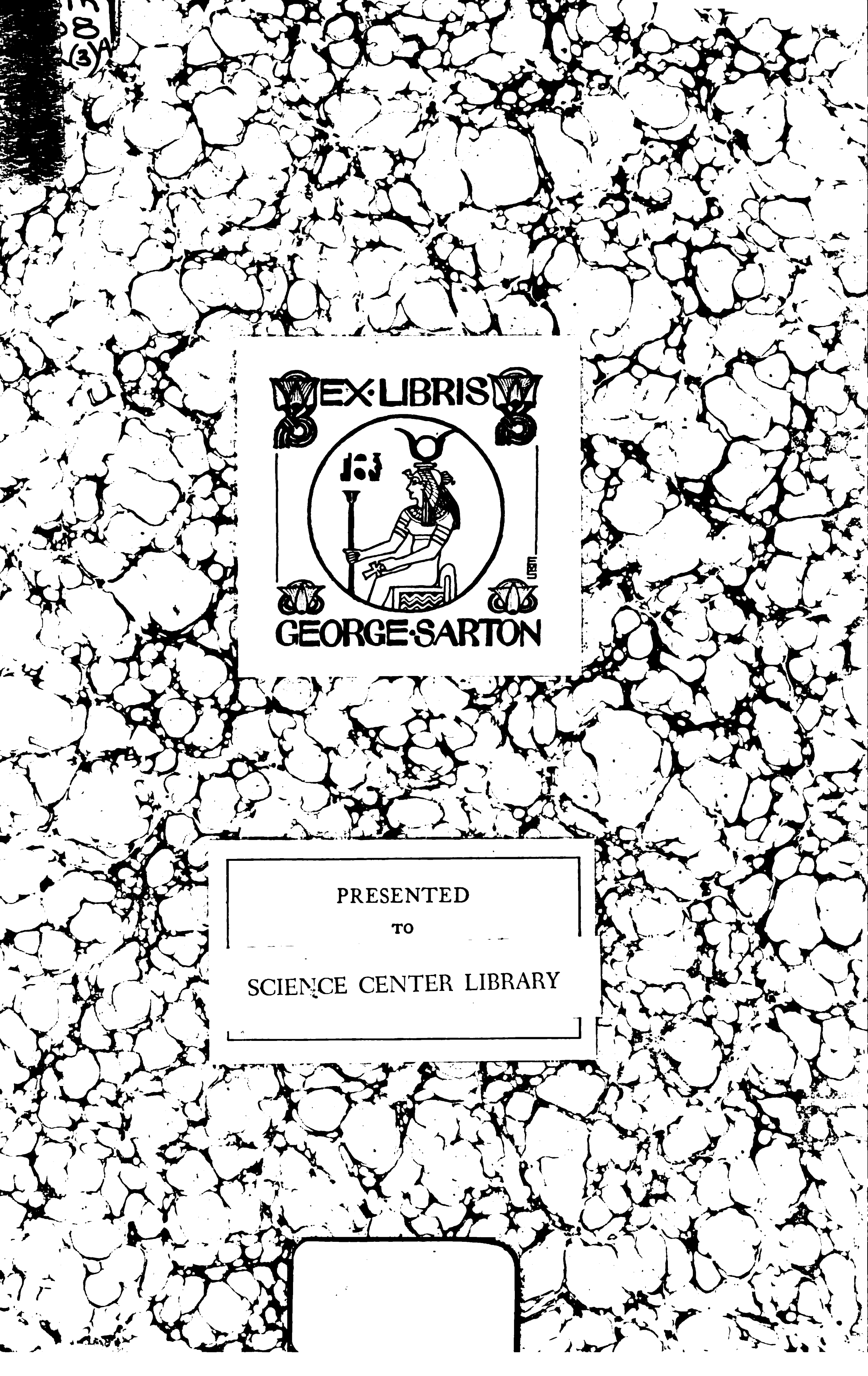

EX·LIBRIS
GEORGE·SARTON

# COURS

DE

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
21847 Quai des Grands-Augustins, 55.

# COURS

DE

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A L'USAGE

**des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement;**

PAR


B. NIEWENGLOWSKI,

Docteur ès Sciences,
Ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand,
Inspecteur de l'Académie de Paris.


---

## TOME III.

**GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE,**

AVEC UNE

**NOTE SUR LES TRANSFORMATIONS EN GÉOMÉTRIE,**


PAR ÉMILE BOREL,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.


Gand, 1909
George Sarton


PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

# COURS

DE

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

TOME III.

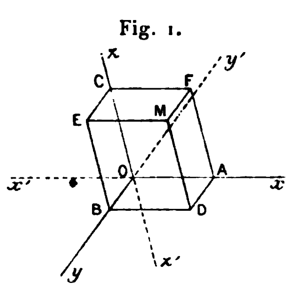
---

## CHAPITRE I.

### COORDONNÉES.

1. Soient (*fig.* 1) $x'x$, $y'y$, $z'z$ trois droites ayant un point commun O, mais *non situées dans un même plan,* et soit M un point quelconque. Les plans menés par M parallèlement aux trois plans $yOz$, $zOx$, $xOy$ forment avec ces derniers un parallélépipède, dont trois sommets A, B, C sont sur $x'x$, $y'y$, $z'z$ respectivement. Si la position du point M est déterminée par rapport au trièdre $Oxyz$, ces trois points sont déterminés; le point A est commun à $x'x$ et au plan mené par M parallèlement au plan $yOz$; B est à l'intersection de $y'y$ et du plan parallèle à $zOx$ mené par M; C est l'intersection de $z'z$ avec le plan parallèle au plan $xOy$ mené par M. Réciproquement, si les points A, B, C sont donnés, le point M est déterminé; c'est le point commun aux trois plans ADF, BDE, CEF, respectivement parallèles aux plans $yOz$, $zOx$, $xOy$. A tout point M correspond un système de trois points A, B, C et réciproquement.

Fig. 1.




Sur chacune des droites $x'x$, $y'y$, $z'z$ on fixe un sens positif; nous conviendrons de désigner par $Ox$, $Oy$, $Oz$ les demi-droites positives; $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ seront, par suite, les demi-droites négatives.

Si l'on connaît les mesures algébriques des segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, les points A, B, C sont déterminés sans ambiguïté, et il en est de même du point M. Si $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, ces trois *paramètres* $a$, $b$, $c$ sont les *coordonnées* du point M.

Les deux vecteurs $\overline{AD}$ et $\overline{OB}$ sont égaux, parallèles et de même sens, c'est-à-dire, en un mot, équipollents; de même $\overline{DM}$ et $\overline{OC}$ sont équipollents; pour cette raison, le contour OADM se nomme le *contour des coordonnées* du point M.

Si l'on représente par $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point M, on voit, par ce qui précède, qu'il faut donner trois équations $x = a$, $y = b$, $z = c$ pour déterminer ce point, que nous représenterons par la notation $M(a, b, c)$. On nomme souvent $x$ l'abscisse, $y$ l'ordonnée, $z$ la cote du point M.

Remarquons immédiatement que tous les points du plan MAD ont même abscisse; on peut dire que $x = a$ est *l'équation* de ce plan. De même tous les points de la droite MD ont même $x$ et même $y$; le système des deux équations $x = a$, $y = b$ représente donc cette droite.

De même $y = b$ est l'équation du plan MBD; $y = b$, $z = c$ représentent la droite EM.

Le plan $yOz$ a pour équation $x = 0$; l'équation du plan $zOx$ est $y = 0$; enfin $z = 0$ représente le plan $xOy$. Ces trois plans sont appelés souvent les *plans de coordonnées*.

L'axe des $x$ a pour équations $y = 0$, $z = 0$. Les équations de l'axe des $y$ sont $z = 0$, $x = 0$, et celles de l'axe des $z$ sont $x = 0$, $y = 0$.

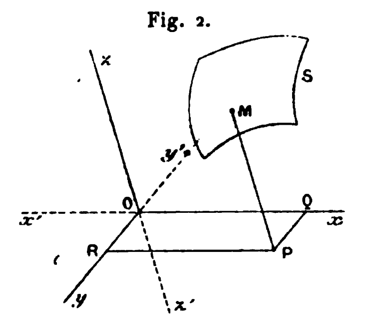
On voit, par ce qui précède, qu'une parallèle à l'un des axes de coordonnées est représentée par deux équations; nous verrons bientôt qu'il en est ainsi pour une ligne quelconque.

Lorsque le trièdre $Oxyz$ est trirectangle, on dit que les coordonnées $x$, $y$, $z$ sont *rectangulaires;* elles sont dites *obliques* dans le cas contraire. Nous supposerons toujours les demi-droites $Ox$, $Oy$, $Oz$ dirigées de telle sorte qu'un observateur, placé les pieds en O et la tête en un point de la demi-droite $Oz$, voie $Ox$ à sa gauche et $Oy$ à sa droite, quand il regarde l'angle $xOy$.

Tout système de coordonnées rectangulaires ou obliques, défini comme on vient de le faire, est appelé *système de coordonnées rectilignes* ou encore *cartésiennes*.

**2.** *Représentation d'une surface.* — Considérons une surface quelconque S et un système de coordonnées $Oxyz$ (*fig.* 2); toute parallèle à l'axe des $z$ menée par un point quelconque P, pris dans le plan $Oxy$, rencontre la surface S en des points déterminés M, M', ..., ce qui revient à dire que le $z$ d'un point quelconque de S est une fonction déterminée des deux autres coordonnées $x$, $y$. En d'autres termes, les coordonnées $x$, $y$, $z$ de tout point appartenant à une surface sont liées par une même équation $f(x, y, z) = 0$, que nous appellerons *l'équation de cette surface.* On a supposé que la surface S n'est pas un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'axe des $z$.

Fig. 2.




**3.** *Réciproquement, toute équation $f(x, y, z) = 0$ définit, en général, une surface déterminée.*

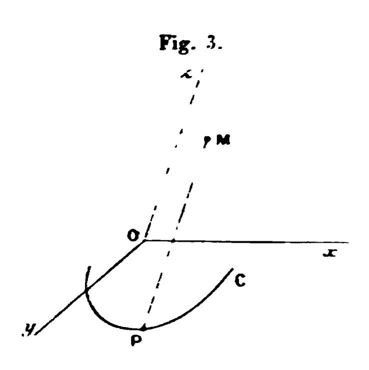
En effet, supposons d'abord que l'équation ne renferme qu'une seule variable : soit, par exemple, $f(x) = 0$. A toute racine $a$ de cette équation correspond un plan parallèle au plan $Oyz$; donc, le lieu des points dont l'abscisse $x$ vérifie l'équation précédente est un système de plans parallèles au plan $Oyz$; ce système contient autant de plans que l'équation proposée a de solutions. Si cette équation admet une solution imaginaire $\alpha + \beta i$, nous dirons que l'équation $x = \alpha + \beta i$ représente un *plan imaginaire* parallèle au plan $Oyz$. D'après cela, une équation algébrique de degré $m$ à une seule inconnue représente un système de $m$ plans réels ou imaginaires, distincts ou confondus, parallèles à l'un des plans de coordonnées.

L'équation $\sin x = 0$ représente une infinité de plans dont les équations sont comprises dans la formule $x = k\pi$, $k$ étant un entier quelconque, positif ou négatif. (On suppose, bien entendu, une ligne de la figure prise pour unité.)

Considérons, en second lieu, une équation à deux variables $f(x, y) = 0$, $x$ et $y$ désignant des coordonnées rectilignes. Si l'on construit, *dans le plan* $xOy$, la courbe C qui a pour équation, dans ce plan, $f(x, y) = 0$; et si l'on considère le cylindre qui a pour base

la courbe C (*fig.* 3), et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $z$. tout point M de ce cylindre a même $x$ et même $y$ que la trace P sur le plan $xOy$ de la génératrice MP qui passe par M, et réciproquement, tout point qui a même $x$ et même $y$ qu'un point quelconque P de la courbe C est sur le cylindre considéré. Donc, le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'équation donnée est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $z$.

Fig. 3.




On verrait de même que les équations $f(y, z) = 0$, $f(z, x) = 0$ représentent, la première : un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $x$; la seconde : un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $y$.

Soit enfin $f(x, y, z) = 0$ une équation à trois variables $x$, $y$, $z$, ces lettres désignant des coordonnées rectilignes. L'équation $z = h$ représente un plan parallèle au plan $xOy$; l'équation $f(x, y, h) = 0$ est celle d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $z$; le système de ces deux équations représente la courbe C commune au plan et au cylindre considérés. Si l'on fait varier d'une manière continue le paramètre $h$, la courbe C se déplace et se déforme d'une manière continue; elle engendre une surface S. Considérons un point quelconque M de cette surface, et soient $x_0, y_0, z_0$ ses coordonnées. D'après le mode de génération de la surface S, il passe par le point M une courbe $C_0$ définie par les équations $z = z_0$, $f(x, y, z_0) = 0$, d'où il résulte que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Réciproquement, si cette condition est remplie, le point $M(x_0, y_0, z_0)$ est sur la courbe $C_0$ et, par suite, appartient à la surface S. Le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'équation donnée est donc la surface S.

*Remarque.* — Une équation entre $x, y, z$ peut se décomposer en plusieurs autres et représenter plusieurs surfaces distinctes. Il peut encore arriver que l'équation considérée n'ait que des solutions imaginaires, ou encore qu'elle n'ait qu'un nombre déterminé de solutions réelles et, par suite, représente un certain nombre de points

réels. Ainsi, par exemple, l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$$

n'a qu'une solution réelle, et représente le point ayant pour coordonnées $a$, $b$, $c$.

L'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+d^2=0$$

n'a aucune solution réelle.

Plus loin, en tenant compte des solutions imaginaires, nous interpréterons autrement ces équations, et nous dirons que la première définit un cône imaginaire, la seconde une sphère imaginaire. Pareillement, l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a$$

représente une droite si l'on ne tient compte que des solutions réelles, car on en tire

$$x=a, \qquad y=b.$$

Mais nous pourrons aussi la considérer comme représentant deux plans imaginaires, car

$$(x-a)^2+(y-b)^2=[x-a+i(y-b)][x-a-i(y-b)].$$

4. *Représentation d'une ligne.* — Une ligne peut être considérée comme l'intersection de deux surfaces; il en résulte que les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque de cette ligne vérifient les équations de deux surfaces :

$$f(x,y,z)=0, \qquad f_1(x,y,z)=0.$$

Réciproquement, le lieu des points dont les coordonnées vérifient deux équations est l'ensemble des points communs aux surfaces définies par ces deux équations : c'est donc une ligne.

Nous verrons plus loin un autre mode de représentation d'une surface ou d'une ligne.

5. *Cylindres projetants d'une ligne.* — Soient $f(x,y,z)=0$, $f_1(x,y,z)=0$ les équations d'une ligne C, et $a$, $b$, $c$ les coordonnées d'un point M de cette ligne. Les équations $f(a,b,z)=0$,

$f_1(a, b, z) = 0$ ont au moins une solution commune $z = c$; donc, si l'on élimine $z$ entre ces équations, on a $R(a, b) = 0$, ce qui prouve que le point M est sur le cylindre qui a pour équation $R(x, y) = 0$. Réciproquement, soient $a$, $b$, $c$ les coordonnées d'un point P de la trace de ce cylindre, de façon que $R(a, b) = 0$; les équations $f(a, b, z) = 0$ et $f_1(a, b, z) = 0$ ont au moins une solution commune $c$, et, par conséquent, le point $M(a, b, c)$, situé sur la parallèle à $Oz$ menée par le point P, appartient à la ligne C. Le cylindre ayant cette ligne pour directrice et dont les génératrices sont parallèles à $Oz$ a donc pour équation $R(x, y) = 0$; on obtient cette équation en éliminant $z$ entre les deux équations données. Les parallèles à l'axe des $z$ menées par les différents points de la ligne C étant des *projetantes*, le cylindre que nous venons de déterminer a reçu le nom de *cylindre projetant parallèle à l'axe des $z$*.

On déterminerait de la même manière le cylindre projetant parallèle à l'axe des $y$ en éliminant $y$, et le cylindre projetant parallèle à l'axe des $x$ en éliminant $x$.

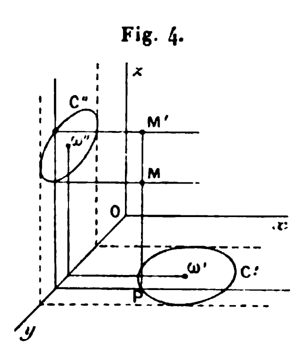
6. *Remarque.* — Il est indispensable d'observer qu'une courbe n'est pas complètement déterminée quand on connaît deux des cylindres projetants de cette courbe parallèles aux axes de coordonnées; il peut arriver en effet que l'intersection complète de ces deux cylindres se décompose, de sorte que la courbe considérée ne soit pas toute cette intersection. Par exemple, si l'on donne les cylindres projetants d'une ellipse parallèles à l'axe des $y$ et à l'axe des $z$, ces deux cylindres ont en commun, comme on le verra plus loin, non seulement l'ellipse donnée, mais en outre une seconde ellipse distincte de la première; pour achever de déterminer celle-ci, il faut connaître encore le cylindre qui la projette parallèlement à l'axe des $x$.

Donner deux cylindres projetants revient à donner les projections de la courbe sur deux plans de coordonnées; on voit donc qu'une courbe n'est pas entièrement déterminée quand on connaît deux de ses projections. C'est d'ailleurs ce dont on peut se rendre compte de la manière suivante :

Supposons que les projections d'une courbe C sur $xOy$ et sur $yOz$ soient des cercles C′, C″ ayant même rayon et leurs centres dans un plan parallèle au plan $xOz$.

Pour déterminer le point de la courbe C qui se projette en un point P du cercle C′, menons par P un plan parallèle au plan $zOx$; ce plan coupe le cylindre parallèle à $Ox$ ayant pour base C″ suivant deux génératrices qui rencontrent la parallèle à $Oz$ menée par P en deux points M, M′ (*fig.* 4).

Fig. 4.




La courbe C peut donc être le lieu des points M ou le lieu des points M′, et il peut se faire que ces deux lieux soient deux courbes distinctes, et c'est précisément ce qui arrive dans le cas particulier considéré, car les équations des deux cylindres étant

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$
$$(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

si l'on considère l'intersection *complète* de ces deux surfaces, le troisième cylindre projetant a pour équation

$$(x-a)^2-(z-c)^2=0.$$

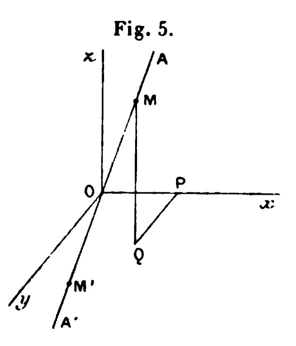
Cette équation, qui est celle de la base de ce cylindre sur le plan $xOz$, représente deux droites; ce cylindre dégénère donc en deux plans perpendiculaires au plan $xOz$, d'où il résulte que la courbe C est l'une ou l'autre des sections de l'un des deux premiers cylindres par ces deux plans.

D'une manière plus générale, si l'on regarde une courbe comme l'intersection de deux surfaces, il peut se faire que cette courbe ne soit pas toute l'intersection. La courbe ne sera donc pas entièrement déterminée par la connaissance de ces deux surfaces seulement.

## Angles d'une demi-droite avec les axes de coordonnées.

Premier cas. — *Axes rectangulaires.*

Fig. 5.




7. Considérons (*fig.* 5) d'abord trois axes rectangulaires et soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point M pris sur une demi-droite OA issue de l'origine. Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que la demi-droite OA fait avec $Ox$, $Oy$, $Oz$ respectivement, c'est-à-dire les angles $AOx$, $AOy$, $AOz$. Il est évident *a priori* qu'il existe une relation entre ces trois angles, car, si l'on donne $\alpha$ et $\beta$, la droite OM est une génératrice commune à deux cônes de révolution,

ayant pour axes $Ox$ et $Oy$ : elle est donc déterminée, et, par suite, $\gamma$ ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs.

Effectivement, si l'on désigne par $l$ la longueur OM et si l'on projette orthogonalement OM sur les trois axes successivement, puis le contour des coordonnées de M sur OA, on obtient

$$(1) \qquad x = l\cos\alpha, \quad y = l\cos\beta, \quad z = l\cos\gamma,$$

$$(2) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l,$$

d'où

$$(3) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Réciproquement, si l'on connaît trois nombres réels $a$, $b$, $c$ tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

il existe une demi-droite OM faisant avec trois axes rectangulaires des angles dont les cosinus sont égaux à $a$, $b$, $c$. En effet, prenant une ligne de la figure pour unité, construisons le point M ayant pour coordonnées $a$, $b$, $c$, et soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que OM fait avec les axes; en nommant $l$ la distance OM, on a

$$a = l\cos\alpha, \quad b = l\cos\beta, \quad c = l\cos\gamma,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = l^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

et, par suite,

$$l = 1, \quad \cos\alpha = a, \quad \cos\beta = b, \quad \cos\gamma = c.$$

Réciproquement, si une demi-droite OA fait avec $Ox$, $Oy$, $Oz$ des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à $a$, $b$, $c$, le point M pris sur cette droite à l'unité de distance de l'origine a pour coordonnées $a$, $b$, $c$; le problème a donc toujours une solution et une seule.

*Remarque.* — Pour abréger, nous dirons que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les *cosinus directeurs* de OM.

On a

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

d'où l'on déduit que la somme des carrés des projections d'un segment sur

trois plans rectangulaires deux à deux est égale à deux fois le carré de ce segment.

**8.** *Trouver une demi-droite dont les cosinus directeurs soient proportionnels à des nombres donnés.* — Supposons

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c};$$

en désignant par $\lambda$ la valeur commune de ces rapports, on a

$$\cos\alpha = \lambda a, \qquad \cos\beta = \lambda b, \qquad \cos\gamma = \lambda c;$$

donc

$$\lambda^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1,$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{R},$$

en posant

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad R = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a ainsi

$$\cos\alpha = \varepsilon\frac{a}{R}, \qquad \cos\beta = \varepsilon\frac{b}{R}, \qquad \cos\gamma = \varepsilon\frac{c}{R}.$$

En prenant successivement $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, on a deux demi-droites OM, OM′ directement opposées, portées sur une droite AA′ répondant à la question (7). Nous dirons que $a$, $b$, $c$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la droite AA′.

**9.** *Carré de la distance d'un point à l'origine.* — En éliminant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ entre les équations (1) et (2), on a

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On déduit aussi cette formule de l'égalité géométrique

$$\bar{l} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z},$$

qui donne immédiatement (I, 38)

$$l^2 = (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

**10.** *Cosinus de l'angle de deux demi-droites.* — Soient OA,

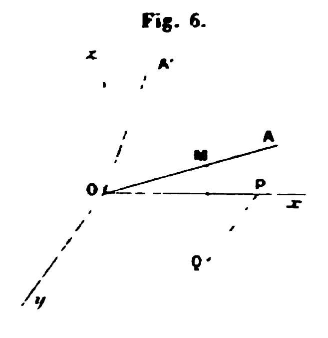
OA′ deux demi-droites (*fig.* 6); $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles qu'elles font avec les axes. Prenons sur OA un point M($x$, $y$, $z$), et projetons OM et le contour des coordonnées de M sur les axes et sur OA′, ce qui donne

$$x = l\cos\alpha, \qquad y = l\cos\beta, \qquad z = l\cos\gamma,$$
$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = l\cos V,$$

V désignant l'angle AOA′ et $l$ la longueur OM. En éliminant $x$, $y$, $z$ entre ces quatre équations, on obtient

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Fig. 6.




Pour simplifier l'écriture, désignons par $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$ les cosinus directeurs des deux demi-droites, de sorte que

$$\cos V = aa' + bb' + cc'.$$

*Condition d'orthogonalité.* — Pour que les deux droites OM, OM′ soient rectangulaires, il faut et il suffit que $\cos V = 0$, c'est-à-dire

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

**11.** *Calcul de* $\sin V$ :

$$\sin^2 V = 1 - (aa' + bb' + cc')^2,$$

ou

$$\sin^2 V = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2,$$

et, en vertu de la formule de Lagrange,

$$\sin^2 V = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2.$$

Les deux droites OM et OM′ auront la même direction si $\sin V = 0$, ce qui a lieu si

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

La valeur commune de ces rapports est égale à $\pm\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$, c'est-à-dire $\pm 1$; si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ les deux demi-droites OM, OM′ sont confondues; si $a = -a'$, $b = -b'$, $c = -c'$, elles sont opposées.

**12.** *Expression de* $\cos V$ *en fonction des coordonnées de* M *et de* M'. — On a, $l$ et $l'$ désignant les longueurs OM et OM' (*fig.* 7),

$$\bar{l} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z},$$
$$\bar{l'} = \bar{x'} + \bar{y'} + \bar{z'},$$

d'où

$$ll' \cos V = xx' + yy' + zz',$$

c'est-à-dire

$$\cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Fig. 7.

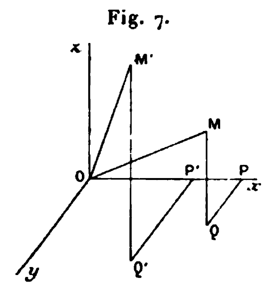
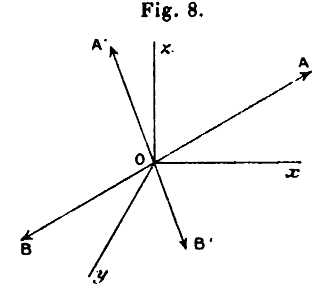



Fig. 8.




**13.** *Angles de deux droites, connaissant des nombres proportionnels à leurs cosinus directeurs.* — Supposons

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}, \qquad \frac{\cos\alpha'}{a'} = \frac{\cos\beta'}{b'} = \frac{\cos\gamma'}{c'},$$

on a

$$\cos\alpha = \varepsilon\frac{a}{R}, \qquad \cos\beta = \varepsilon\frac{b}{R}, \qquad \cos\gamma = \varepsilon\frac{c}{R}, \qquad R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$\cos\alpha' = \varepsilon'\frac{a'}{R'}, \qquad \cos\beta' = \varepsilon'\frac{b'}{R'}, \qquad \cos\gamma' = \varepsilon'\frac{c'}{R'}, \qquad R' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}.$$

Soit V l'un des angles que font entre elles les demi-droites deux à deux opposées dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux nombres donnés, on a

$$\cos V = \varepsilon\varepsilon' \frac{aa' + bb' + cc'}{RR'}.$$

La formule comporte un double signe, parce que, sur chacune des deux droites $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$, on peut choisir à volonté une demi-droite ou la demi-droite opposée ; V peut donc désigner, par exemple, l'angle AOA' ou son égal BOB' (*fig.* 8), ou bien l'un des

angles AOB′, BOA′; or les angles AOA′ et BOA′ sont supplémentaires.

*Condition d'orthogonalité.* — Pour exprimer que les deux droites AB, A′B′ sont orthogonales, il suffit d'exprimer que l'un quelconque des angles que nous venons de considérer est droit : la condition demandée est donc

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

*Calcul de* sin V. — On trouve

$$\sin^2 V = \frac{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

**14.** *Applications.* — 1° Soient deux points $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$; et soient P et P′ leurs projections sur le plan $xOy$. La condition pour que l'angle MOM′ soit droit est

$$(1) \qquad xx' + yy' + zz' = 0.$$

La condition pour que l'angle POP′ soit aussi droit étant

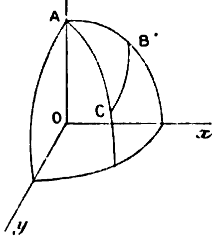
$$(2) \qquad xx' + yy' = 0,$$

pour que ces deux équations soient vérifiées simultanément, il faut et il suffit que

$$zz' = 0.$$

On en conclut que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement suivant un angle droit est que le plan de projection soit parallèle à l'un de ses côtés.*

Fig. 9.




2° Considérons (*fig.* 9) un triangle sphérique ABC; rapportons la sphère sur laquelle est tracé ce triangle à trois axes rectangulaires, l'axe $Oz$ étant le rayon OA, et l'axe $Ox$ étant dans le plan du cercle AB et dirigé du côté où se trouve le sommet B par rapport à OA, enfin l'axe $Oy$ étant dirigé par rapport au plan $zOx$ du côté où se trouve le sommet C. Cela étant, les coordonnées de B sont, le rayon de la sphère étant pris pour unité,

$$x = \sin c, \qquad y = 0, \qquad z = \cos c,$$

et les coordonnées de C

$$x' = \sin b \cos A, \qquad y' = \sin b \sin A, \qquad z' = \cos b;$$

donc

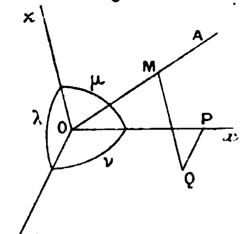
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

c'est la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

DEUXIÈME CAS. — *Axes obliques.*

**15.** Nous allons reprendre les mêmes questions avec des *axes obliques*. Nous désignerons par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles $yOz$, $zOx$, $xOy$ (*fig.* 10). Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'une demi-droite OA fait avec les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ respectivement; $x, y, z$ les coordonnées d'un point M pris sur cette demi-droite, et $l$ la longueur absolue OM. Si nous projetons le contour des coordonnées OPQM et sa résultante OM successivement sur les trois axes et sur OA, nous obtiendrons les quatre équations suivantes :

Fig. 10.




$$(1)\qquad x + y\cos\nu + z\cos\mu = l\cos\alpha,$$
$$(2)\qquad x\cos\nu + y + z\cos\lambda = l\cos\beta,$$
$$(3)\qquad x\cos\mu + y\cos\lambda + z = l\cos\gamma,$$
$$(4)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l.$$

Les quatre quantités $x$, $y$, $z$, $l$ non nulles toutes les quatre, puisque le point M est supposé différent de l'origine, étant liées linéairement, le déterminant de leurs coefficients est nul, c'est-à-dire

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la relation entre les cosinus directeurs d'une demi-droite dans le cas général.

*Remarque.* — L'équation (4) conserve la même forme quand les axes sont rectangulaires ou obliques.

**16.** *Expression du carré de la distance du point* $M(x, y, z)$ *à l'origine.* — En multipliant les deux membres des équations (1), (2), (3) et (4) respectivement par $x, y, z, l$ et ajoutant, on obtient

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu = l^2.$$

On obtient immédiatement cette formule en partant, comme dans le cas des axes rectangulaires, de l'équation vectorielle

$$\bar{l} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z},$$

d'où

$$l^2 = (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})^2 = \Sigma x^2 + 2\Sigma yz\cos(y, z).$$

**17.** Posons

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu = \psi(x, y, z);$$

il est évident que cette fonction est positive pour toutes les valeurs réelles non toutes les trois nulles attribuées à $x$, $y$, $z$. D'ailleurs

$$\psi(x, y, z) \equiv (x + y\cos\nu + z\cos\mu)^2 + (y\sin\nu + z\sin\mu\cos A)^2 + z^2\sin^2\mu\sin^2 A,$$

A désignant le dièdre $yOxz$.

La fonction $\psi(x, y, z)$ ne peut être nulle que si $x = y = z = 0$, quand $x, y, z$ sont réels.

Si l'on désigne par $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ les demi-dérivées de $\psi$ par rapport à $x, y, z$ respectivement, on voit que les équations (1), (2), (3) peuvent se mettre sous la forme

$$\psi_1 = l\cos\alpha, \qquad \psi_2 = l\cos\beta, \qquad \psi_3 = l\cos\gamma.$$

Le discriminant de la forme $\psi(x, y, z)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est positif et moindre que 1. En effet, on trouve, en le développant,

$$\begin{aligned} &1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\ &= 1 - \cos^2\mu - \cos^2\nu + \cos^2\mu\cos^2\nu - (\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu)^2 \\ &= \sin^2\mu\sin^2\nu - (\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu)^2. \end{aligned}$$

Si l'on désigne, comme plus haut, par A le dièdre $yOxz$, cette expression peut s'écrire

$$\sin^2\mu\sin^2\nu - \sin^2\mu\sin^2\nu\cos^2 A$$

ou enfin

$$\sin^2\mu\sin^2\nu\sin^2 A.$$

On peut donc désigner ce déterminant par $\omega^2$, et nous poserons $\omega = \sin\mu\sin\nu\sin A$. On voit que $\omega^2 \leqq 1$. D'ailleurs $\omega$ a une signification géométrique simple. Considérons, en effet, le parallélépipède construit sur trois arêtes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, dirigées sui-

vant les axes, et soit V son volume. Si l'on nomme $\gamma$ l'angle qu'une perpendiculaire au plan $xOy$ fait avec $Oz$, on peut prendre pour hauteur la distance du sommet C au plan $xOy$; cette hauteur a pour mesure $c\cos\gamma$; la base a pour mesure $ab\sin\nu$ et, par suite,

$$V = abc\sin\nu\cos\gamma.$$

Les cosinus directeurs de la hauteur étant o, o, $\cos\gamma$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & 0 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ 0 & 0 & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$\omega^2 - \cos^2\gamma\sin^2\nu = 0.$$

On vérifie ainsi que $\omega^2$ est positif et moindre que 1, et l'on peut poser

$$\cos\gamma\sin\nu = \omega,$$

d'où

$$V = abc\omega.$$

Si $a = b = c = 1$, on a $V = \omega$; $\omega$ est donc la mesure du volume du parallélépipède construit sur les axes et dont les arêtes sont égales à l'unité. La mesure de l'aire du parallélogramme construit sur OA et OB étant $ab\sin(x, y)$, par analogie, on pose

$$\omega = \sin(x, y, z)$$

et l'on écrit

$$V = abc\sin(x, y, z).$$

Pour cette raison, on a nommé $\omega$ le *sinus de l'angle trièdre* $Oxyz$.

Pour que $\omega^2 = 1$, il faut et il suffit que $\sin\mu = \sin\nu = \sin A = 1$, ce qui exprime que le trièdre des axes doit être trirectangle; dans ce cas, le déterminant $\omega^2$ se réduit à sa diagonale principale.

Si l'on nomme $-F(x, y, z)$ la fonction adjointe de la fonction $\psi(x, y, z)$, la relation fondamentale (5) prend la forme

$$F(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) - \omega^2 = 0;$$

on le voit en remplaçant la dernière colonne du déterminant (5) par la somme de deux colonnes ayant pour éléments $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, o et o, o, o, 1.

La relation précédente peut s'écrire

$$\cos^2\alpha\sin^2\lambda+\cos^2\beta\sin^2\mu+\cos^2\gamma\sin^2\nu-2\cos\beta\cos\gamma\sin\mu\sin\nu\cos A$$
$$-2\cos\gamma\cos\alpha\sin\nu\sin\lambda\cos B-2\cos\alpha\cos\beta\sin\lambda\sin\mu\cos C=0.$$

En décomposant en carrés la fonction $F(x, y, z)$, on trouve

$$F(x, y, z)=(x\sin\lambda-y\sin\mu\cos C-z\sin\nu\cos B)^2$$
$$+(y\sin\mu\sin C-z\sin\nu\cos\lambda\sin B)^2+z^2\sin^2\lambda\sin^2\nu\sin^2 B,$$

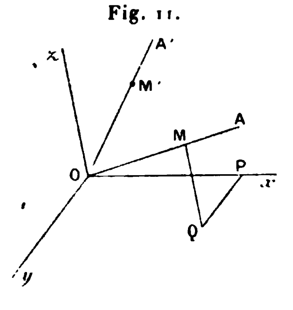



Fig. 11.

et, par suite, pour toutes les valeurs réelles de $x, y, z$, le polynome $F(x, y, z)$ est positif et ne peut s'annuler que si $x=y=z=0$.

**18.** *Angles de deux demi-droites.* — Soient OA, OA′ deux demi-droites (*fig.* 11) et $a, b, c$ les cosinus directeurs de la première, $a', b', c'$ ceux de la seconde. Soit encore $M(x, y, z)$ un point de la demi-droite OA. Si nous projetons le contour OPQM des coordonnées du point M et sa résultante $\overline{OM}$ successivement sur les trois axes et sur OA′, nous obtiendrons, en désignant par $l$ la longueur OM et par V l'angle AOA′,

$$\begin{aligned}
&(1)\qquad & x+y\cos\nu+z\cos\mu&=la,\\
&(2)\qquad & x\cos\nu+y+z\cos\lambda&=lb,\\
&(3)\qquad & x\cos\mu+y\cos\lambda+z&=lc,\\
& & a'x+b'y+c'z&=l\cos V,
\end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & a\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & b\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & c\\ a' & b' & c' & \cos V\end{vmatrix}=0,$$

et, en écrivant dans la dernière colonne $0+a$, $0+b$, $0+c$, $\cos V+0$ et développant

$$\omega^2\cos V+\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & a\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & b\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & c\\ a' & b' & c' & 0\end{vmatrix}=0,$$

ou enfin, en tenant compte des notations du n° 17,

$$\cos V=\frac{1}{2\omega^2}\left(a'\frac{\partial F}{\partial a}+b'\frac{\partial F}{\partial b}+c'\frac{\partial F}{\partial c}\right).$$

La condition d'orthogonalité est donc

$$a'\frac{\partial F}{\partial a}+b'\frac{\partial F}{\partial b}+c'\frac{\partial F}{\partial c}=0 \qquad \text{ou} \qquad a\frac{\partial F}{\partial a'}+b\frac{\partial F}{\partial b'}+c\frac{\partial F}{\partial c'}=0.$$

**19.** *Autre expression de* $\cos V$. — Si l'on désigne par $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées d'un point M' pris sur OA' à une distance $l'$ de l'origine, on a

$$\bar{l}=\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}, \qquad \bar{l'}=\bar{x'}+\bar{y'}+\bar{z'},$$

d'où, en faisant le produit des deux vecteurs $\bar{l}$ et $\bar{l'}$,

$$\begin{aligned} ll'\cos V = xx'+yy'+zz' &+ (yz'+zy')\cos\lambda \\ &+ (zx'+xz')\cos\mu \\ &+ (xy'+yx')\cos\nu \end{aligned}$$

ou

$$ll'\cos V=\frac{1}{2}\left(x'\frac{\partial\psi}{\partial z}+y'\frac{\partial\psi}{\partial y}+z'\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x'}+y\frac{\partial\psi}{\partial y'}+z\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right).$$

On peut obtenir aussi cette équation en multipliant par $x'$, $y'$, $z'$ les deux membres des équations (1), (2), (3) du n° 18, et les ajoutant membre à membre en tenant compte de l'équation

$$ax'+by'+cz'=l'\cos V.$$

Si donc on suppose $l=l'=1$, on a

$$\cos V=\frac{1}{2}\left(x'\frac{\partial\psi}{\partial x}+y'\frac{\partial\psi}{\partial y}+z'\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x'}+y\frac{\partial\psi}{\partial y'}+z\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right).$$

La condition d'orthogonalité est

$$x'\frac{\partial\psi}{\partial x}+y'\frac{\partial\psi}{\partial y}+z'\frac{\partial\psi}{\partial z}=0.$$

**20.** *Calcul de* $\sin V$. — En supposant $l=l'=1$, c'est-à-dire

$$\psi(x,y,z)=1, \qquad \psi(x',y',z')=1,$$

nous avons

$$\sin^2 V=1-\cos^2 V=1-(x'\psi_1+y'\psi_2+z'\psi_3)^2.$$

En posant $\psi'_1=\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x'}$, ..., on peut écrire

$$\begin{aligned}\sin^2 V = &\ (x\psi_1+y\psi_2+z\psi_3)(x'\psi'_1+y'\psi'_2+z'\psi'_3) \\ &-(x\psi'_1+y\psi'_2+z\psi'_3)(x'\psi_1+y'\psi_2+z'\psi_3),\end{aligned}$$

ou plus simplement

$$\sin^2 V=\Sigma(xy'-yx')(\psi_1\psi'_2-\psi'_1\psi_2).$$

Mais on reconnaît aisément que

$$\psi_1\psi'_2 - \psi'_1\psi_2 = (xy'-yx')\sin^2\nu + (yz'-zy')(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu) + (zx'-xz')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda),$$

et pareillement pour les expressions analogues.

On en déduit

$$\sin^2 V = F(yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx').$$

Pour que $\sin V = 0$, il faut et il suffit que

$$yz'-zy' = zx'-xz' = xy'-yx' = 0,$$

puisque $F(u, v, w)$ est une forme *définie*, c'est-à-dire ne peut s'annuler que si $u, v, w$ sont nuls; donc, en tenant compte des hypothèses $\psi(x, y, z) = 1$, $\psi(x', y', z') = 1$, il faut prendre

$$x' = \varepsilon x, \qquad y' = \varepsilon y, \qquad z' = \varepsilon z \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Lorsque $l$ et $l'$ ont des valeurs différentes de l'unité, on a

$$\cos V = \frac{x'\psi_1 + y'\psi_2 + z'\psi_3}{\sqrt{\psi\psi'}}$$

et

$$\sin^2 V = \frac{F(yz'-zy',\ zx'-xz',\ xy'-yx')}{\psi\psi'}.$$

Les conditions

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \lambda y, \qquad z' = \lambda z$$

expriment que $V = 0$ ou $V = \pi$ suivant que $\lambda$ est positif ou négatif.

On peut d'ailleurs trouver pour $\cos V$ et $\sin V$ une autre expression. Si l'on décompose $\psi(x, y, z)$ en carrés, on a

$$\psi(x, y, z) = P^2 + Q^2 + R^2$$

et, de même,

$$\psi(x', y', z') = P'^2 + Q'^2 + R'^2.$$

Or

$$\psi_1 = P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x} + R\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\psi_2 = P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y} + R\frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\psi_3 = P\frac{\partial P}{\partial z} + Q\frac{\partial Q}{\partial z} + R\frac{\partial R}{\partial z},$$

d'où

$$x'\psi_1 + y'\psi_2 + z'\psi_3 = PP' + QQ' + RR',$$

et, par suite,

$$\cos V = \frac{PP' + QQ' + RR'}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\sqrt{P'^2 + Q'^2 + R'^2}}$$

et, enfin,

$$\sin^2 V = \frac{(QR' - RQ')^2 + (RP' - PR')^2 + (PQ' - QP')^2}{(P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2)}.$$

**21.** *S'il existe trois nombres réels a, b, c vérifiant la relation fondamentale* $\omega^2 - F(a, b, c) = 0$, *on peut construire une demi-droite* OA *ayant ces trois nombres pour cosinus directeurs.*

Prenons, en effet, sur les axes, des segments $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ après avoir choisi une unité de longueur. Il y a un point M et un seul qui se projette orthogonalement en A sur $Ox$, en B sur $Oy$ et en C sur $Oz$. Soient $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus directeurs de la demi-droite OM, et désignons par $l$ la longueur OM. En vertu de la construction du point M,

$$\cos\alpha = \frac{a}{l}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{l}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{l};$$

donc

$$\omega^2 - \frac{1}{l^2} F(a, b, c) = 0,$$

et, par suite,

$$l = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos\alpha = a, \qquad \cos\beta = b, \qquad \cos\gamma = c.$$

Réciproquement, s'il existe une demi-droite OA dont $a$, $b$, $c$ soient les cosinus directeurs, les projections orthogonales d'un segment OM, égal à l'unité de longueur et pris sur cette droite, sont égales à $a$, $b$, $c$. On voit ainsi que le problème posé a toujours une solution, et qu'il n'y a qu'une seule demi-droite répondant à la question.

**22.** Problème. — *Trouver une demi-droite dont les cosinus directeurs soient proportionnels à trois nombres donnés.*

Il s'agit de déterminer les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c},$$

$a$, $b$, $c$ étant des nombres donnés.

Si l'on désigne par $\lambda$ la valeur commune de ces rapports,

$$\cos\alpha = \lambda a, \qquad \cos\beta = \lambda b, \qquad \cos\gamma = \lambda c,$$

donc $\lambda$ doit vérifier l'équation

$$\omega^2 - \lambda^2 F(a, b, c) = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda = \varepsilon \frac{\omega}{\sqrt{F(a, b, c)}}.$$

On obtient donc deux demi-droites opposées définies par leurs cosinus directeurs, qui ont pour expressions

$$\cos\alpha = \varepsilon \frac{\omega a}{\sqrt{F(a, b, c)}}, \qquad \cos\beta = \varepsilon \frac{\omega b}{\sqrt{F(a, b, c)}}, \qquad \cos\gamma = \varepsilon \frac{\omega c}{\sqrt{F(a, b, c)}}.$$

**23.** *Remarque.* — Nous avons fait remarquer plus haut que $F(a, b, c)$ est positif; les valeurs trouvées pour $\lambda$ sont donc réelles. On peut vérifier ce résultat de la manière suivante. Prenons sur l'axe $Ox$ le segment $\overline{OA} = a$; sur $Oy$, $\overline{OB} = b$, sur $Oz$, $\overline{OC} = c$, et considérons le point M qui a pour projections orthogonales A, B, C. Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les angles que OM fait avec les axes, on a

$$a = l\cos\alpha, \qquad b = l\cos\beta, \qquad c = l\cos\gamma,$$

$l$ étant la longueur OM, ce qui prouve que la demi-droite OM est une solution. Le problème est donc possible, et, par suite, $\lambda$ est réel. D'ailleurs, si M' est symétrique de M par rapport à l'origine, il est clair que OM' est aussi une solution et, comme le problème n'a que deux solutions, les valeurs de $\lambda$ sont réelles et correspondent à deux demi-droites opposées.

**24.** *Trouver l'angle de deux droites connaissant des nombres proportionnels à leurs cosinus directeurs.* — En conservant les notations précédentes, on trouve, au moyen de la formule du n° 18,

$$\cos V = \varepsilon\varepsilon' \frac{a' \frac{\partial F}{\partial a} + b' \frac{\partial F}{\partial b} + c' \frac{\partial F}{\partial c}}{2\sqrt{F(a, b, c)\, F(a', b', c')}},$$

et, par conséquent, la condition d'orthogonalité conserve la même forme que si $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ étaient les cosinus eux-mêmes.

**25.** *Extension des calculs précédents à des segments quelconques.* — Soit $M_1M_2$ un segment dont les extrémités ont pour coordonnées $x_1, y_1, z_1$ et $x_2, y_2, z_2$. On a

$$\overline{M_1M_2} = \overline{x_2 - x_1} + \overline{y_2 - y_1} + \overline{z_2 - z_1};$$

on en conclut

$$\overline{M_1M_2}^2 = \psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Si les axes sont rectangulaires :

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Si l'on considère deux segments $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$, on pourra évidemment appliquer les formules des numéros précédents en remplaçant $x, y, z$ et $x', y', z'$ par $x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0$; $x_2 - x_0$, $y_2 - y_0, z_2 - z_0$.

## Coordonnées du point qui partage un segment dans un rapport donné.

**26.** Soit M le point qui partage le segment $\overline{M_1M_2}$ dans le rapport $-\lambda$, de sorte que

$$\overline{MM_1} + \lambda\,\overline{MM_2} = 0.$$

Si l'on appelle $m$, $m_1$, $m_2$ les projections des points M, $M_1$, $M_2$ sur l'un des axes, faites parallèlement au plan des deux autres axes, la relation précédente se conserve en grandeur et en signe, et l'on a

$$\overline{mm_1} + \lambda\,\overline{mm_2} = 0.$$

On en déduit immédiatement, pour les coordonnées de M,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

ou, en posant $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$,

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$x_1, y_1, z_1$ étant les coordonnées de $M_1$, et $x_2, y_2, z_2$ celles de $M_2$.

Si $\lambda$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit la droite $M_1M_2$ tout entière. Si $\lambda = 0$, le point M coïncide avec $M_1$, si $\lambda$ est infini M coïncide avec $M_2$; enfin, si $\lambda = 1$, le point M est le milieu de $\overline{M_1M_2}$ et ses coordonnées sont

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

**27.** *Application.* — Soient $M_1$, $M_2$, $M_3$ trois points quelconques. Le point M défini par les formules précédentes est sur la droite

$M_1M_2$, et le point P ayant pour coordonnées

$$x' = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$
$$y' = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)y+\lambda_3y_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$
$$z' = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_3z_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

est un point de la droite $MM_3$. Donc, en faisant varier arbitrairement $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, les formules

$$x = \frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$
$$y = \frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$
$$z = \frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

définissent un point quelconque du plan passant par les trois points donnés.

**28.** *Coordonnées homogènes.* — Nous poserons

$$x = \frac{X}{T}, \qquad y = \frac{Y}{T}, \qquad z = \frac{Z}{T},$$

et nous conviendrons de ne donner à X, Y, Z, T que des valeurs finies et, en outre, de ne jamais supposer X, Y, Z, T nuls tous les quatre. Dans ces conditions, à chaque point M correspond un système unique de valeurs des coordonnées $x$, $y$, $z$ ou un système de valeurs de X, Y, Z, T proportionnelles à quatre nombres déterminés, car si $x = a$, $y = b$, $z = c$, on pourra écrire

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \frac{T}{1} = \lambda,$$

et, réciproquement, si $X = \lambda a$, $Y = \lambda b$, $Z = \lambda c$, $T = \lambda d$, ces équations déterminent un seul point ayant pour coordonnées cartésiennes $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$. Nous dirons que X, Y, Z, T sont les *coordonnées homogènes* du point M. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point (X, Y, Z, T) soit à l'infini est $T = 0$.

Si l'on donne deux points $M_1(X_1, Y_1, Z_1, T_1)$, $M_2(X_2, Y_2, Z_2, T_2)$,

les coordonnées du point qui partage le segment $\overline{M_1 M_2}$ dans le rapport $-\lambda$ sont données par les formules

$$\frac{X}{X_1+\mu X_2}=\frac{Y}{Y_1+\mu Y_2}=\frac{Z}{Z_1+\mu Z_2}=\frac{T}{T_1+\mu T_2},$$

$\mu$ étant défini par l'équation $\mu=\lambda\frac{T_1}{T_2}$.

On peut donc dire que les coordonnées homogènes de M sont

$$X_1+\mu X_2,\qquad Y_1+\mu Y_2,\qquad Z_1+\mu Z_2,\qquad T_1+\mu T_2.$$

Lorsqu'on donne à $\mu$ toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit la droite $M_1 M_2$ tout entière; en particulier, si $\mu=0$, le point M coïncide avec $M_1$, et si $\mu$ est infini M coïncide avec $M_2$.

Si l'on considère un nouveau point M′ correspondant à une valeur $\mu'$, le rapport anharmonique $(M_1 M_2 M M')$ a pour valeur $\frac{\mu}{\mu'}$; les quatre points forment donc une division harmonique si $\mu'=-\mu$.

Il importe de bien se rappeler que, si l'on fait une même combinaison homogène et linéaire des quatre coordonnées de deux points $M_1$, $M_2$, savoir

$$\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2,\qquad \lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2,\qquad \lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2,\qquad \lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2,$$

on obtient les coordonnées homogènes d'un point de la droite $M_1 M_2$. Par suite, si l'on combine linéairement les coordonnées de trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$, on obtient

$$\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2+\lambda_3 X_3,\quad \lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2+\lambda_3 Y_3,\quad \lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_2+\lambda_3 Z_3,\quad \lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2+\lambda_3 T_3,$$

qui représentent un point quelconque du plan déterminé par les trois points.

### Projection d'une aire plane.

**29.** Si l'on considère une aire plane S tracée dans un plan donné, sa projection sur un plan a pour mesure $S\cos\alpha$, $\alpha$ étant l'angle des deux plans. Il en résulte immédiatement que si par un point quelconque A on mène une perpendiculaire au plan de l'aire considérée, et si l'on porte sur cette perpendiculaire, à partir de A, un segment $\overline{AB}$ dont la longueur soit mesurée par le même nombre que l'aire S, de sorte que si l'on représente par $l$ la longueur prise pour unité, et

par $a$ le côté du carré équivalent à l'aire donnée, on ait $AB = \frac{a^2}{l}$, et si enfin l'on projette AB sur la perpendiculaire menée par A au plan de projection, la projection AC du segment AB a précisément pour mesure $AB \cos \alpha$ et, par suite, AC représente l'aire projetée. L'étude des projections d'une aire plane sur un plan est donc ramenée à celle des projections d'un segment de droite sur un axe.

Considérons trois plans de coordonnées rectangulaires et soient $S_x$, $S_y$, $S_z$ les projections d'une aire plane sur les plans $yOz$, $zOx$, $xOy$ respectivement. Si l'on nomme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'une perpendiculaire au plan de l'aire fait avec les trois axes, on a

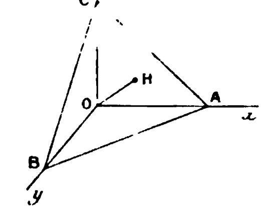
$$S_x = \pm S \cos \alpha, \qquad S_y = \pm S \cos \beta, \qquad S_z = \pm S \cos \gamma,$$

et, par suite,

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2.$$

30. *Exemple.* — Soit OABC (*fig.* 12) un tétraèdre dont les arêtes OA, OB, OC sont dirigées suivant les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$; on a

Fig. 12.




$$\overline{ABC}^2 = \overline{OAB}^2 + \overline{OBC}^2 + \overline{OCA}^2.$$

Soit OH la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan ABC. En appelant V le volume du tétraèdre, et $a$, $b$, $c$ les longueurs des arêtes OA, OB, OC, on a

$$3V = ABC.h = OBC.a = OCA.b = OAB.c,$$

donc

$$\frac{9V^2}{h^2} = \frac{9V^2}{a^2} + \frac{9V^2}{b^2} + \frac{9V^2}{c^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

### Autres systèmes de coordonnées.

31. Le système cartésien n'est pas le seul système de coordonnées employé. Voici quelques autres systèmes.

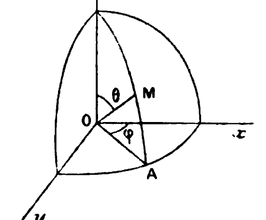
*Coordonnées polaires.* — On détermine la position d'un point M en donnant sa distance $\rho$ à un point fixe O et les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ que

OM fait avec trois axes rectangulaires menés par le point O. En nommant $x, y, z$ les coordonnées rectangulaires de M, on a, comme nous l'avons vu,

$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \cos\beta, \quad z = \rho \cos\gamma,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Plus généralement, on peut choisir sur un axe R′R passant par l'origine O un sens positif OR, et regarder $\rho$ comme *une abscisse* comptée positivement si M est sur OR, négativement si M est sur OR′. En appelant $\alpha, \beta, \gamma$ les angles que OR fait avec les trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, les formules précédentes subsistent.

Fig. 13.




**32.** *Coordonnées sphériques.* — Considérons encore trois axes rectangulaires (*fig.* 13) et la sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon OM; soit OA la trace du plan $z$OM sur le plan $xOy$. On pose

$$\overline{OM} = \rho, \quad \widehat{zOM} = \theta, \quad \widehat{AOx} = \varphi,$$

$\theta$ étant compté de o à $\frac{\pi}{2}$ et $\varphi$ de o à $2\pi$. Le point est évidemment déterminé si l'on donne $\rho$, $\theta$, $\varphi$. On voit immédiatement que

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta,$$

$\varphi$ est la longitude, $\theta$ la colatitude.

**33.** *Coordonnées cylindriques.* — Il est quelquefois commode de déterminer la position du point M en donnant sa cote $z$, et les coordonnées polaires $r$, $\varphi$ de sa projection sur le plan $xOy$, de sorte que

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi,$$

Ainsi, par exemple, le point M ayant pour coordonnées

$$x = a \cos\varphi, \quad y = a \sin\varphi, \quad z = b\varphi,$$

décrit une *hélice* tracée sur le cylindre ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

**34.** *Remarque.* — Dans le système cartésien, un point est déterminé par l'intersection de trois plans; dans le système des coordonnées polaires, un point est commun à une sphère et à une droite, génératrice commune à deux cônes de révolution d'axes donnés et ayant pour sommet commun le centre de la sphère; dans le système de coordonnées sphériques un point est l'intersection d'une sphère, d'un plan et d'un cône; enfin, dans le système des coordonnées cylindriques un point est l'intersection d'un cylindre droit et de deux plans.

D'une manière générale, si l'on considère trois familles de surfaces quelconques ayant pour équations

$$f(x, y, z, \xi) = 0, \qquad f_1(x, y, z, \eta) = 0, \qquad f_2(x, y_1, z, \zeta) = 0,$$

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ étant trois paramètres arbitraires; si $M(x, y, z)$ est un point commun à ces trois surfaces, ses coordonnées $x, y, z$ sont des fonctions déterminées de $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

On peut regarder $\xi, \eta, \zeta$ comme les *coordonnées* de M; on a ainsi le système le plus général de coordonnées *curvilignes*.

## EXERCICES.

1. Une demi-droite fait, avec les trois demi-axes $Ox$, $Oy$, $Oz$, des angles égaux; calculer la valeur commune de ces angles.

2. Soient A, B les deux demi-axes d'une ellipse; $a, b$; $a', b'$; $a'', b''$ les demi-axes de sa projection sur trois plans rectangulaires deux à deux : démontrer les formules

$$2A^2 + 2B^2 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + a''^2 + b''^2,$$
$$A^2B^2 = a^2b^2 + a'^2b'^2 + a''^2b''^2 \qquad \text{(Prouhet).}$$

3. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'un système de points dont on donne les coordonnées et les masses, en partant de la même définition qu'en Géométrie plane. Cas où les masses sont égales : centre des moyennes distances.

4. Dans un tétraèdre, les droites que joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourantes; trouver les coordonnées du point de concours G.

5. Les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes; coordonnées du point de concours. Ce point est le milieu des droites considérées et coïncide avec le point G.

6. Calculer $\sin V$ en remarquant que le double de l'aire du triangle OMM′ est égal à $ll' \sin V$, et en appliquant le théorème relatif aux projections d'une aire plane sur trois plans rectangulaires.

7. Démontrer la formule

$$\omega^2 = 4 \sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2} \sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2} \sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2} \sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

8. Si

$$\psi(x, y, z) = \varphi(P, Q, R),$$

$\varphi$ étant une forme quadratique des formes linéaires P, Q, R, et si $-\Phi$ est la forme adjointe de $\varphi$, on a

$$\cos V = \frac{\sum P' \dfrac{\partial\varphi}{\partial P}}{2\sqrt{\varphi . \varphi'}},$$

$$\sin^2 V = \frac{\Phi(QR' - RQ', RP' - PR', PQ' - QP')}{\varphi . \varphi'}.$$

9. Interpréter les équations suivantes, où $r$, $\theta$, $\varphi$ ont la signification donnée au nº **32** :

$$\theta = \text{const};$$
$$\varphi = \text{const};$$
$$f(\theta) = 0;$$
$$f(\varphi) = 0;$$
$$f(r) = 0;$$
$$f(r, \theta) = 0;$$
$$f(r, \varphi) = 0;$$
$$f(\theta, \varphi) = 0.$$

10. Calculer la distance de deux points dont on donne les coordonnées sphériques.

11. Calculer $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $x, y, z$ étant des fonctions de $r, \theta, \varphi$. On trouve

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta . d\varphi^2.$$

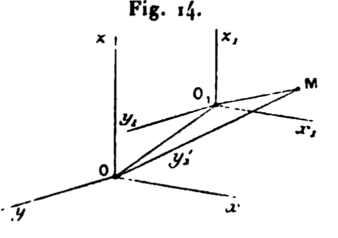
# CHAPITRE II.

## TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES.

35. Si l'on peut exprimer les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque M, rapporté à trois axes en fonction des coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ du même point par rapport à trois nouveaux axes de coordonnées, étant donnée l'équation d'une surface rapportée au premier système, il suffira d'y remplacer $x$, $y$, $z$ par leurs expressions en fonction de $x'$, $y'$, $z'$ pour avoir l'équation de la même surface rapportée aux nouveaux axes. Il en sera de même à l'égard d'une ligne, intersection de deux surfaces définies par leurs équations. En remplaçant dans ces dernières les coordonnées anciennes en fonction des nouvelles, on obtiendra les équations de la ligne considérée, par rapport au nouveau système. Comme en Géométrie plane, nous distinguerons plusieurs cas.

Premier cas : *Translation des axes.* — On déplace l'origine sans changer la direction des axes, le sens de chacun des demi-axes positifs étant conservé.

Fig. 14.




Soient (*fig.* 14) :

$x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées de la nouvelle origine;

$x$, $y$, $z$ les anciennes coordonnées d'un point quelconque M;

$x'$, $y'$, $z'$ ses nouvelles coordonnées.

Si l'on projette sur $\overline{Ox}$, puis sur $\overline{Oy}$ et enfin sur $\overline{Oz}$ le contour $OO_1M$ et sa résultante OM, on a immédiatement, en se rappelant que les projections d'un segment sur des axes parallèles et de même sens sont égales,

$$x = x_1 + x', \qquad y = y_1 + y', \qquad z = z_1 + z'.$$

Deuxième cas : *Changement de directions des axes, sans changement d'origine. — Première méthode.* — Soient $Oxyz$ le trièdre

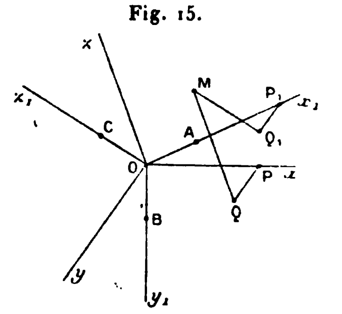
formé par les demi-axes positifs nouveaux. La position du second trièdre sera déterminée si nous connaissons les cosinus directeurs de chacune des demi-droites $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ relatifs aux anciens axes.

Il est commode de faire usage du Tableau suivant :

| | $Ox$ | $Oy$ | $Oz$ |
|---|---|---|---|
| $Ox_1$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $Oy_1$ | $a'$ | $b'$ | $c'$ |
| $Oz_1$ | $a''$ | $b''$ | $c''$ |

dans lequel le cosinus de deux demi-droites se trouve inscrit à l'intersection de la ligne et de la colonne correspondante; ainsi les cosinus de $Ox_1$ sont : $a$, $b$, $c$; ceux de $Oy_1$ : $a'$, $b'$, $c'$, etc.

Fig. 15.




Cela posé, M étant un point quelconque, soient OPQM et $OP_1Q_1M$ (*fig.* 15) les contours des anciennes et des nouvelles coordonnées de ce point. Si l'on projette ces deux contours successivement sur $Ox$, $Oy$, $Oz$, on obtient, en appelant, comme nous l'avons déjà fait, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles des anciens axes

$$(1)\qquad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu = ax' + a'y' + a''z', \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = bx' + b'y' + b''z', \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = cx' + c'y' + c''z'. \end{cases}$$

Le déterminant de ces équations étant égal à $\omega^2$, les anciennes coordonnées $x, y, z$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $x', y', z'$.

Il est évident que, réciproquement, on pourrait de la même façon exprimer $x'$, $y'$, $z'$ en fonctions linéaires et homogènes de $x$, $y$, $z$.

*Deuxième méthode.* — Pour déterminer les directions des nouveaux axes, on peut faire usage de *points directeurs*. Marquons sur

$Ox_1$ un point A, sur $Oy_1$ un point B, sur $Oz_1$ un point C, et soient

$$\overline{OA} = l, \qquad \overline{OB} = m, \qquad \overline{OC} = n;$$

enfin, désignons par $p$, $q$, $r$; $p'$, $q'$, $r'$; $p''$, $q''$, $r''$ les coordonnées anciennes des points A, B, C. Les équations (1) résolues par rapport à $x$, $y$, $z$ donnent

$$\begin{aligned} x &= ux' + u'y' + u''z', \\ y &= vx' + v'y' + v''z', \\ z &= wx' + w'y' + w''z'. \end{aligned}$$

Appliquons ces formules au point A en remarquant que ses coordonnées nouvelles sont $x' = l$, $y' = 0$, $z' = 0$; on obtient

$$p = ul, \qquad q = vl, \qquad r = wl.$$

On aura de même

$$\begin{aligned} p' &= u'l', \qquad q' = v'l', \qquad r' = w'l', \\ p'' &= u''l'', \qquad q'' = v''l'', \qquad r'' = w''l''; \end{aligned}$$

donc

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{p}{l}x' + \frac{p'}{l'}y' + \frac{p''}{l''}z', \\ y &= \frac{q}{l}x' + \frac{q'}{l'}y' + \frac{q''}{l''}z', \\ z &= \frac{r}{l}x' + \frac{r'}{l'}y' + \frac{r''}{l''}z', \end{aligned} \right.$$

et, si l'on suppose que $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 1$, $\overline{OC} = 1$,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= px' + p'y' + p''z', \\ y &= qx' + q'y' + q''z', \\ z &= rx' + r'y' + r''z'. \end{aligned} \right.$$

On peut d'ailleurs obtenir ces formules en projetant le contour des coordonnées anciennes sur $\overline{Ox}$ parallèlement au plan $yOz$, sur $\overline{Oy}$ parallèlement au plan $zOx$, et enfin sur $\overline{Oz}$ parallèlement au plan $xOy$.

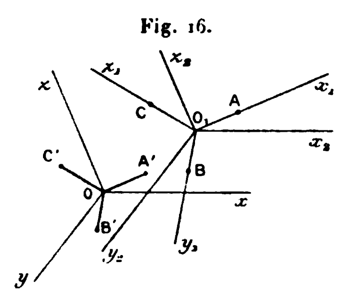
Troisième cas : *Transformation générale.* — On change à la fois l'origine et les directions des axes. Faisons d'abord subir aux axes primitifs une translation qui amène l'origine au point

$O_1(x_1, y_1, z_1)$, qui est l'origine des nouveaux axes (*fig.* 16). Si l'on nomme $x''$, $y''$, $z''$ les coordonnées d'un point M par rapport au système $O_1x_2y_2z_2$ parallèle au premier, on a

$$(4) \qquad x = x_1 + x'', \qquad y = y_1 + y'', \qquad z = z_1 + z''.$$

En second lieu, si l'on nomme $p, q, r$; $p', q', r'$; $p'', q'', r''$ les coordonnées des points directeurs A, B, C, par rapport au système auxiliaire, ou, ce qui revient au même, les coordonnées anciennes des points directeurs A', B', C' pris sur des demi-droites parallèles à $\overline{O_1A}$, $\overline{O_1B}$, $\overline{O_1C}$ de même sens respectivement, et menées par l'ancienne origine; nous pourrons exprimer, à l'aide des formules (2) ou (3), $x''$, $y''$, $z''$ en fonction de $x'$, $y'$, $z'$. Donc, en supposant $OA' = 1$, $OB' = 1$, $OC' = 1$, on obtient, en combinant les formules (3) et (4),

Fig. 16.




$$(5) \qquad \begin{cases} x = px' + p'y' + p''z' + x_1, \\ y = qx' + q'y' + q''z' + y_1, \\ z = rx' + r'y' + r''z' + z_1. \end{cases}$$

On pourrait également se servir des équations (1) dans lesquelles $x, y, z$ seraient remplacés par $x''$, $y''$, $z''$.

36. *Cas particulier : axes rectangulaires. Relations entre les cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle.* — Quand les axes primitifs sont rectangulaires, les formules (1) se simplifient puisque, dans ce cas, $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$, et l'on a

$$(6) \qquad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z, \\ z = cx' + c'y' + c''z. \end{cases}$$

D'ailleurs, dans ce cas, il est évident que, si $OA = 1$, $OB = 1$, $OC = 1$, on a

$$p = a, \qquad q = b, \qquad r = c, \qquad \ldots.$$

Si les nouveaux axes sont également rectangulaires, les formules (6) conservent la même forme, mais il y a alors, entre les neuf cosinus

qui figurent dans les seconds membres, six relations

$$(7)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0. \end{cases}$$

Les équations (7) expriment que les nombres donnés sont les cosinus directeurs des arêtes du second trièdre relatifs à un trièdre trirectangle $Oxyz$, et les équations (8) expriment que le trièdre $Ox_1y_1z_1$ est trirectangle. Il est évident qu'en renversant les rôles des deux trièdres on a aussi

$$(9)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \end{cases} \qquad (10)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0. \end{cases}$$

Il était d'ailleurs certain *a priori* que ces neuf cosinus devaient être liés par six équations; car, si l'on se donne les angles que $Ox_1$ fait avec $Ox$ et avec $Oy$, $Ox_1$ est déterminé. En second lieu $Oy_1$, étant perpendiculaire à $Ox_1$, est déterminé si l'on connaît l'angle que $Oy_1$ fait avec $Ox$, et alors le second trièdre est déterminé. Les cosinus étant connus dès que trois d'entre eux, convenablement choisis, le sont, il faut qu'il existe six relations distinctes entre ces neuf quantités. D'où il résulte que les relations (9) et (10) sont nécessairement des conséquences des équations distinctes (7) et (8).

Il est facile de vérifier l'équivalence de ces deux systèmes.

Effectivement, supposons vérifiées les équations (7) et (8) et considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

En tenant compte des relations (7) et (8), on a immédiatement $D^2 = 1$, et, par suite, $D = \varepsilon$.

Les équations

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$aa'' + bb'' + cc'' = 0$$

déterminent les rapports mutuels de $a$, $b$, $c$. En nommant A, B, C les coefficients de $a$, $b$, $c$ dans le développement de D, suivant les éléments de sa

première ligne, on a, en vertu des équations précédentes,

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{Aa + Bb + Cc} = \frac{1}{D} = \varepsilon,$$

d'où

$$a = A\varepsilon, \quad b = B\varepsilon, \quad c = C\varepsilon.$$

On trouvera de la même manière

$$a' = A'\varepsilon, \quad b' = B'\varepsilon, \quad c' = C'\varepsilon,$$
$$a'' = A''\varepsilon, \quad b'' = B''\varepsilon, \quad c'' = C''\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \varepsilon(Aa + A'a' + A''a'') = \varepsilon^2 = 1$$

et

$$ab + a'b' + a''b'' = \varepsilon(Ab + A'b' + A''b'') = 0.$$

On a aussi

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad AA' + BB' + CC' = 0, \quad \ldots$$

Si l'on considère le déterminant adjoint

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

on sait qu'il est égal à $D^2$, donc $\Delta = 1$.

Des équations

$$AA' + BB' + CC' = 0,$$
$$AA'' + BB'' + CC'' = 0,$$

on tire

$$\frac{A}{B'C'' - C'B''} = \frac{B}{C'A'' - A'C''} = \frac{C}{A'B'' - B'A''} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta} = 1,$$

donc

$$A = B'C'' - C'B'', \quad B = C'A'' - A'C'', \quad C = A'B'' - B'A''.$$

Les mineurs de ce déterminant sont donc égaux à ses éléments.

Les relations que nous venons de démontrer s'étendent à un déterminant de degré quelconque.

Il est facile de décider si $D = +1$ ou $D - 1$. En effet, déplaçons le trièdre $Oxyz$ d'une manière continue en laissant son sommet fixe. Il est évident que les neuf cosinus varieront d'une manière continue; donc D variera aussi d'une manière continue, puisque c'est une fonction entière de ces cosinus; par conséquent, D ne pouvant prendre que l'une des deux valeurs $+1$ ou $-1$, dont la différence est finie, conservera une valeur constante. Or, on peut amener $Ox_1$ à coïncider avec $Ox$ et $Oy_1$ avec $Oy$; alors $Oz_1$ coïncidera avec $Oz$ ou avec la demi-droite opposée. On aura, pour cette nouvelle position,

$$a = b' = 1, \quad a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0 \quad \text{et} \quad c'' = 1 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Mais D se réduit à $c''$ : donc enfin, dans le premier cas, $D = +1$, et, dans le second cas, $D = -1$. D'après cela, imaginons un observateur placé les pieds en O et la tête en un point de la demi-droite $Oz$. Si cet observateur voit $Ox$ à sa gauche et $Oy$ à sa droite, on aura $D = +1$, si cet observateur se déplaçant de façon que ses pieds restant au point O et sa tête venant en un point de $Oz_1$, il voit $Ox_1$ à sa gauche et $Oy_1$ à sa droite, et $D = -1$ dans le cas contraire. En d'autres termes, $D = +1$ si l'on peut amener les deux trièdres à coïncider en faisant tourner l'un d'eux autour de leur sommet commun; $D = -1$ dans le cas contraire.

37. *Conditions nécessaires et suffisantes pour que deux trièdres soient trirectangles.* — Revenons au cas de deux trièdres quelconques et considérons un trièdre auxiliaire trirectangle OXYZ. Soient $u, v, w$; $u', v', w'$; $u'', v'', w''$ les cosinus directeurs des arêtes du trièdre $Oxyz$, et soient $u_1$, $v_1, \ldots, w''_1$ ceux des arêtes du trièdre $O_1x_1y_1z_1$, tous ces cosinus étant relatifs au trièdre auxiliaire. On a

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = \omega^2.$$

Pareillement,

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u'_1 & v'_1 & w'_1 \\ u''_1 & v''_1 & w''_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu_1 & \cos\mu_1 \\ \cos\nu_1 & 1 & \cos\lambda_1 \\ \cos\mu_1 & \cos\lambda_1 & 1 \end{vmatrix} = \omega_1^2.$$

Or, en conservant les notations précédentes,

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u'_1 & v'_1 & w'_1 \\ u''_1 & v''_1 & w''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Donc

$$D = \pm \omega\omega_1.$$

Il en résulte que, dans le cas général, la valeur absolue de D est au plus égale à 1; elle ne peut être égale à 1 que si $\omega^2 = \omega_1^2 = 1$, c'est-à-dire quand les deux trièdres $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ sont trirectangles.

On en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux trièdres soient trirectangles est $D^2 = 1$. S'il en est ainsi, les équations (7) et (8) sont vérifiées; réciproquement, si ces relations sont vérifiées, $D^2 = 1$ et, par suite, $\omega^2 = \omega_1^2 = 1$. Les relations (7) et (8), ou les relations équivalentes (9) et (10) sont donc nécessaires et suffisantes pour que les deux trièdres donnés soient trirectangles.

Si un observateur, placé les pieds en O, la tête sur la demi-droite $Oz$, regarde l'angle $xOy$ et qu'il voie $Ox$ à sa gauche et $Oy$ à sa droite, si un second observateur placé suivant $Oz_1$, les pieds en O, la tête en un point de $Oz_1$,

soit $Ox_1$ à sa gauche et $Oy_1$ à sa droite, nous dirons que les deux trièdres sont de même espèce, et d'espèces contraires s'il n'en est pas ainsi.

Cela posé, la formule $D = \pm \omega\omega_1$ montre que D ne peut être nul que si $\omega = 0$ ou $\omega_1 = 0$; mais $\omega = \pm \sin\mu \sin\nu \sin A$, donc $\omega$ ne peut être nul que si les droites $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont dans un même plan; remarque analogue pour $\omega_1$. Or, on peut déformer les trièdres d'une manière continue de façon à les rendre trirectangles; il résulte de ce qui précède que D ne changera pas de signe, et, comme les trièdres ne changeront pas d'espèces, on en conclut que D est positif s'ils sont de même espèce, négatif s'ils sont d'espèces contraires.

38. *La fonction $\psi(x, y, z)$ reste invariable quand on effectue une transformation de coordonnées sans changement d'origine.* — Soit M un point quelconque dont les coordonnées anciennes sont $x, y, z$, et les nouvelles, $x', y', z'$. On a

$$\psi(x, y, z) = \psi(x', y', z'),$$

puisque chacune de ces expressions est la mesure de $\overline{OM}^2$.

C'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier par le calcul. En effet, si l'on fait la substitution linéaire définie par les formules (3), $\psi(x, y, z)$ se change en un polynome homogène du second degré dans lequel le coefficient de $x'^2$ est égal à $\psi(p, q, r)$, c'est-à-dire 1; pareillement, pour les coefficients de $y'^2$ et de $z'^2$. Le coefficient de $y'z'$ est égal à

$$p'\frac{\partial\psi}{\partial p} + q'\frac{\partial\psi}{\partial q} + r'\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

c'est-à-dire $2\cos\lambda'$, etc.

Si l'on nomme M le module de la substitution, et si l'on remarque que les discriminants de $\psi(x, y, z)$ et de $\psi(x', y', z')$ sont respectivement $\omega^2$ et $\omega'^2$, on a

$$M^2 = \frac{\omega'^2}{\omega^2};$$

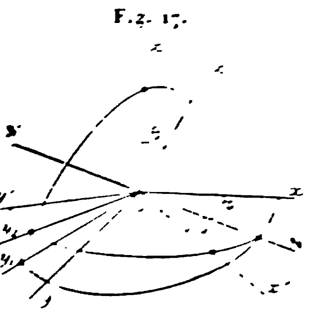
quand les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, $M^2 = 1$.

## Formules d'Euler.

39. Si l'on veut passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires et de même origine, on peut exprimer les coordonnées anciennes d'un point quelconque en fonction des nouvelles et de neuf cosinus liés entre eux par six relations. Il en résulte qu'on doit pouvoir exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles et de trois paramètres arbitraires. C'est ce que l'on peut réaliser au moyen des formules suivantes, dues à Euler, quand on suppose que l'on

puisse faire tourner le premier trièdre autour de son sommet, de manière à le faire coïncider avec le second.

Soient $Oxyz$, $Ox'y'z'$ (*fig.* 17) deux trièdres trirectangles remplissant cette condition.




Désignons par $\theta$ l'angle $zOz'$ et soit $N'N$ l'intersection des deux plans $xOy$, $x'Oy'$; nous choisirons la demi-droite $ON$, de telle sorte qu'un observateur, placé les pieds en $O$ la tête en $N$, voie $Oz$ à sa gauche et $Oz'$ à sa droite, et nous désignerons par $\varphi$ l'angle $xON$, cet angle étant compté de $0$ à $2\pi$. Enfin, nous appellerons $\psi$ l'angle dont il faut faire tourner $ON$, l'axe de rotation étant $Oz'$, pour l'amener en $Ox'$, la rotation autour de $Oz'$ étant regardée comme positive de gauche à droite pour un observateur placé les pieds en $O$ la tête en $z'$: on peut compter l'angle $\psi$ de $0$ à $2\pi$.

Cela étant, je dis qu'en faisant tourner le trièdre $Oxyz$ successivement autour de $Oz$ d'un angle égal à $\varphi$, autour de $ON$ d'un angle égal à $\theta$, et enfin autour de $Oz'$ d'un angle égal à $\psi$, on lui fera prendre finalement la position $Ox_1y_1z_1$. En effet, la première rotation amène $Ox$ en $ON$ et $Oy$ en $Oy_1$, l'angle de $Oy_1$ avec $Oy$ étant égal à $\varphi$, et, par suite, $NOy_1$ étant égal à $\frac{\pi}{2}$. La droite $ON$ est donc perpendiculaire aux trois droites $Oy_1$, $Oz$, $Oz'$; si nous faisons tourner autour de $ON$, de l'angle $\theta$ et de gauche à droite, le trièdre $ONy_1z$, $Oz$ viendra en $Oz'$ et $Oy_1$ prendra la position $Oy_2$, perpendiculaire à $Oz'$ et, par suite, dans le plan $x'Oy'$. Il est évident que la troisième rotation, autour de $Oz'$, fera coïncider $ON$ avec $Ox_1$ et $Oy_2$ avec $Oy'$.

Cela étant, si nous nommons $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées d'un point $M(x, y, z)$ par rapport au système $ONy_1z$; $x_2, y_2, z_2$ les coordonnées du même point par rapport au système $ONy_2z'$, et enfin $x', y', z'$ ses coordonnées par rapport à $Ox'y'z'$, on a successivement à considérer trois transformations de coordonnées planes, ce qui donne

$$(\varphi)\qquad \begin{cases} z = z_1, \\ x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi, \end{cases}$$

$$(\theta)\qquad \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2\cos\theta - z_2\sin\theta, \\ z_1 = y_2\sin\theta + z_2\cos\theta, \end{cases}$$

$$(\psi)\qquad \begin{cases} z_2 = z', \\ x_2 = x'\cos\psi - y'\sin\psi, \\ y_2 = x'\sin\psi + y'\cos\psi, \end{cases}$$

En éliminant les inconnues auxiliaires, on obtient sans difficulté

$$\begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\sin\varphi\sin\theta, \\ y &= x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta, \\ z &= x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

*Cas particulier :* $\psi = 0$. — Les formules se simplifient beaucoup dans ce cas ; elles se réduisent à

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta + z'\sin\varphi\sin\theta, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\theta - z'\cos\varphi\sin\theta, \\ z &= y'\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

40. Application. — *Rapporter la section d'une surface par un plan donné à deux axes tracés dans ce plan.*

On transporte d'abord l'origine des coordonnées en un point O du plan sécant, les nouveaux axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ étant parallèles aux anciens. Nous savons former l'équation $f(x, y, z) = 0$ de la surface rapportée aux nouveaux axes.

Cela fait, on prend pour nouvel axe des $x$ la trace du plan sécant sur le plan $Oy$, le nouveau système étant d'ailleurs rectangulaire comme $Oxyz$.

L'équation de la surface rapportée aux axes $Ox'y'z'$ sera

$$f(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta,\ x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\theta,\ y'\sin\theta + z'\cos\theta) = 0;$$

par suite, l'équation de la section rapportée aux axes $Ox'y'$ s'obtient en faisant $z' = 0$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$f(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\theta,\ x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\theta,\ y'\sin\theta) = 0.$$

Il est d'ailleurs très facile d'obtenir directement cette équation.

## Classification des surfaces.

41. Les formules de transformation de coordonnées étant linéaires, si l'équation d'une surface est algébrique et de degré $m$ par rapport à un système déterminé de coordonnées rectilignes, l'équa-

tion de la même surface rapportée à tout autre système de coordonnées rectilignes pouvant s'obtenir au moyen des formules de transformation, c'est-à-dire par une substitution linéaire, sera encore algébrique et de degré $m$.

On a ainsi été conduit à distinguer les surfaces en deux classes : *les surfaces algébriques,* c'est-à-dire celles dont l'équation peut se mettre sous la forme $f(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z)$ étant un polynome entier en $x$, $y$ et $z$, et *les surfaces transcendantes,* dont l'équation n'est pas algébrique.

On appelle *ordre* d'une surface algébrique *le degré* de son équation.

42. *Une droite quelconque rencontre une surface algébrique d'ordre m en m points (au plus).* — En effet, rapportons la surface considérée à trois axes, l'axe des $z$ étant la sécante donnée. L'équation de la surface est alors $f(x, y, z) = 0$, qui est du degré $m$ au plus par rapport à $z$.

Dans le cas le plus général, cette équation est de degré $m$ effectivement, et, par suite, l'axe des $z$ coupe la surface donnée en $m$ points. Si le degré de l'équation s'abaisse de $p$ unités, $p$ des points de rencontre sont à l'infini.

En conservant les conventions habituelles, nous pouvons donc dire qu'une droite quelconque coupe toute surface d'ordre $m$ en $m$ points à distance finie ou infinie, réels ou imaginaires, distincts ou non.

Réciproquement, si une droite quelconque coupe une surface algébrique en $m$ points, cette surface est d'ordre $m$.

43. Théorème. — *Toute section plane d'une surface d'ordre m est une courbe d'ordre m.*

En effet, si le plan sécant est pris pour plan des $x$, $y$, l'équation de la section rapportée aux axes $Ox$, $Oy$ s'obtiendra en faisant $z = 0$ dans l'équation de la surface. Il peut arriver que l'équation ainsi obtenue se décompose ; dans ce cas, la section se composera de deux ou plusieurs courbes d'ordre inférieur à $m$, ou d'un certain nombre de droites et de courbes, ou bien sera composée uniquement de droites; enfin, quelques parties de la courbe obtenue peuvent être à l'infini, si le degré de son équation s'abaisse au-dessous de $m$.

44. *Nombre de paramètres de l'équation d'une surface d'ordre m.* — Le nombre des coefficients du polynome le plus général de degré $m$ à trois variables est égal au nombre des combinaisons complètes de quatre lettres $m$ à $m$, c'est-à-dire

$$K_4^m = C_{m+3}^m = C_{m+3}^3 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}.$$

Le nombre des *paramètres*

$$N = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} - 1$$

ou

$$N = \frac{m^3 + 6m^2 + 11m}{6}.$$

Il en résulte qu'il faut N points pour déterminer une surface d'ordre $m$. Si $m = 2$, on a $N = q$. Il faut neuf points pour déterminer une surface du second degré. Pour abréger, nous appellerons *quadrique* toute surface du second degré. Pour l'équation d'une quadrique, nous adopterons les notations suivantes

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

ou

$$\varphi(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z) + D = 0,$$

$\varphi(x, y, z)$ étant le polynome

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

et $\varphi_1(x, y, z)$ représentant

$$2Cx + 2C'y + 2C''z.$$

45. *Courbes gauches.* — On nomme *courbe gauche* une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan. On nomme *courbe algébrique* toute courbe qu'on peut obtenir par l'intersection totale ou partielle de deux surfaces algébriques. Si les deux surfaces sont d'ordres $m$ et $p$, un plan quelconque coupant la première suivant une courbe d'ordre $m$ et la seconde suivant une courbe d'ordre $p$, et ces deux courbes ayant $mp$ points communs, on voit que le plan sécant rencontre la courbe commune aux deux surfaces en $mp$ points. On appelle *ordre d'une courbe gauche* le nombre de points

communs à cette courbe et à un plan sécant quelconque. D'après cela, la courbe commune à deux surfaces d'ordre $m$ et $p$ est une courbe d'ordre $mp$.

46. *Remarque.* — Si une courbe gauche est d'ordre $p$, $p$ étant premier, elle ne peut constituer à elle seule toute l'intersection de deux surfaces algébriques. Ainsi, par exemple, une courbe gauche du troisième ordre est une partie de l'intersection de deux cônes ayant une génératrice commune. Soient, en effet, A et B deux points d'une *cubique gauche*. Le cône ayant pour sommet le point A, et pour directrice la cubique est du second ordre, puisqu'un plan quelconque mené par A, ne coupant la cubique qu'en deux points P, Q autres que A, coupe ce cône suivant deux droites AP, AQ; de même, le cône de sommet B, ayant la cubique pour directrice, est du second degré. L'intersection de ces deux cônes se compose de la cubique et de la droite AB. Il résulte immédiatement de là qu'une cubique gauche est déterminée par six points A, B, C, D, E, F; car, le cône du second ordre de sommet A ayant pour génératrices les droites AB, AC, AD, AE, AF, et le cône du second degré de sommet B et ayant pour génératrices BA, BC, BD, BE, BF, sont évidemment déterminés, attendu que chacun d'eux a un sommet donné et pour directrice la conique passant par les cinq points d'intersection d'un plan avec les cinq génératrices données.

## EXERCICES.

1. Couper la surface définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

par un plan passant par l'origine de manière que la section soit un cercle.

2. Même question pour les surfaces représentées par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$

3. Déterminer, dans ce dernier cas, le plan sécant de façon que la section soit une hyperbole équilatère ou deux droites.

4. Cherchez les plans qui coupent la première surface (n° 1), suivant une ellipse d'aire donnée.

5. Couper la surface, ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

par un plan passant par l'origine de façon que la section soit un cercle.

— Pour toutes ces questions, appliquer les formules d'Euler.

6. En posant

$$a = \cos\theta, \qquad \omega' = \sin\theta\sin\psi, \qquad b = -\sin\theta\sin\varphi,$$

calculer les six autres cosinus au moyen des relations fondamentales.

7. Prouver que les neuf cosinus vérifient l'équation

$$a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2 = a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2.$$

(JACOBI.)

8. Prouver que les neuf cosinus vérifient l'équation

$$15\,m^2 + (r - s)^2 + (r' - s')^2 + (r'' - s'')^2 + 4pq = 0,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
m^2 &= a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2,\\
p &= ab'c'' + a'b''c + a''bc',\\
r &= ab'b'' + a'b''b + a''bb',\\
r' &= bc'c'' + b'c''c + b''cc',\\
r'' &= ca'a'' + c'a''a + c''aa',\\
q &= ab''c' + a'bc'' + a''bc',\\
s &= ac'a'' + a'c''c + a''cc',\\
s' &= ba'a'' + b'a''a + b''aa',\\
s'' &= cb'b'' + c'b''b + c''bb'.
\end{aligned}$$

(JACOBI.)

Les axes sont supposés rectangulaires.

# CHAPITRE III.

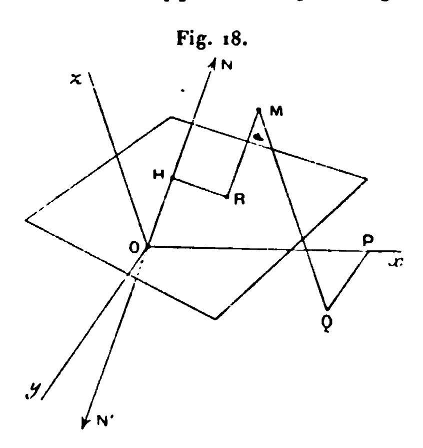
## PLAN ET LIGNE DROITE.

### Du plan.

47. *L'équation du plan est du premier degré.* — Considérons un plan quelconque P (*fig.* 18) et soient $Ox$, $Oy$, $Oz$ trois axes de coordonnées. Sur la perpendiculaire N'N, menée par l'origine à ce plan, nous choisirons un sens positif, ON, et nous désignerons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que la demi-droite ON fait avec $\overline{Ox}$, $\overline{Oy}$, $\overline{Oz}$ res-

pectivement. Soit H le point de rencontre du plan P et de la droite N'N; nous appellerons $p$ le segment $\overline{OH}$ compté avec le signe + si H est sur la demi-droite ON, avec le signe —, si ce point est sur la demi-droite ON'; on peut remarquer que $p$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les coordonnées polaires du point H. Le plan P est complètement déterminé si le point H est connu.

Fig. 18.




Cela posé, soient M un point quelconque, $x_0$, $y_0$, $z_0$ ses coordonnées; la perpendiculaire abaissée de M sur le plan P rencontre ce plan en un point R, et nous désignerons par $d$ la mesure algébrique du segment $\overline{RM}$, $d$ étant positif quand $\overline{RM}$ a le même sens que $\overline{ON}$, négatif dans le cas contraire. Si l'on projette sur l'axe R'R les deux contours équivalents OPQM et OHRM, on obtient

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma = p + d,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad d = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.$$

Pour que le point M soit dans le plan P, il faut et il suffit que $d = 0$; donc l'équation du plan P est

$$(2) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

ce qui prouve que l'équation d'un plan quelconque en coordonnées rectilignes est du premier degré.

48. *Réciproquement,* toute équation du premier degré

$$(3) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

représente un plan. En effet, on peut déterminer des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et une longueur ayant pour mesure algébrique $p$, tels que l'équation (2) soit équivalente à l'équation (3). Pour qu'il en soit ainsi, il faut déterminer $\lambda$ de façon que

$$\cos\alpha = \lambda A, \qquad \cos\beta = \lambda B, \qquad \cos\gamma = \lambda C, \qquad -p = \lambda D;$$

mais pour que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ soient les cosinus directeurs d'une demi-droite, il faut et il suffit que

$$\lambda^2 F(A, B, C) = \omega^2,$$

ce qui donne, en posant $R^2 = F(A, B, C)$,

$$\lambda = \varepsilon \frac{\omega}{R} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et, ensuite,

$$(4) \quad \cos\alpha = \varepsilon \frac{A\omega}{R}, \qquad \cos\beta = \varepsilon \frac{B\omega}{R}, \qquad \cos\gamma = \varepsilon \frac{C\omega}{R}, \qquad -p = \varepsilon \frac{D\omega}{R}.$$

Si les axes sont rectangulaires, $\omega = 1$, $R = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Dans le cas général nous supposerons toujours $\omega > 0$, ainsi que cela a été dit plus haut.

Il convient de remarquer que les deux déterminations de $\varepsilon$ correspondent à un même plan; car supposons que ON corresponde à $\varepsilon + 1$, la demi-droite opposée ON′ correspond alors à $\varepsilon = -1$; mais comme, en passant du premier cas au second, $p$ change de signe sans changer de valeur absolue, on obtient le même point H et, par suite, le même plan P, dans les deux cas. L'équation (2) est donc l'équation d'un plan déterminé.

Remarquons que l'équation (3) renferme trois paramètres. Il faudra donc trois conditions pour déterminer un plan.

49. *Cas particuliers.* — Si le plan P passe par l'origine, $p = 0$; son équation ne contient pas de terme constant.

Si $p$ varie seul, le plan P se déplace parallèlement à lui-même. D'après cela

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

représente le plan mené par l'origine parallèlement au plan défini par l'équation (1).

De même

$$Ax + By + Cz = 0$$

et

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

représentent deux plans parallèles, le premier passant par l'origine.

L'équation

$$x - x_0 + y\cos\nu + z\cos\mu = 0$$

est celle du plan perpendiculaire à l'axe des $x$, mené par le point $(x_0, o, o)$.

Pareillement

$$x \cos\nu + y - y_0 + z \cos\lambda = o$$

représente le plan perpendiculaire à $Oy$ menée par le point $(o, y_0, o)$.

Il en résulte que les équations

$$x + y \cos\nu + z \cos\mu = o,$$
$$x \cos\nu + y + z \cos\lambda = o$$

sont celles de la perpendiculaire au plan $xOy$ menée par l'origine.

La perpendiculaire au même plan menée par le point $x_0, y_0, z_0$ a donc pour équations

$$x - x_0 + (y - y_0)\cos\nu + (z - z_0)\cos\mu = o,$$
$$(x - x_0)\cos\nu + y - y_0 + (z - z_0)\cos\lambda = o.$$

50. *Résolution de l'inégalité* $Ax + By + Cz + D > o$ ou $< o$. — Posons $P = Ax + By + Cz + D$; $P_0 = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. Nous dirons que le polynome P prend la valeur $P_0$ au point M ayant pour coordonnées $x_0, y_0, z_0$. Si l'on suppose, par exemple, $C \neq o$, la parallèle à l'axe des $z$ menée par M rencontre le plan P ayant pour équation $P = o$ en un point $R(x_0, y_0, z_1)$ et le plan $xOy$ au point $Q(x_0, y_0, o)$. On a

$$P_0 = C(z_0 - z_1).$$

D'autre part, $\overline{RM} = \overline{QM} - \overline{QR} = z_0 - z_1$, donc $P_0 = C \times \overline{RM}$; par conséquent, $P_0$ a le signe du segment $\overline{RM}$ si $C > o$, le signe de $-\overline{RM}$ si $C < o$.

Le plan P partage l'espace en deux régions; il est évident que, si le segment $\overline{RM}$ est positif, il en sera de même pour tous les points situés du même côté que M par rapport au plan, et nous appellerons la région qui contient tous ces points la région des *z positifs;* l'autre région sera celle des *z négatifs*. On voit par ce qui précède que le polynome P prend un signe déterminé dans l'une de ces régions et le signe contraire dans l'autre.

Nous appellerons *région positive* celle dans laquelle le polynome P est positif, et *région négative* celle dans laquelle P est négatif. Si

$C > 0$, la région positive est celle des $z$ positifs; si $C < 0$, c'est celle des $z$ négatifs.

Pareillement, si $A > 0$, la région positive est encore celle des $x$ positifs, et si $B > 0$, c'est aussi celle des $y$ positifs.

Lorsque le coefficient D est différent de zéro, on peut remarquer aussi qu'à l'origine le polynome P a le signe de D; donc si $D > 0$, la région positive est celle qui comprend l'origine, et, si $D < 0$, c'est au contraire celle qui ne la comprend pas.

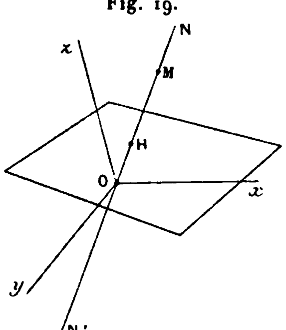
51. *Application.* — Prenons sur la demi-perpendiculaire ON (*fig.* 19) au plan P, menée par l'origine, un point $M(x_1, y_1, z_1)$, et soit $l$ la valeur absolue du segment OM; si l'on appelle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles de OM avec $\overline{Ox}$, $\overline{Oy}$, $\overline{Oz}$, on sait que

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = l;$$

donc, en conservant les notations du n° 48, on trouve, en vertu des équations (4),

$$P_1 = \varepsilon \frac{lR}{\omega} + D.$$

Fig. 19.




Il en résulte que, si la longueur $l$ est suffisamment grande, $P_1$ a le signe de $\varepsilon$. Par conséquent, si $\varepsilon = +1$, un point M, pris sur ON à une distance suffisamment grande de l'origine, est dans la région positive du plan P; si $\varepsilon = -1$, il est dans la région négative. A cause de ce résultat, nous appellerons demi-normale positive du plan P celle qui correspond à $\varepsilon = +1$, et demi-normale négative celle qui correspond à $\varepsilon = -1$.

52. *Distance d'un point à un plan défini par son équation.* — Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan. L'équation (1), si l'on tient compte des formules (4), devient

$$d = \varepsilon \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{R} \omega.$$

Dans cette formule, $d$ a une signification précise qui a été définie plus haut.

Quelle que soit la détermination choisie pour $\varepsilon$, la formule attribue un signe pour les valeurs de $d$ qui correspondent aux points situés d'un côté de la droite, et le signe contraire pour les points situés de l'autre côté. On peut choisir $\varepsilon$ de façon que $d$ soit positif pour une région désignée à l'avance. Ainsi, en prenant $\varepsilon = +1$, $d$ est positif pour tous les points situés dans la région positive.

Il est superflu d'ajouter que, si l'on veut la valeur absolue de la distance, il faut donner à $\varepsilon$ le signe de $P_0$.

53. *Équations des plans bissecteurs d'un dièdre.* — Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations de deux plans; le lieu des points également distants de ces deux plans est défini par les équations

$$\frac{P}{R} = \pm \frac{Q}{R'},$$

Q désignant le polynome $A'x + B'y + C'z + D'$ et $R'$ désignant $\sqrt{F(A', B', C')}$ si les axes sont obliques, $\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}$ s'ils sont rectangulaires.

54. *Conditions pour que deux plans soient parallèles.* — Pour que deux plans, ayant respectivement pour équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

soient parallèles, il faut et il suffit que les perpendiculaires à ces plans, menées par l'origine, soient parallèles; or, les cosinus directeurs de ces droites sont respectivement proportionnels à A, B, C et à A', B', C'; les conditions demandées sont donc

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

On peut encore remarquer que les plans parallèles respectivement aux plans donnés et menés par l'origine, ont pour équations

$$Ax + By + Cz = 0, \qquad A'x + B'y + C'z = 0.$$

Ces plans doivent coïncider, si l'on veut que les plans donnés soient parallèles.

55. *Application.* — Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont des droites parallèles. On peut le *vérifier* en prenant le plan sécant pour plan des $x$, $y$. Dans ce plan, les traces des plans ont pour équations

$$Ax + By + Dz = 0, \qquad A'x + B'y + D'z = 0,$$

ce sont des droites parallèles, puisque les coefficients de ces équations sont proportionnels par hypothèse.

*Réciproquement, si en coupant deux plans par deux autres plans non parallèles, on obtient dans chaque cas des intersections parallèles, les deux plans donnés sont parallèles.*

Supposons, en effet, que les deux plans sécants soient le plan $xOy$ et le plan $yOz$; on suppose

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \text{et} \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'};$$

donc

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

56. *Équation générale des plans parallèles à un plan donné.* — Si le plan donné a pour équation $P = 0$, l'équation cherchée est $P + \lambda = 0$, $\lambda$ désignant un paramètre arbitraire.

57. *Équation du plan passant par un point et parallèle à un plan.* — Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du point donné et $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan donné; l'équation cherchée est de la forme $Ax + By + Cz + \lambda = 0$; on détermine $\lambda$ par la condition que cette équation soit vérifiée pour $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$; on obtient ainsi l'équation

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

## *Angle de deux plans (axes rectangulaires).*

58. Soient $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les équations de deux plans. L'angle V des normales à ces plans est donné par la formule

$$\cos V = \varepsilon\varepsilon' \frac{AA' + BB' + CC'}{RR'},$$

$$R = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad R' = +\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

Si $\varepsilon = \varepsilon'$, V désigne l'angle de deux demi-normales de même signe; si $\varepsilon = -\varepsilon'$, c'est l'angle de deux demi-normales de signes contraires.

*Condition d'orthogonalité :* $AA' + BB' + CC' = 0$.

*Axes obliques.* — Quand les axes sont obliques

$$\cos V = \frac{1}{2}\,\frac{A'\dfrac{\partial F}{\partial A} + B'\dfrac{\partial F}{\partial B} + C'\dfrac{\partial F}{\partial C}}{\sqrt{F(A, B, C)\,F(A', B', C')}},$$

et la condition d'orthogonalité est

$$A'\frac{\partial F}{\partial A} + B'\frac{\partial F}{\partial B} + C'\frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

59. *Équation du plan passant par trois points* $M_1$, $M_2$, $M_3$. — Cette équation est évidemment

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que le coefficient de $x$ ne peut être nul que si les projections des trois points sur le plan $yOz$ sont en ligne droite, les projections étant faites parallèlement à $Ox$; remarque analogue pour les coefficients de $y$ ou de $z$. Donc cette équation est bien du premier degré si les trois points donnés ne sont pas en ligne droite. Si, au contraire, ces trois points sont en ligne droite, on peut remplacer $x_3$, $y_3$, $z_3$ par $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $\frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$; alors, en multipliant les éléments de la dernière ligne du déterminant par $1+\lambda$, on voit que ce déterminant est identiquement nul. Dans ce cas, le plan n'est pas déterminé.

60. *Condition pour que quatre points* $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ *soient dans un même plan.* — La condition demandée est

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

61. *Équation du plan coupant les axes en des points donnés.* — Soient $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ les traces d'un plan

sur les trois axes; l'équation de ce plan est

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$$

Si $a$, $b$, $c$ grandissent indéfiniment, le plan ABC disparaît à l'infini.

Mais, avec des coordonnées homogènes, l'équation du plan ABC est

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-t=0.$$

Donc, si $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=0$, le premier membre de cette équation se réduit à $-t$. Or, l'équation d'un plan quelconque étant de la forme

$$Ax+By+Cz+Dt=0,$$

nous *conviendrons* de dire que l'équation $t=0$, étant du premier degré, représente un plan; d'autre part, si un point M a pour coordonnées homogènes $x, y, z, t$, la condition $t=0$ exprime que le point M est à l'infini. Nous dirons donc, en vertu de la *convention* que nous venons de faire, que tous les points à l'infini sont dans un même plan *fictif*, nommé *plan de l'infini*.

62. *Équation générale des plans passant par l'intersection de deux plans donnés.* — Soient $P=0$, $Q=0$ les équations des deux plans donnés. L'équation demandée est

$$\alpha P+\beta Q=0. \tag{1}$$

En effet, cette équation représente, quelles que soient les valeurs de $\alpha$ et $\beta$, un plan passant par l'intersection des plans donnés et si $x'$, $y'$, $z'$ sont les coordonnées d'un point pris dans l'un quelconque R des plans passant par cette intersection, l'équation

$$PQ'-QP'=0 \tag{2}$$

représente un plan qui coïncide avec R; donc, en donnant à $\alpha$ et $\beta$ des valeurs convenables, l'équation (1) représente tel plan, passant par l'intersection des plans donnés, que l'on veut.

On peut remplacer l'équation (1) par l'équation

$$P+\lambda Q=0.$$

*Remarque.* — Si $P=0$, $Q=0$ représentent deux plans parallèles, l'équation (1) représente tous les plans parallèles au plan P.

63. Application. — *Mener par une droite un plan perpendiculaire à un plan donné.* — Soient

$$Ax+By+Cz=0$$

l'équation du plan donné et

$$A'x+B'y+C'z+D'=0, \qquad A''x+B''y+C''z+D''=0$$

les équations de la droite donnée. Un plan passant par cette droite a pour équation

$$(A'+\lambda A'')x+(B'+\lambda B'')y+(C'+C'')z+D'+\lambda D''=0;$$

ce plan est perpendiculaire au premier si

$$A(A'+\lambda A'')+B(B'+\lambda B'')+C(C'+\lambda C'')=0.$$

64. *Équation du plan passant par un point et par l'intersection de deux plans.* — L'équation (2) résout la question.

*Application.* — L'équation

$$(AD'-DA')x+(BD'-DB')y+(CD'-DC')z=0$$

représente le plan passant par l'origine et par l'intersection des plans ayant respectivement pour équations

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

65. *Intersection de trois plans.* — Soient

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ A'x+B'y+C'z+D'&=0,\\ A''x+B''y+C''z+D''&=0 \end{aligned}$$

les équations de trois plans. Appelons $\Delta$ le déterminant des coefficients des coordonnées.

*Premier cas :* $\Delta\neq 0$. — Les équations ont une solution unique : les trois plans ont un point commun à distance finie; ils forment un trièdre.

*Deuxième cas :* $\Delta=0$. — L'un des mineurs du second degré, par exemple $AB'-BA'\neq 0$. Soit $\Delta_1$ le caractéristique correspon-

dant, c'est-à-dire

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix}.$$

($a$) $\Delta_1 \neq 0$. — Les deux premiers plans se coupent et le troisième est parallèle à leur intersection (il peut être à l'infini). Dans ce cas, les trois plans n'ont aucun point commun; ils forment une surface prismatique, ce qui revient à dire qu'ils sont parallèles à une même droite. On peut dire, dans ce cas, qu'ils ont un point commun à l'infini.

($b$) $\Delta_1 = 0$. — Le troisième plan passe par l'intersection des deux premiers; en d'autres termes, les trois plans ont une droite commune.

*Troisième cas.* — Les mineurs du second degré de $\Delta$ sont tous nuls : les trois plans sont parallèles; mais un des coefficients de $x$, $y$ ou $z$, par exemple $A \neq 0$.

Il y a, dans ce cas, deux caractéristiques à considérer.

($a$) L'un au moins des déterminants $AD' - DA'$ ou $AD'' - DA'' \neq 0$. Les trois plans sont parallèles et non confondus. Ils ont une droite commune à l'infini. L'un d'eux peut être à l'infini.

($b$) $AD' - DA' = 0$, $AD'' - DA'' = 0$. — Les trois plans sont confondus. L'un des plans peut être indéterminé.

*Quatrième cas.* — Les coefficients des coordonnées sont tous nuls. Dans ce cas limite, les plans sont à l'infini, ou l'un d'eux, ou deux d'entre eux, ou même tous les trois peuvent être indéterminés.

66. *Conditions pour que trois plans aient une droite commune.* — Ces conditions résultent de la discussion précédente, mais on peut traiter la question d'une autre manière très commode à appliquer. En effet, pour que $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ représentent trois plans ayant une droite commune, il faut et il suffit qu'il existe des constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ non nulles et telles que

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R \equiv 0.$$

En effet, si le plan R passe par l'intersection des plans P, Q, on

peut déterminer $\alpha$ et $\beta$ tels que l'équation $\alpha P + \beta Q = 0$ représente le plan R : donc il y a une constante $-\gamma$, telle que

$$-\gamma R \equiv \alpha P + \beta Q.$$

Réciproquement, si l'identité précédente est vérifiée, le plan R passe par l'intersection des plans P, Q.

Il convient de remarquer que si l'une des constantes, $\alpha$ par exemple, était nulle, l'identité $\beta Q + \gamma R \equiv 0$ ou $\beta Q \equiv -\gamma R$ exprimerait que les deux plans Q, R sont confondus.

Il importe encore de remarquer que la droite commune aux plans P, Q, R peut être à l'infini.

Les conditions $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$ conduisent d'ailleurs à la même proposition.

67. *Application.* — Considérons un trièdre $Oxyz$; les équations

$$x + y\cos\nu + z\cos\mu = 0, \qquad x\cos\nu + y + z\cos\lambda = 0$$

représentent la perpendiculaire au plan $xOy$ menée par l'origine; en éliminant $z$, on obtient

$$x(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) - y(\cos\mu - \cos\lambda\cos\nu) = 0.$$

ou

$$x\frac{\cos A}{\sin\lambda} - y\frac{\cos B}{\sin\mu} = 0.$$

Cette équation représente le plan mené par $Oz$ et perpendiculaire au plan $xOy$; de même les plans menés par chacune des deux autres arêtes et perpendiculaires à la face opposée, ont pour équations

$$y\frac{\cos B}{\sin\mu} - z\frac{\cos C}{\sin\nu} = 0,$$

$$z\frac{\cos C}{\sin\nu} - x\frac{\cos A}{\sin\lambda} = 0.$$

La somme des premiers membres de ces trois équations étant nulle, les trois plans se coupent; la ligne d'intersection commune est définie par les équations

$$\frac{x\cos A}{\sin\lambda} = \frac{y\cos B}{\sin\mu} = \frac{z\cos C}{\sin\nu}.$$

On retrouve ainsi une propriété, bien connue, des trièdres.

68. ***Remarque.*** — Pour exprimer que trois plans sont parallèles à une même droite, il suffit d'exprimer que les plans parallèles respectivement aux

plans donnés et menés par l'origine des coordonnées ont une droite commune, ce qui revient à dire que les équations

$$Ax + By + Cz = o, \qquad A'x + B'y + C'z = o, \qquad A''x + B''y + C''z = o$$

ont des solutions autres que zéro. La condition est donc $\Delta = o$.

69. *Exprimer que quatre plans ont un point commun.* — Soient

$$\begin{aligned} P_1 &= Ax + By + Cz + Dt = o, \\ P_2 &= A'x + B'y + C'z + D't = o, \\ P_3 &= A''x + B''y + C''z + D''t = o, \\ P_4 &= A'''x + B'''y + C'''z + D'''t = o \end{aligned}$$

les équations des quatre plans donnés. Pour que ces plans aient un point commun à distance finie ou infinie, il faut et il suffit que les équations précédentes aient une solution autre que zéro. Donc la condition est que le déterminant des coefficients de $x, y, z, t$ soit nul. Si l'on veut que les plans aient un point commun à distance finie, il faut en outre que l'un au moins des mineurs formés avec les coefficients de $x, y, z$ soit différent de zéro.

Dire que le déterminant complet est nul, c'est dire qu'il existe des nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ non tous nuls et tels que

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 \equiv o.$$

Si l'un des coefficients, par exemple $\gamma$, est nul, les plans $P_1$, $P_3$, $P_4$ ont une droite commune, comme nous l'avons vu.

70. *Étant donnés quatre polynomes distincts* $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, *l'équation d'un plan quelconque peut se mettre sous la forme*

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = o.$$

On peut, en effet, déterminer $a$, $b$, $c$, $d$ de façon que

$$ux + vy + wz + rt \equiv aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4.$$

En égalant les coefficients des mêmes variables on obtient, pour déterminer $a$, $b$, $c$, $d$, quatre équations linéaires dont le déterminant est différent de zéro, par hypothèse.

En particulier, $\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 = o$ est l'équation générale des plans menés par le point commun aux trois plans $P_1$, $P_2$, $P_3$.

## Coordonnées tétraédriques.

**71.** Supposons que $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$ soient les équations des quatre faces d'un tétraèdre. A tout point $(x, y, z, t)$ correspond un système de valeurs proportionnelles de $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, et réciproquement, si $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ sont proportionnels à des nombres donnés; $x, y, z, t$ sont aussi proportionnels à des nombres déterminés. On peut donc dire que le point $(x, y, z, t)$ a pour coordonnées tétraédriques $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$.

En appelant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ les distances d'un point M aux quatre faces du tétraèdre, on voit, comme en Géométrie plane, que les fonctions linéaires $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ des coordonnées de M sont égales à $\lambda\alpha$, $\mu\beta$, $\nu\gamma$, $\rho\delta$; $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ étant des constantes arbitraires : si $\lambda = \mu = \nu = \rho$, on a ce qu'on appelle les coordonnées tétraédriques normales. Si l'on nomme $a$, $b$, $c$, $d$ les aires des faces du tétraèdre ABCD, il y a entre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ une relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 3V,$$

V étant le volume du tétraèdre; cette relation est générale si l'on attribue à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des signes convenables, choisissant le signe + pour tout point à l'intérieur du tétraèdre, ce signe changeant pour $\alpha$, par exemple, quand le point M traverse le plan BCD, dont l'équation est $\alpha = 0$. Le plan de l'infini a pour équation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0.$$

Plus généralement on peut supposer que $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ désignent quatre polynomes homogènes distincts à coefficients réels ou imaginaires.

## Expression du volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées de ses sommets.

**72.** La méthode que nous allons suivre, comme celle relative à l'aire d'un triangle en Géométrie plane, est due à E. Lucas.

Considérons un tétraèdre ayant pour sommets les points A, B, C, D; nous représenterons par le symbole ABCD la mesure du volume de ce tétraèdre, affectée du signe + ou du signe —, conformément à la convention suivante.

Si un observateur placé les pieds en A, la tête en B, regarde le segment CD, il peut arriver que C soit à sa gauche et D à sa droite ou inversement (en admettant, bien entendu, que AB et CD ne soient pas dans un même plan). Dans le premier cas, on vérifie aisément qu'un observateur ayant les pieds en C et la tête en D, et regardant AB, verra A à sa gauche et B à sa droite, et cela sera le contraire dans le second cas. Nous dirons pour abréger, dans le premier cas, que le segment $\overline{CD}$ est direct par rapport à $\overline{AB}$ et, dans le second cas, que $\overline{CD}$ est *inverse*. Cela étant, ABCD est affecté du signe + si $\overline{CD}$ est direct par rapport à $\overline{AB}$ et du signe — dans le cas contraire. On reconnaît facilement que

$$ABCD = -ACBD = CABD\ldots.$$

Soient $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$; $x_4, y_4, z_4$ les coordonnées des quatre sommets donnés, et soient $x_5, y_5, z_5, \ldots, x_8, y_8, z_8$ les coordonnées de quatre autres points A′, B′, C′, D′. Représentons par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha & 1 \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta & 1 \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma & 1 \\ x_\delta & y_\delta & z_\delta & 1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remarque que le rapport des distances de deux points $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ et $(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$ au plan défini par les trois points $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$, $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ est égal à

$$\frac{(\lambda, \alpha, \beta, \gamma)}{(\mu, \alpha, \beta, \gamma)},$$

pourvu que les distances considérées soient regardées comme étant de même signe ou de signes contraires, suivant que les points $(\lambda)$ et $(\mu)$ sont d'un même côté ou de côtés différents du plan, on a successivement, en grandeur et signe,

$$\frac{ABCD}{A'BCD} = \frac{(1, 2, 3, 4)}{(5, 2, 3, 4)},$$

$$\frac{A'BCD}{A'B'CD} = \frac{(5, 2, 3, 4)}{(5, 6, 3, 4)},$$

$$\frac{A'B'CD}{A'B'C'D} = \frac{(5, 6, 3, 4)}{(5, 6, 7, 4)},$$

$$\frac{A'B'C'D}{A'B'C'D'} = \frac{(5, 6, 7, 4)}{(5, 6, 7, 8)},$$

d'où, en multipliant membre à membre, et simplifiant,

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{(1, 2, 3, 4)}{(5, 6, 7, 8)}.$$

Appliquons cette formule à un tétraèdre dont le sommet A′ soit sur $Ox$, B′ sur $Oy$, C′ sur $Oz$ et D′ à l'origine, et supposons $x_5 = +1$, $y_6 = +1$, $z_7 = +1$, les autres coordonnées de A′, B′, C′ étant nulles, de sorte que, les demi-axes positifs des coordonnées étant orientés de façon qu'un observateur placé les pieds à l'origine et la tête en un point du demi-axe positif $Oz$, voie $Ox$ à sa gauche et $Oy$ à sa droite, on aura $A'B'C'D' = -\frac{1}{6}\omega$, ce qui donne

$$ABCD = -\frac{1}{6}\omega \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Remarque.* — Cette formule justifie la condition trouvée pour que quatre points soient dans un même plan.

### Ligne droite.

73. Une ligne droite peut être considérée comme étant l'intersection de deux plans; elle sera donc définie par deux équations du premier degré

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0. \end{aligned}$$

On peut déduire de ces équations celles des projections sur chacun des plans de coordonnées faites parallèlement aux axes; savoir

$$\begin{aligned} (AB' - BA')y - (CA' - AC')z + AD' - DA' &= 0, \\ (BC' - CB')z - (AB' - BA')x + BD' - DB' &= 0, \\ (CA' - AC')x - (BC' - CB')y + CD' - DC' &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on connaît les coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ d'un point de la droite considérée, ces équations se mettent sous la forme suivante

$$(1) \qquad \frac{x - x_0}{BC' - CB'} = \frac{y - y_0}{CA' - AC'} = \frac{z - z_0}{AB' - BA'}.$$

**74.** On obtient directement ces équations de la manière suivante :

Soit OC (*fig.* 20) la parallèle à la droite AB menée par l'origine des coordonnées, et soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque M de la droite AB, $x_0$, $y_0$, $z_0$ celles d'un point déterminé A pris sur la même droite, et enfin $a$, $b$, $c$ les coordonnées d'un point quelconque D de la droite OC.

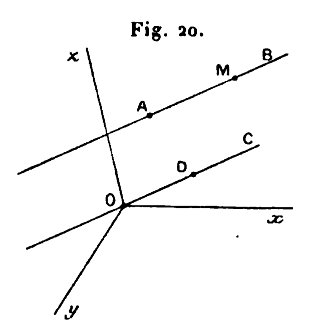


Fig. 20.

Les projections des segments parallèles $\overline{AM}$, $\overline{OD}$ sur un axe quelconque étant proportionnelles aux longueurs de ces segments, et, en outre, ces projections étant des segments de même sens ou de sens contraires, suivant que les segments $\overline{AM}$ et $\overline{OD}$ sont eux-mêmes de même sens ou de sens contraires, on a, en généralisant les calculs relatifs au plan (I, 88),

$$(2) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \rho,$$

$\rho$ désignant la mesure algébrique du rapport $\frac{\overline{AM}}{\overline{OD}}$, ce rapport étant affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que $\overline{AM}$ et $\overline{OD}$ sont de même sens ou de sens contraires. D'après cela, si le paramètre $\rho$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit la droite AB tout entière dans le sens du segment $\overline{OD}$.

Les coordonnées du point M sont donc

$$(3) \qquad x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho, \qquad z = z_0 + c\rho.$$

Le point D se nomme *point directeur* de AB; on peut prendre pour point directeur un point quelconque de OC.

Les coordonnées $a$, $b$, $c$ se nomment les *paramètres directeurs* de la droite AB. On peut les remplacer par des quantités proportionnelles; mais, dans ce cas, il importe de remarquer que si l'on écrit, par exemple,

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = r;$$

si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne sont pas des coordonnées, $r$ n'est plus nécessairement

un nombre, et l'on a $r = \lambda \frac{\overline{AM}}{\overline{OD}}$ ; si le degré d'homogénéité de $\alpha$ est égal à $n$, celui de $\lambda$, c'est-à-dire celui de $r$, sera $1-n$.

Lorsque l'on prend le segment $\overline{OD}$ pour unité de longueur, $\rho$ est la mesure algébrique du segment $\overline{AM}$, et $a, b, c$, coordonnées du point directeur D, situé à l'unité de distance de l'origine, se nomment les *paramètres principaux* de la droite AB.

75. *Cas particuliers.* — 1° Supposons que la droite donnée rencontre le plan $xOy$ au point $A(p, q, o)$; les équations de cette droite étant alors

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z}{c},$$

on en tire

$$x = \frac{a}{c}z + p, \qquad y = \frac{b}{c}z + q$$

ou bien

$$(4) \qquad x = mz + p, \qquad y = nz + q.$$

Ces équations, qui ne renferment que quatre paramètres, $m, n, p, q$, sont souvent commodes dans la résolution des problèmes.

2° Si la droite est parallèle au plan $xOy$, elle peut être évidemment représentée par des équations de la forme

$$z = h, \qquad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}.$$

Il suffit de supposer dans les formules générales $c = 0$, $z = h$, ce qui donne

$$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho, \qquad z = h$$

ou

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-h}{0},$$

en convenant que, si le dénominateur d'un des rapports est nul, on devra annuler aussi son numérateur.

D'ailleurs des équations (4) on tire

$$z = \frac{x}{m} - \frac{p}{m}, \qquad y = \frac{n}{m}x + q - \frac{np}{m}.$$

Si l'on pose

$$-\frac{p}{m} = h, \qquad \frac{n}{m} = \lambda, \qquad q - \frac{np}{m} = \mu,$$

et si l'on suppose que $h$, $\lambda$, $\mu$ restant fixes on fasse croître indéfiniment $m$, $n$, $p$, $q$, on obtient à la limite, pour toute valeur finie de $x$,

$$z = h, \qquad y = \lambda x + \mu,$$

ce qui montre que les équations (4) sont générales, pourvu qu'on attribue aux paramètres des valeurs finies ou infinies.

76. *Angle de deux droites.* — Les équations des droites $\Delta$, $\Delta'$ étant données, on connaîtra les paramètres directeurs de ces droites ou, tout au moins, on pourra déduire de ces équations des quantités proportionnelles à ces paramètres; on pourra donc calculer les angles formés par les parallèles à ces droites menées par l'origine des coordonnées.

Si les équations des deux droites sont

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \qquad \frac{x-x_1}{a'} = \frac{y-y_1}{b'} = \frac{z-z_1}{c'},$$

et si V désigne l'un de leurs angles, on a, par exemple, si les axes sont rectangulaires,

$$\cos V = \varepsilon\varepsilon' \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

Si $a$, $b$, $c$ sont les coordonnées du point directeur D de la droite $\Delta$ et $a'$, $b'$, $c'$ celles du point directeur D' de $\Delta'$, la formule précédente convient à l'angle DOD', si $\varepsilon = \varepsilon'$, et à son supplément, si $\varepsilon = -\varepsilon'$.

On a ensuite

$$\sin^2 V = \frac{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)}.$$

*Condition d'orthogonalité :*

$$aa'+bb'+cc' = 0.$$

*Conditions de parallélisme :*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

77. *Remarque.* — Quand les axes sont rectangulaires, la droite menée par l'origine et faisant avec les axes de coordonnées des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a pour équations

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

Il n'en est plus de même si les axes sont obliques; les équations de cette droite sont alors

$$\frac{x+y\cos\nu+z\cos\mu}{\cos\alpha}=\frac{x\cos\nu+y+z\cos\lambda}{\cos\beta}=\frac{x\cos\mu+y\cos\lambda+z}{\cos\gamma}.$$

78. *Déterminer la direction d'une droite orthogonale à deux droites données* $\Delta$, $\Delta'$. — Les équations des deux droites $\Delta$, $\Delta'$ étant données, on connaît les paramètres angulaires de ces droites : $a, b, c; a', b', c'$. Soient $l, m, n$ les paramètres d'une droite orthogonale à $\Delta$ et à $\Delta'$; si les axes sont rectangulaires, on a

$$la+mb+nc=0, \qquad la'+mb'+nc'=0,$$

d'où

$$\frac{l}{bc'-cb'}=\frac{m}{ca'-ac'}=\frac{n}{ab'-ba'}$$

et, par suite, si $l, m, n$ sont les paramètres principaux,

$$l=\varepsilon\frac{bc'-cb'}{R}, \qquad m=\varepsilon\frac{ca'-ac'}{R}, \qquad n=\varepsilon\frac{ab'-ba'}{R},$$

en faisant

$$R=\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}$$

Si l'on suppose les points directeurs à l'unité de distance, R est égal à $\sin V$, V désignant l'angle aigu ou obtus formé par les parallèles aux droites $\Delta$, $\Delta'$, menées par un point quelconque; et l'on peut écrire

$$l=\varepsilon\frac{bc'-cb'}{\sin V}, \qquad m=\varepsilon\frac{ca'-ac'}{\sin V}, \qquad n=\varepsilon\frac{ab'-ba'}{\sin V}.$$

Il est facile de reconnaître à quelle demi-droite correspond la détermination $\varepsilon=+1$. Pour cela, soient D et D' les points directeurs principaux de $\Delta$ et de $\Delta'$ et soit A le point ayant pour coordonnées $l, m, n$. Le tétraèdre OADD' a pour mesure

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} l & m & n \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire $\frac{1}{6}\varepsilon\sin V$; si l'on suppose $\varepsilon=+1$, le segment $\overline{OA}$ doit être dirigé de façon que $\overline{DD'}$ soit direct par rapport à $\overline{OA}$; c'est-à-dire qu'un observateur placé les pieds en O, la tête en A, verra OD à sa gauche et OD' à sa droite, de sorte qu'une rotation d'angle V qui amènerait OD en OD' doit se faire de gauche à droite.

Si les longueurs OD, OD′ n'étaient pas prises pour unité, les paramètres directeurs principaux de la normale positive $\overline{OA}$ seraient

$$l = \frac{bc' - cb'}{\mathrm{OD}\,\mathrm{OD}'\sin V}, \qquad m = \frac{ca' - ac'}{\mathrm{OD}\,\mathrm{OD}'\sin V}, \qquad n = \frac{ab' - ba'}{\mathrm{OD}\,\mathrm{OD}'\sin V}.$$

79. *Équations des bissectrices des angles formés par deux droites concourantes.* — Soient $D(a, b, c)$ et $D'(a', b', c')$ les points directeurs de deux droites données et soit $D'_1$ le symétrique de D′ par rapport à l'origine des coordonnées; soit E le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OD et OD′ et soit E′ le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OD et $OD'_1$; les coordonnées de ces points sont

$$a + \varepsilon a', \qquad b + \varepsilon b', \qquad c + \varepsilon c';$$

$\varepsilon = +1$ correspondant au point E et $\varepsilon = -1$ au point E′.

Si l'on suppose les longueurs OD et OD′ égales, les droites OE et OE′ sont les bissectrices des angles formés par OD et OD′; donc si les points D, D′ sont supposés à des distances égales de l'origine, les bissectrices des droites définies par les équations

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'}$$

sont, en vertu de ce qui précède, définies par les équations

$$\frac{x - x_0}{a + \varepsilon a'} = \frac{y - y_0}{b + \varepsilon b'} = \frac{z - z_0}{c + \varepsilon c'}.$$

Si les points D et D′ sont à des distances quelconques de l'origine, les équations des bissectrices sont

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{a}{R} + \varepsilon\dfrac{a'}{R'}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{b}{R} + \varepsilon\dfrac{b'}{R'}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{c}{R} + \varepsilon\dfrac{c'}{R'}}$$

en posant

$$R = \sqrt{\psi(a, b, c)}, \qquad R' = \sqrt{\psi(a', b', c')}.$$

80. *Coordonnées de Plücker.* — Les équations d'une droite

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

peuvent s'écrire

$$cy - bz = cy_0 - bz_0,$$
$$az - cx = az_0 - cx_0,$$
$$bx - ay = bx_0 - ay_0.$$

Si l'on pose

$$cy_0 - bz_0 = \alpha, \qquad az_0 - cx_0 = \beta, \qquad bx_0 - ay_0 = \gamma,$$

de sorte que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les déterminants déduits du tableau

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ a & b & c \end{matrix} \right\|$$

en supprimant successivement chacune des colonnes, les équations de la droite prennent la forme

$$\begin{aligned} cy - bz &= \alpha, \\ az - cx &= \beta, \\ bx - ay &= \gamma. \end{aligned}$$

Ces équations sont celles des projections de la droite sur les plans de coordonnées.

On a identiquement

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Il suffit, pour déterminer une droite, de connaître les rapports mutuels des coordonnées homogènes $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et, comme ces paramètres sont liés par l'équation précédente, on voit qu'il n'y a en réalité que quatre paramètres.

Remarquons immédiatement que l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

est vérifiée par les coordonnées de tous les points de la droite considérée; c'est donc l'équation du plan déterminé par l'origine des coordonnées et par cette droite.

*Coordonnées homogènes de la droite passant par deux points.* — Soient $x'$, $y'$, $z'$ et $x''$, $y''$, $z''$ les coordonnées cartésiennes de deux points A, B; les équations de la droite AB étant

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'},$$

on voit immédiatement qu'on peut poser

$$\begin{aligned} a &= x'' - x', & b &= y'' - y', & c &= z'' - z', \\ \alpha &= y'z'' - z'y'', & \beta &= z'x'' - x'z'', & \gamma &= x'y'' - y'x''. \end{aligned}$$

*Coordonnées homogènes de l'intersection de deux plans.* — Soient

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D &= 0 \end{aligned}$$

les équations des deux plans donnés. En éliminant successivement chacune

des variables $x$, $y$, $z$ (73), on voit qu'on peut poser

$$a = BC' - CB', \quad b = CA' - AC', \quad c = AB' - BA',$$
$$\alpha = DA' - AD', \quad \beta = DB' - BD', \quad \gamma = DC' - CD'.$$

81. *Coordonnées tétraédriques d'une droite.* — Soient

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + r_1 t = 0,$$
$$u_2 x + v_2 y + w_2 z + r_2 t = 0$$

les équations de deux plans rapportés à un tétraèdre de référence.

Si l'on pose

$$p_{1,2} = (u_1 v_2) = -p_{2,1}, \quad p_{1,3} = (u_1 w_2) = -p_{3,1}, \quad p_{1,4} = (u_1 r_2) = -p_{4,1},$$
$$p_{3,4} = (w_1 r_2) = -p_{4,3}, \quad p_{4,2} = (r_1 v_2) = -p_{2,3}, \quad p_{2,3} = (v_1 w_2) = -p_{3,2},$$

où

$$(u_1 v_2) = u_1 v_2 - u_2 v_1, \quad \text{etc.},$$

les équations des plans passant par la droite $\Delta$, intersection des deux plans donnés, et par les sommets du tétraèdre de référence, sont

$$(1) \quad \begin{cases} \phantom{p_{2,1}x + {}} p_{1,2} y + p_{1,3} z + p_{1,4} t = 0, \\ p_{2,1} x \phantom{{}+ p_{3,2}y} + p_{2,3} z + p_{2,4} t = 0, \\ p_{3,1} x + p_{3,2} y \phantom{{}+ p_{2,3}z} + p_{3,4} t = 0, \\ p_{4,1} x + p_{4,2} y + p_{4,3} z \phantom{{}+ p_{3,4}t} = 0. \end{cases}$$

Les quantités $p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{2,3}, p_{3,4}, p_{4,2}$ sont appelées les *coordonnées tétraédriques* de la droite $\Delta$ ; elles sont liées par la relation

$$(2) \quad p_{1,2} p_{3,4} + p_{1,3} p_{4,2} + p_{1,4} p_{2,3} = 0,$$

comme on s'en assure en développant par la règle de Laplace le déterminant nul

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & r_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & r_2 \\ u_3 & v_3 & w_4 & r_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & r_4 \end{vmatrix}.$$

Réciproquement, si la relation (2) est vérifiée et si l'on suppose d'une manière générale $p_{k,l} = -p_{l,k}$, les équations (1) représentent quatre plans se coupant suivant une droite commune, car, en ajoutant les premiers membres des trois dernières équations multipliés par $p_{3,4}$; $p_{4,2}$, $p_{2,3}$, on obtient identiquement zéro ; en multipliant de même par $p_{3,4}$, $p_{4,1}$ $p_{1,3}$ les premiers membres de la première et des deux dernières équations et ajoutant, on obtient encore zéro, etc.

On peut exprimer les six coordonnées tétraédriques en fonction des coor-

données $x_1, y_1, z_1, t_1$ et $x_2, y_2, z_2, t_2$ de deux points de la droite. En effet, les équations

$$p_{1,2}y_1 + p_{1,3}z_1 + p_{1,4}t_1 = 0,$$
$$p_{1,2}y_2 + p_{1,3}z_2 + p_{1,4}t_2 = 0$$

donnent

$$p_{1,2} = \lambda(z_1 t_2), \qquad p_{1,3} = \lambda(t_1 y_2), \qquad p_{1,4} = \lambda(y_1 z_2).$$

On a ensuite

$$p_{2,1}x_1 + p_{2,3}z_1 + p_{2,4}t_1 = 0,$$
$$p_{2,1}x_2 + p_{2,3}z_2 + p_{2,4}t_2 = 0,$$

d'où, en tenant compte de l'expression déjà connue de $p_{1,2}$,

$$p_{2,3} = \lambda(x_1 t_2), \qquad p_{4,2} = \lambda(x_1 z_2),$$

et l'on obtiendra de même

$$p_{3,4} = \lambda(x_1 y_2).$$

Les six coordonnées sont donc

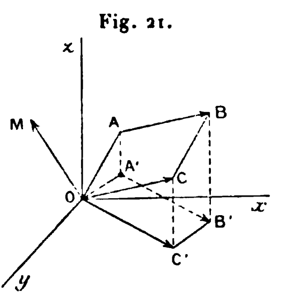
$$z_1 t_2 - t_1 z_2, \qquad t_1 y_2 - y_1 t_2, \qquad y_1 z_2 - z_1 y_2,$$
$$x_1 y_2 - y_1 x_2, \qquad x_1 z_2 - z_1 x_2, \qquad x_1 t_2 - t_1 x_2.$$

On a ainsi obtenu

$$\frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{t_1 z_2 - z_1 t_2} = \frac{u_1 w_2 - w_1 u_2}{t_1 y_2 - y_1 t_2} = \frac{u_1 r_2 - r_1 u_2}{y_1 z_2 - z_1 y_2} = \frac{w_1 r_2 - r_1 w_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$
$$= \frac{r_1 v_2 - v_1 r_2}{x_1 z_2 - z_1 x_2} = \frac{v_1 w_2 - w_1 v_2}{x_1 t_2 - t_1 x_2}.$$

82. *Moment d'un vecteur par rapport à un point. Interprétation des coordonnées de Plücker.* — Considérons trois axes rectangulaires et un vecteur $\overline{AB}$; soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du point A et $a$, $b$, $c$ celles de l'extrémité C d'un vecteur $\overline{OC}$ équipollent à $\overline{AB}$. On nomme moment du vecteur $\overline{AB}$ par rapport au point O (ou encore moment du vecteur OA par le vecteur $\overline{OC}$) un vecteur $\overline{OM}$ perpendiculaire au plan OAB, dont la longueur soit mesurée par le même nombre que l'aire du parallélogramme construit sur OA et OC; ce vecteur étant, en outre, dirigé dans un sens tel que $\overline{AB}$ soit direct par rapport à $\overline{OM}$.

Fig. 21.




Il est facile de calculer les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de l'extrémité du moment $\overline{OM}$. La droite OM (*fig.* 21) étant perpendiculaire à OA et à OC, si l'on nomme V l'angle AOC, les paramètres directeurs principaux de l'axe $\overline{OM}$ ont pour expressions (78)

$$\frac{cy_0 - bz_0}{\text{OA.OC}\sin V}, \qquad \frac{az_0 - cx_0}{\text{OA.OC}\sin V}, \qquad \frac{bx_0 - ay_0}{\text{OA.OC}\sin V};$$

mais, si $l$ désigne la longueur prise pour unité, on a

$$OM = \frac{OA.OC \sin V}{l};$$

les coordonnées du point M sont donc

$$\frac{cy_0 - bz_0}{l}, \quad \frac{az_0 - cx_0}{l}, \quad \frac{bx_0 - ay_0}{l}.$$

Si l'on projette le parallélogramme OABC sur le plan des $x, y$ on obtient un parallélogramme OA′B′C′; en appliquant les formules précédentes au vecteur A′B′, on trouve que son moment, par rapport au point O, est précisément égal à la projection de OM sur O$z$. Il résulte immédiatement de là que si l'on forme le moment de AB par rapport à un autre point de O$z$, la projection du nouveau moment sur O$z$ sera encore égale à $\gamma$.

Pour cette raison le vecteur $\bar{\gamma}$ se nomme le moment de $\overline{AB}$ par rapport à l'axe O$z$; il est égal au moment de la projection de $\overline{AB}$ sur un plan perpendiculaire à O$z$ par rapport à la trace de O$z$ sur ce plan.

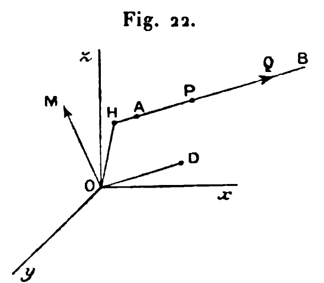
On voit que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont précisément, à un facteur constant près, trois des coordonnées homogènes de la droite AB.

83. *Coordonnées vectorielles d'une droite.* — Soient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

les équations d'une droite $\Delta$, et supposons que $a$, $b$, $c$ soient les coordonnées d'un point D (*fig.* 22); si l'on prend sur la droite $\Delta$ un vecteur $\overline{PQ}$ équipollent à $\overline{OD}$, le moment $\overline{OM}$ de PQ par rapport au point O est indépendant de la position du point P sur la droite $\Delta$; il est évident que la droite AB est entièrement déterminée dès que l'on connaît les deux vecteurs $\overline{OD}$ et $\overline{OM}$. Soit OH la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite AB; OH est perpendiculaire au plan déterminé par $\overline{OD}$ et $\overline{OM}$; d'ailleurs

Fig. 22.




$$OM \times l = OH \times OD,$$

ce qui donne

$$OH = l\frac{OM}{OD};$$

en outre, le sens dans lequel on doit mener OH est évidemment déterminé.

On peut donc regarder $\overline{OD}$ et $\overline{OM}$ comme étant les *coordonnées* vectorielles de la droite AB; les composantes de $\overline{OD}$ et de $\overline{OM}$, sur trois axes rec-

tangulaires passant par O, sont les six coordonnées de Plücker et, réciproquement, les résultantes des coordonnées de même nature sont les deux coordonnées vectorielles.

**84.** *Intersection de deux droites. Condition pour que deux droites soient dans un même plan.* — Soient

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \qquad \frac{x-x_1}{a'}=\frac{y-y_1}{b'}=\frac{z-z_1}{c'}$$

les équations de deux droites. Pour que ces droites aient un point commun, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer $\rho$ et $\rho'$ vérifiant les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_0+a\rho=x_1+a'\rho', \\ y_0+b\rho=y_1+b'\rho', \\ z_0+c\rho=z_1+c'\rho'. \end{cases}$$

La condition pour que ces équations soient compatibles est

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_0-x_1 & a & a' \\ y_0-y_1 & b & b' \\ z_0-z_1 & c & c' \end{vmatrix}=0.$$

Si cette condition est remplie et si l'un des mineurs formés avec les éléments des deux dernières colonnes du déterminant est différent de zéro, par exemple $ab'-ba'\neq 0$, les deux premières équations du système (1) déterminent les valeurs de $\rho$ et $\rho'$ qui vérifient la troisième équation, et, par suite, les deux droites données sont concourantes.

Si les éléments des deux dernières colonnes du déterminant (1) sont proportionnels, les droites données sont parallèles.

Si les éléments des deux premières colonnes sont proportionnels, les deux droites se coupent au point $(x_1, y_1, z_1)$; si la première et la troisième colonne sont proportionnelles, le point $(x_0, y_0, z_0)$ est commun aux deux droites. Enfin, si les éléments des trois colonnes sont proportionnels, les deux droites sont confondues.

La condition (2) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_0 & a & a' \\ y_0 & b & b' \\ z_0 & c & c' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a' & a \\ y_1 & b' & b \\ z_1 & c' & c \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0,$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ et $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ étant les coordonnées homogènes des deux droites.

En posant

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = f(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma),$$

cette relation peut s'écrire

$$a'\frac{\partial f}{\partial a} + b'\frac{\partial f}{\partial b} + c'\frac{\partial f}{\partial c} + \alpha'\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \beta'\frac{\partial f}{\partial \beta} + \gamma'\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

En tenant compte des relations

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \qquad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = 0,$$

l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(a + a')(\alpha + \alpha') + (b + b')(\beta + \beta') + (c + c')(\gamma + \gamma') = 0;$$

elle exprime donc que la résultante des vecteurs $\overline{OD}$ et $\overline{OD'}$ est perpendiculaire à celle des vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$, en désignant par $\overline{OD}$, $\overline{OM}$ et $\overline{OD'}$, $\overline{OM'}$ les coordonnées vectorielles des deux droites.

85. Exercice. — *Mener, parallèlement à une direction donnée, une droite qui rencontre deux droites données.* — Soient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{x - x_1}{a'} = \frac{y - y_1}{b'} = \frac{z - z_1}{c'}$$

les équations des deux droites données; si X, Y, Z sont les coordonnées d'un point de la droite cherchée et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres directeurs de cette droite, ses équations sont

$$\frac{x - X}{\alpha} = \frac{y - Y}{\beta} = \frac{z - Z}{\gamma};$$

en écrivant qu'elle rencontre les deux droites données, on obtient les équations

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & a & \alpha \\ Y - y_0 & b & \beta \\ Z - z_0 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X - x_1 & a' & \alpha \\ Y - y_1 & b' & \beta \\ Z - z_1 & c' & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

qui définissent la droite cherchée, en y regardant X, Y, Z comme des coordonnées courantes.

Si l'on remplace $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ respectivement par $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ ces équations représenteront la perpendiculaire commune aux deux droites données, en supposant les axes rectangulaires.

86. Exercice. — *Mener par un point $(x', y', z')$ une droite qui rencontre deux droites données.* — Conservons les notations précédentes; on obtiendra les équations demandées en éliminant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre les équations

$$\frac{x-x'}{\alpha} = \frac{y-y'}{\beta} = \frac{z-z'}{\gamma},$$

$$\begin{vmatrix} x_0-x' & a & \alpha \\ y_0-y' & b & \beta \\ z_0-z' & c & \gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1-x' & a' & \alpha \\ y_1-y' & b' & \beta \\ z_1-z' & c' & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

On trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} x_0-x' & a & x-x' \\ y_0-y' & b & y-y' \\ z_0-z' & c & z-z' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1-x' & a' & x-x' \\ y_1-y' & b' & y-y' \\ z_1-z' & c' & z-z' \end{vmatrix} = 0.$$

### *Intersection d'une droite et d'un plan. — Condition de parallélisme.*

87. Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = \rho$$

les équations du plan et de la droite donnés. Les coordonnées du point commun s'obtiendront en remplaçant dans les équations

$$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho, \qquad z = z_0 + c\rho,$$

$\rho$ par la valeur qu'on obtient en résolvant l'équation

$$A(x_0 + a\rho) + B(y_0 + b\rho) + C(z_0 + c\rho) + D = 0,$$

ce qui donne

$$\rho = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}.$$

Il en résulte que la condition pour que la droite soit parallèle au plan est

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

Cette condition exprime que le plan parallèle au plan donné et mené par l'origine contient le point directeur $(a, b, c)$ de la droite. On retrouve ainsi ce théorème de Géométrie élémentaire : pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut et il suffit que la paral-

lèle à la droite menée par un point de ce plan y soit contenue tout entière.

Pour que le plan donné contienne la droite donnée, il faut et il suffit que la valeur de $\rho$ soit indéterminée, c'est-à-dire que

$$Aa + Bb + Cc = 0, \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

ce qui veut dire que le plan doit être parallèle à la droite et doit en outre contenir l'un de ses points.

88. *Exprimer que trois droites partant d'un même point sont dans un même plan.* — Soient $D(a, b, c)$, $D'(a', b', c')$, $D''(a'', b'', c)$ les points directeurs des trois droites données; ces droites, partant d'un même point, par hypothèse, sont dans un même plan si les trois points directeurs et l'origine des coordonnées sont dans un même plan, et réciproquement. Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on nomme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$; $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ les angles que les droites font avec les axes de coordonnées, on reconnaît que le produit du déterminant précédent par le déterminant $\omega^2$ est égal à

$$l l' l'' \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'' & \cos\beta'' & \cos\gamma'' \end{vmatrix},$$

$l$, $l'$, $l''$ désignant les distances des points D, D′, D″ à l'origine. La condition demandée peut donc s'exprimer encore en égalant à zéro le dernier déterminant.

C'est ce que l'on reconnaît directement en remarquant que les plans perpendiculaires aux droites données, menés par l'origine, ont pour équations

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma &= 0, \\ x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' &= 0, \\ x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' &= 0, \end{aligned}$$

et pour que ces droites soient dans un même plan, il faut et il suffit que les trois plans précédents aient une droite commune.

La condition obtenue est la même en axes obliques ou en axes rectangulaires.

**89.** *Mener par un point $(x_0, y_0, z_0)$ une droite parallèle à deux plans donnés.* — Soient

$$Ax + By + Cz = 0, \qquad A'x + B'y + C'z = 0$$

les équations des deux plans; les équations

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$
$$A'(x - x_0) + B'(y - y_0) + C'(z - z_0) = 0$$

représentent la droite cherchée. On en tire

$$\frac{x - x_0}{BC' - CB'} = \frac{y - y_0}{CA' - AC'} = \frac{z - z_0}{AB' - BA'}.$$

On obtient encore ces équations en exprimant que

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

représentent une droite parallèle aux plans donnés, c'est-à-dire en posant

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$
$$Aa' + Bb' + Cc' = 0.$$

**90.** *Mener par un point $(x_0, y_0, z_0)$ un plan parallèle à deux droites données.* — Soient

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \qquad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}$$

les équations qui définissent les directions données; un plan passant par le point donné ayant pour équation

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

les coefficients A, B, C sont assujettis aux conditions

$$Aa + Bb + Cc = 0, \qquad Aa' + Bb' + Cc' = 0;$$

l'équation cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(x - x_0)(bc' - cb') + (y - y_0)(ca' - ac') + (z - z_0)(ab' - ba') = 0.$$

*Angle d'une droite et d'un plan. — Conditions d'orthogonalité.*

**91.** L'angle qu'une droite fait avec un plan est le complément de l'un des angles que cette droite fait avec la normale à ce plan. Nous savons déterminer la direction de la normale à un plan ; nous pouvons donc considérer le problème comme résolu.

Si les axes sont rectangulaires et si A, B, C sont les coefficients des variables dans l'équation du plan, $a$, $b$, $c$ étant les paramètres directeurs de la droite, on a, d'après cela, V désignant l'angle cherché,

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + Cc}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

En écrivant que $\sin V = 0$ on retrouve la condition de parallélisme ; et en posant $\sin^2 V = 1$ et appliquant la formule de Lagrange, on obtient les conditions d'orthogonalité

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

Ces équations expriment que la droite donnée est parallèle à la normale au plan.

**92.** *Équations de la perpendiculaire à un plan menée par un point donné.* — Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan et $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du point. Les équations cherchées sont (axes rectangulaires)

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

En désignant par P le premier membre de l'équation du plan, les coordonnées du pied de la perpendiculaire sont

$$x = x_0 + A\rho, \qquad y = y_0 + B\rho, \qquad z = z_0 + C\rho$$

où

$$\rho = -\frac{P_0}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

**93.** *Équation du plan perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné (axes rectangulaires).* — Si les paramètres directeurs de la droite sont $a$, $b$, $c$, le plan cherché a pour équation

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

**94.** *Équations de la perpendiculaire menée à une droite par un point* $P(x_1, y_1, z_1)$ *pris hors de cette droite.* — La perpendiculaire cherchée est l'intersection du plan perpendiculaire à la droite donnée et passant par P et du plan contenant cette droite et le plan P.

Soient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

les équations de la droite donnée $\Delta$. Un plan passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ a pour équation

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Ce plan devant contenir la droite $\Delta$, les coefficients A, B, C doivent vérifier les équations

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = 0,$$
$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

L'équation de ce plan est donc

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Le système formé par cette équation et celle-ci

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

représente la perpendiculaire abaissée de P sur $\Delta$.

## Distances.

**95.** *Distance d'un point à une droite.* — Soient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

les équations d'une droite $\Delta$ et $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées d'un point A.

Si nous abaissons de A la perpendiculaire AH à la droite BC (*fig.* 23), le triangle rectangle ABH donne

Fig. 23.

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2.$$

On peut supposer que le point B ait pour coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ et, par suite,

$$\overline{AB}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$

En second lieu, BH est la distance du point B au plan perpendiculaire à la droite BC et passant par le point A, donc

$$\overline{BH}^2 = \frac{[a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

En remplaçant $\overline{AB}^2$ et $\overline{BH}^2$ par les expressions précédentes, puis réduisant au même dénominateur et appliquant l'identité de Lagrange, on obtient, pour la distance $d$ du point A à la droite BC, la formule

$$d^2 = \frac{[c(y_1 - y_0) - b(z_1 - z_0)]^2 + [a(z_1 - z_0) - c(x_1 - x_0)]^2 + [b(x_1 - x_0) - a(y_1 - y_0)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

*Autre méthode.* — Désignons par $x, y, z$ les coordonnées du pied H de la perpendiculaire AH. On a

$$(1) \qquad d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

$$(2) \qquad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

En désignant par $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ ce que deviennent les coordonnées homogènes de la droite BC quand on remplace $x_0$, $y_0$, $z_0$ par $x_1$, $y_1$, $z_1$, on a

$$(3) \qquad c(y - y_1) - b(z - z_1) = \alpha - \alpha_1,$$

$$(4) \qquad a(z - z_1) - c(x - x_1) = \beta - \beta_1,$$

$$(5) \qquad b(x - x_1) - a(y - y_1) = \gamma - \gamma_1;$$

ajoutons membre à membre, après élévation au carré des deux membres, les équations (2), (3), (4), (5); on obtient

$$d^2(a^2 + b^2 + c^2) = (\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2 + (\gamma - \gamma_1)^2;$$

on retrouve la formule déjà obtenue.

96. *Équations de la perpendiculaire commune à deux droites. Expression de la plus courte distance (axes rectangulaires).* — Soient

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},\qquad \frac{x-x_1}{a'}=\frac{y-y_1}{b'}=\frac{z-z_1}{c'}$$

les équations de deux droites.

Le plan P mené par l'origine des coordonnées et parallèle à ces droites a pour équation

$$x(bc'-cb')+y(ca'-ac')+z(ab'-ba')=0.$$

Un plan mené par la première droite et perpendiculaire au plan P a pour équation

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

pourvu que

$$Aa+Bb+Cc=0,$$
$$A(bc'-cb')+B(ca'-ac')+C(ab'-ba')=0.$$

L'équation de ce plan est donc

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ bc'-cb' & ca'-ac' & ab'-ba' \end{vmatrix}=0.$$

De même, le plan mené par la seconde droite et perpendiculaire au plan P a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a' & b' & c' \\ bc'-cb' & ca'-ac' & ab'-ba' \end{vmatrix}=0.$$

Ces deux équations définissent une droite s'appuyant sur les deux droites données et perpendiculaire au plan P et, par suite, à ces deux droites elles-mêmes; ce sont donc les équations de la perpendiculaire commune aux deux droites données.

La longueur du segment de la perpendiculaire commune comprise entre les points où elle rencontre ces deux droites est égale à la distance du point $(x_1, y_1, z_1)$ au plan parallèle à P mené par le point $(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire à

$$\pm\frac{(x_1-x_0)(bc'-cb')+(y_1-y_0)(ca'-ac')+(z_1-z_0)(ab'-ba')}{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

On peut écrire immédiatement cette expression en remarquant que, si l'on appelle A le point ayant pour coordonnées $x_0, y_0, z_0$ et B le point ayant pour coordonnées $x_1, y_1, z_1$, la projection du segment AB sur la perpendiculaire commune est précisément égale à la plus courte distance des deux droites, et pour obtenir cette projection il suffit de faire la somme des projections des composantes $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ de AB sur une droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$.

97. *Remarque.* — Le numérateur de l'expression précédente est, au signe près, égal à

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + a\alpha' + b\beta' + c\gamma'.$$

En égalant à zéro cette expression, on obtient donc la condition pour que les droites données soient dans un même plan. Nous avons déjà obtenu cette condition, qui subsiste avec des axes obliques.

Si l'on suppose que $a$, $b$, $c$ soient les coordonnées d'un point directeur D, $a'$, $b'$, $c'$ celles d'un point D'; en posant $\overline{u} = \overline{\mathrm{OD}}$, $\overline{u'} = \overline{\mathrm{OD'}}$ et en appelant, comme plus haut, $\overline{v}$ le vecteur ayant pour composantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et $\overline{v'}$ celui qui a pour composantes $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, la plus courte distance a pour expression

$$d = \frac{\overline{u}\,\overline{v'} + \overline{v}\,\overline{u'}}{u\,u' \sin \mathrm{V}},$$

V étant l'angle des deux droites. Le produit $d \sin \mathrm{V}$ se nomme le *moment* des deux droites données; il a pour expression

$$\frac{\overline{u}\,\overline{v'} + \overline{v}\,\overline{u'}}{u\,u'},$$

$u$ et $u'$ désignant les longueurs absolues OD, OD'.

98. Exercice. — *Autres méthodes pour calculer la distance d'un point à un plan ou à une droite et la plus courte distance de deux droites.*

1° Soit $\mathbf{M}(x, y, z)$ un point du plan défini par l'équation

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0,$$

et soit $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ un point donné. Cherchons le minimum de $\overline{\mathrm{AM}}^2$. Si l'on pose

$$u = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

on peut regarder $u$ comme fonction des deux variables indépendantes $x$, $y$, car $z$ est une fonction de $x$ et de $y$ déterminée par l'équation du plan. En posant, pour simplifier,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

on a

$$\mathrm{A} + \mathrm{C}p = 0, \qquad \mathrm{B} + \mathrm{C}q = 0.$$

Or, si $u$ est minimum, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des valeurs de $p$ et de $q$,

$$C(x - x_1) - A(z - z_1) = 0,$$
$$C(y - y_1) - B(z - z_1) = 0,$$

d'où l'on tire

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0.$$

Mais

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = -P_1;$$

en désignant $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ par $P_1$. En ajoutant les carrés des premiers et des seconds membres de ces équations et, désignant par $d^2$ le minimum de $u$, on trouve

$$(A^2 + B^2 + C^2)d^2 = P_1^2.$$

2° Soient

$$x_0 + a\rho, \quad y_0 + b\rho, \quad z_0 + c\rho$$

les coordonnées d'un point M pris sur une droite donnée. La fonction

$$u = (a\rho + x_0 - x_1)^2 + (b\rho + y_0 - y_1)^2 + (c\rho + z_0 - z_1)^2$$

étant supposée minimum, on a

$$a(a\rho + x_0 - x_1) + b(b\rho + y_0 - y_1) + c(c\rho + z_0 - z_1) = 0.$$

En remplaçant $\rho$ par la valeur tirée de cette équation, on retrouve l'expression du carré de la distance du point $A(x_1, y_1, z_1)$ à la droite donnée.

On peut faire usage de l'artifice suivant :

En vertu des équations précédentes, on peut écrire

$$u = \frac{\Sigma a^2 . \Sigma(a\rho + x_0 - x_1)^2 - [\Sigma a(a\rho + x_0 - x_1)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

En appliquant l'identité de Lagrange, $\rho$ disparaît.

3° Soient enfin

$$x_0 + a\rho, \quad y_0 + b\rho, \quad z_0 + c\rho \quad \text{et} \quad x_1 + a'\rho', \quad y_1 + b'\rho', \quad z_1 + c'\rho'$$

les coordonnées de deux points M, M' pris respectivement sur deux droites données. La plus courte distance de ces deux droites est le minimum de MM'. Proposons-nous de chercher le minimum de l'expression

$$u = (x_0 - x_1 + a\rho - a'\rho')^2 + (y_0 - y_1 + b\rho - b'\rho')^2 + (c_0 - z_1 + c\rho - c'\rho')^2.$$

S'il existe des valeurs de $\rho$ et de $\rho'$ pour lesquelles ces trois carrés soient

nuls, la valeur minimum de $u$ sera nulle; mais cela ne peut arriver que si les deux droites se rencontrent. Supposons qu'il en soit autrement.

Pour chercher le minimum de $u$, on peut préalablement multiplier $u$ par une constante quelconque. Or, en vertu de l'identité de Lagrange, si nous désignons par $L^2$, $M^2$, $N^2$ les trois carrés dont la somme est représentée par $u$, on peut écrire

$$(A^2+B^2+C^2)u = (BN-CM)^2+(CL-AN)^2+(AM-BL)^2 \\ +(AL+BM+CN)^2.$$

Mais on peut déterminer A, B, C de façon que le dernier carré soit indépendant de $\rho$ et de $\rho'$, car il suffit de poser

$$Aa+Bb+Cc=0, \qquad Aa'+Bb'+Cc'=0$$

et, par suite, il suffit de faire

$$A=bc'-cb', \qquad B=ca'-ac', \qquad C=ab'-ba'.$$

Si l'on suppose ces valeurs attribuées à A, B, C, on voit que $u$ sera minimum si l'on détermine $\rho$ et $\rho'$ par les conditions

$$\frac{L}{A}=\frac{M}{B}=\frac{N}{C},$$

et le minimum cherché, c'est-à-dire le carré de la plus courte distance, aura pour expression

$$d^2=\frac{[(x_0-x_1)(bc'-cb')+(y_0-y_1)(ca'-ac')+(z_0-z_1)(ab'-ba')]^2}{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}.$$

On peut, en outre, déterminer les valeurs de $\rho$ et $\rho'$, qui correspondent aux pieds de la perpendiculaire commune; car il suffit de résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} x_0-x_1+a\rho-a'\rho'+\lambda(bc'-cb')&=0,\\ y_0-y_1+b\rho-b'\rho'+\lambda(ca'-ac')&=0,\\ z_0-z_1+c\rho-c'\rho'+\lambda(ab'-ba')&=0,\end{aligned}$$

dans lequel $\lambda$ est une inconnue auxiliaire. Le déterminant de ce système est égal, au signe près, à la somme des carrés des coefficients de $\lambda$; il est donc différent de zéro, si l'on suppose les droites données non parallèles. Si l'on nomme $x'$, $y'$, $z'$ et $x''$, $y''$, $z''$ les coordonnées des pieds de la perpendiculaire commune, on voit que les équations précédentes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} x''-x'+\lambda(bc'-cb')&=0,\\ y''-y'+\lambda(ca'-ac')&=0,\\ z''-z'+\lambda(ab'-ba')&=0.\end{aligned}$$

On en déduit que les cosinus directeurs de la perpendiculaire commune sont proportionnels aux coefficients de $\lambda$.

D'autre part, le plan mené par la seconde droite et par le point M a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a' & b' & c' \\ x_0-x_1+a\rho & y_0-y_1+b\rho & z_0-z_1+c\rho \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant les éléments de la dernière ligne par leurs valeurs

$$a'\rho'-\lambda(bc'-cb'), \quad b'\rho'-\lambda(ca'-ac'), \quad c'\rho'-\lambda(ab'-ba'),$$

on voit que le coefficient de $\rho'$ est nul, et il reste

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a' & b' & c' \\ bc'-cb' & ca'-ac' & ab'-ba' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'une des équations de la perpendiculaire commune. On retrouve l'autre par le même procédé.

## Rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans.

99. Soient .

$$P+m_1Q=0, \quad P+m_2Q=0, \quad P+m_3Q=0, \quad P+m_4Q=0$$

les équations de quatre plans passant par l'intersection des deux plans définis par les équations $P=0$, $Q=0$. On démontre, comme en Géométrie plane, que, si l'on coupe ce faisce au parune transversale qui le rencontre aux quatre points $a$, $b$, $c$, $d$, le rapport anharmonique

$$\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}$$

a pour mesure

$$\frac{m_1-m_3}{m_1-m_4}:\frac{m_2-m_3}{m_2-m_4}.$$

Cette expression est indépendante de la position de la sécante; on la nomme le *rapport anharmonique du faisceau des quatre plans*.

En particulier, les équations

$$P=0, \quad Q=0, \quad P+mQ=0, \quad P-mQ=0$$

représentent un faisceau harmonique.

Si l'on considère deux faisceaux définis par les équations

$$P+\lambda Q=0, \quad R+\mu S=0,$$

on dit que les deux faisceaux sont homographiques, si $\lambda$ et $\mu$ vérifient une équation de la forme

$$\lambda\mu + A\lambda + B\mu + C = o.$$

En supposant que R corresponde à P et S à Q, on peut disposer des coefficients des polynomes Q et S de façon que la relation homographique se réduise à $\lambda = \mu$. Sous cette forme on voit, sans calcul, que le rapport anharmonique de quatre plans du premier faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre plans correspondants du second faisceau.

Réciproquement, si le rapport anharmonique de quatre plans quelconques d'un faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre plans correspondants d'un second faisceau, ces deux faisceaux sont homographiques.

## EXERCICES.

1. Démontrer, par une transformation de coordonnées, que l'équation d'un plan est du premier degré.

2. Démontrer que l'équation du premier degré à trois variables représente un plan, en remarquant que la droite, qui passe par deux points de la surface représentée par cette équation, est tout entière contenue dans cette surface.

3. Former l'équation du plan perpendiculaire au milieu d'une droite AB, en écrivant que ce plan est le lieu des points équidistants des extrémités A et B.

4. Former l'équation du faisceau des plans bissecteurs d'un dièdre, connaissant les équations des deux faces.

5. Vérifier que si une droite AB est perpendiculaire à un plan P, tout plan parallèle à AB est perpendiculaire au plan P.

6. Les sommets A, B, C d'un triangle sont situés sur trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$; connaissant les coordonnées $(a, o, o)$, $(o, b, o)$, $(o, o, c)$ de ces sommets, trouver les coordonnées des centres des cercles inscrit ou exinscrits au triangle ABC; les coordonnées de l'orthocentre, du centre du cercle circonscrit, etc.

7. Généraliser le théorème des transversales en coupant un polygone quelconque, plan ou gauche, par un plan. Étudier, à ce point de vue, le quadrilatère gauche.

8. Vérifier que les milieux des côtés d'un quadrilatère gauche sont les sommets d'un parallélogramme.

9. Vérifier par le calcul qu'une droite est perpendiculaire à un plan quand elle fait des angles égaux avec trois droites situées dans ce plan.

10. Par trois points A, B, C en ligne droite, on mène trois parallèles qui

rencontrent un plan M en trois points P, Q, R; prouver que

$$AB.CR \pm AC.BQ \pm BC.AP = 0.$$

**11.** Prouver que, dans un trièdre : 1° les plans bissecteurs des dièdres se coupent suivant une droite, lieu des points également distants des faces; 2° les plans menés par les bissectrices des faces et perpendiculaires à leurs plans, se coupent suivant une droite, lieu des points également distants des arêtes; 3° les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées ont une droite commune. Former les équations de ces droites en coordonnées tétraédriques.

**12.** Soient A, B, C trois droites parallèles à un même plan; prouver qu'il y a une infinité de droites qui les rencontrent et que toutes ces droites sont parallèles à un même plan.

**13.** Si, par le sommet d'un angle trièdre, on mène dans chacune des faces une droite perpendiculaire à l'arête opposée à cette face, les trois droites que l'on obtient ainsi sont situées dans un même plan.

**14.** Étant donnés un triangle et trois axes fixes, qui rencontrent le plan du triangle en E, F, G, on prend sur les axes trois points fixes A, B, C (situés respectivement sur $Ox$, $Oy$, $Oz$) et l'on fait tourner autour des côtés du triangle trois plans qui rencontrent les axes en M, N, P, tels que

$$\alpha \frac{AM}{EM} + \beta \frac{BN}{FN} + \gamma \frac{CP}{GP} = \delta,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant des constantes; prouver que le point commun à ces trois plans décrit un plan.

**15.** Exprimer le volume d'un tétraèdre en fonction des longueurs de deux arêtes opposées, de leur perpendiculaire commune et de l'angle des deux arêtes.

**16.** Soient $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ deux vecteurs; on a

$$6 \text{ vol.}(ABCD) = (a + a')(\alpha + \alpha') + (b + b')(\beta + \beta') + (c + c')(\gamma + \gamma'),$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, etc. étant les coordonnées de Plücker.

**17.** Le moment de la résultante de plusieurs vecteurs issus d'un même point, par rapport à un axe, est la somme des moments des vecteurs par rapport au même axe. En conclure que le moment de la résultante, par rapport à ces points, est la résultante des moments des vecteurs par rapport au même point.

**18.** Soient $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n}$ des vecteurs quelconques; $a_k, b_k, c_k$ les composantes du vecteur $u_k$; $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ les composantes de son moment par rapport à l'origine; si l'on pose $X = \Sigma a_k$, $Y = \Sigma b_k$, $Z = \Sigma c_k$; $L = \Sigma \alpha_k$, $M = \Sigma \beta_k$, $N = \Sigma \gamma_k$, les expressions $X^2 + Y^2 + Z^2$ et $LX + MY + NZ$ conservent des

valeurs invariables quelle que soit l'origine des coordonnées et quelles que soient les directions des axes.

Le vecteur (X, Y, Z) se nomme la *résultante générale* et le vecteur (L, M, N) le *moment résultant du système donné de vecteurs.*

19. On peut choisir une infinité de points P tels que le moment résultant relatif à P soit parallèle à la résultante générale. Le lieu des points P est une droite parallèle à la résultante générale.

20. Trouver les droites de moment nul, c'est-à-dire celles relativement auxquelles la somme des moments d'un système de vecteurs est nulle.

(Pour plus de détails sur la théorie des vecteurs, voir : *Traité de Mécanique,* par P. APPELL, t. I; Paris, Gauthier-Villars. — *Leçons de Cinématique,* par G. KŒNIGS; Paris, Hermann.)

21. Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une droite avec les faces d'un tétraèdre est égal au rapport anharmonique du faisceau des quatre plans menés par cette droite et par les sommets du tétraèdre.

22. Appliquer à l'espace la théorie des centres de gravité établie en Géométrie plane (Tome I).

23. Trouver la distance d'un point P à une droite AB en prenant sur cette droite un segment AB de longueur donnée et écrivant que le carré de l'aire du triangle PAB est égale à la somme des carrés de ses projections sur les trois coordonnées.

24. Examiner ce que deviennent les équations de la perpendiculaire commune à deux droites, ainsi que la formule de leur plus courte distance, quand l'une des droites, tournant autour d'un de ses points, devient parallèle à l'autre.

25. Trouver les conditions pour que

$$x = cy + bz, \qquad y = az + cx, \qquad z = bx + ay$$

représentent une ligne droite; si la condition est remplie, les équations de cette droite sont

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}. \qquad \text{(T.)*}$$

26. Interpréter l'équation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \delta$$

de cette façon : un triangle est projeté sur trois plans rectangulaires; la somme des pyramides qui ont pour bases les trois projections et pour sommet un point du plan du triangle est équivalente à la pyramide qui a pour base le triangle et pour sommet l'origine. (T.)

---

* Les énoncés marqués de ce signe (T.) sont empruntés à un *Recueil de problèmes de Géométrie analytique* de M. TODHUNTER.

**27.** Trouver ce que représentent les équations

$$\frac{x^3+1}{x+1} = \frac{y^3+1}{y+1} = \frac{z^3+1}{z+1}. \qquad \text{(T.)}$$

**28.** Les équations d'une droite étant

$$\frac{\alpha - cy + bz}{a} = \frac{\beta - az + cx}{b} = \frac{\gamma - bx + ay}{c},$$

les mettre sous la forme canonique. Former l'équation du plan mené par l'origine et cette droite, et calculer sa distance à l'origine, ainsi que les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine. (T.)

**29.** Une droite dont on donne les équations coupe les plans de coordonnées supposés rectangulaires en trois points. Trouver les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ formés par les droites joignant l'origine à ces points. Si ces angles sont donnés, montrer que la droite décrit le plan ayant pour équation

$$x\sqrt{\operatorname{tang}\alpha} + y\sqrt{\operatorname{tang}\beta} + z\sqrt{\operatorname{tang}\gamma} = 0. \qquad \text{(T.)}$$

**30.** On mène par l'origine trois droites égales de longueur $l$, de manière que les angles de la première avec les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ soient égaux respectivement à ceux de la deuxième avec les axes $Oy$, $Oz$, $Ox$ et à ceux de la troisième avec $Oz$, $Ox$, $Oy$. On mène trois plans respectivement perpendiculaires à leurs extrémités; trouver les coordonnées de leur point d'intersection. (T.)

**31.** Un plan coupe les six arêtes d'un tétraèdre en six points; on considère sur chaque arête le conjugué harmonique de chacun de ces points par rapport aux sommets de l'arête; montrer que les six plans menés par les six nouveaux points et les arêtes opposées se coupent en un point.

**32.** Résoudre les questions relatives aux angles et aux distances en coordonnées obliques et en coordonnées tétraédriques.

**33.** Trouver les équations de la droite menée par les symétriques d'un point par rapport à deux plans.

**34.** Prouver qu'à tout système de variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ liées par une relation quadratique $\xi(x) = 0$, de discriminant non nul, on peut faire correspondre une droite déterminée de l'espace, la correspondance ayant ce caractère que l'équation $\xi(x, x') = 0$ exprime la rencontre des deux droites $x$, $x'$.

On désigne par $\xi(x, x')$ la forme polaire, c'est-à-dire

$$2\xi(x, x') = x'_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \ldots + x'_6 \frac{\partial \xi}{\partial x_6}.$$

(Voir *La Géométrie réglée*, par G. Kœnigs; Paris, Gauthier-Villars.)

# CHAPITRE IV.

## POINTS, DROITES ET PLANS IMAGINAIRES.

---

**100.** *Points imaginaires.* — Si une équation $f(x, y, z) = 0$ est vérifiée quand on pose $x = a + a'i$, $y = b + b'i$, $z = c + c'i$, nous dirons que la surface représentée par l'équation précédente passe par *le point imaginaire* ayant pour coordonnées les nombres imaginaires précédents.

Ainsi, de même qu'à un système de trois paramètres réels $a$, $b$, $c$ correspond un point réel, le point ayant pour coordonnées $a$, $b$, $c$ si ces lettres désignent des longueurs; de même si $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, $c'$ désignent des longueurs, nous dirons que $a + a'i$, $b + b'i$, $c + c'i$ sont les coordonnées d'un point imaginaire et que $a - a'i$, $b - b'i$, $c - c'i$ sont les coordonnées du point imaginaire conjugué du premier.

**101.** *Plans imaginaires; droites imaginaires.* — On appelle *plan imaginaire* l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré en $x$, $y$, $z$ à coefficients imaginaires, et *droite imaginaire* l'ensemble des solutions d'un système de deux équations du premier degré à coefficients imaginaires. On suppose, bien entendu, que les coefficients de ces équations ne soient pas les produits de coefficients réels par un même facteur imaginaire. Par opposition, si les coefficients sont réels, on dit que le plan ou la droite sont réels.

On appelle, en général, *surface imaginaire* l'ensemble des solutions d'une équation à coefficients imaginaires; mais il peut arriver qu'une équation à coefficients réels n'ait que des solutions imaginaires; nous dirons encore qu'elle représente une surface imaginaire. Une *ligne imaginaire* peut être l'intersection de deux surfaces dont

l'une au moins est imaginaire ou l'intersection de deux surfaces réelles qui n'ont aucun point commun.

**102.** Théorème. — *Dans tout plan réel ou sur toute droite réelle il y a une infinité de systèmes de deux points imaginaires conjugués.*

La démonstration est immédiate.

**103.** Théorème. — *Tout plan imaginaire passe par une droite réelle.*

En effet, l'équation d'un plan imaginaire peut se mettre sous la forme $P + iQ = 0$, P et Q étant deux polynomes à coefficients réels; le plan considéré contient la droite réelle commune aux plans P et Q. Ces plans sont d'ailleurs distincts, car si l'on supposait $Q = \lambda P$, l'équation $P + iQ = 0$ se réduirait à $P(1 + i\lambda) = 0$ ou $P = 0$ et par suite ne serait pas à coefficients imaginaires.

**104.** Corollaire. — *Deux plans imaginaires conjugués se coupent suivant une droite réelle.*

En effet, on appelle plans imaginaires conjugués deux plans dont les équations peuvent se mettre sous la forme $P + iQ = 0$ et $P - iQ = 0$. Ils ont donc en commun la droite définie par les équations $P = 0$, $Q = 0$.

**105.** Théorème. — *Il n'y a, en général, aucun point réel sur une droite imaginaire.*

En effet, les équations d'une droite imaginaire sont de la forme

$$P + iQ = 0, \qquad R + iS = 0,$$

P, Q, R, S étant des polynomes réels; les coordonnées d'un point réel appartenant à cette droite devraient vérifier les quatre équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0$$

qui n'ont pas, en général, de solutions communes.

Lorsqu'une droite imaginaire a un point réel, ce point appartient aussi à la droite imaginaire conjuguée.

**106.** *La droite qui passe par deux points imaginaires conjugués est réelle.*

En effet, si dans les équations

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}$$

on pose

$$x' = a + a'i, \qquad x'' = a - a'i, \qquad \text{etc.},$$

on obtient

$$\frac{x - a - a'i}{a'i} = \frac{y - b - b'i}{b'i} = \frac{z - c - c'i}{c'i}$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{x - a}{a'} = \frac{y - b}{b'} = \frac{z - c}{c'}.$$

Corollaire. — *Sur une droite imaginaire, on ne peut pas trouver deux points imaginaires conjugués.*

107. Théorème. — *Quand deux droites imaginaires se coupent, leur point de rencontre est réel et leur plan est réel.*

Si le point commun était imaginaire, le point conjugué serait aussi commun et les deux droites coïncideraient; en second lieu, si le plan des deux droites était imaginaire, le plan conjugué les contiendrait aussi; elles seraient donc confondues.

Corollaire. — *Dans un plan imaginaire on ne peut tracer deux droites imaginaires conjuguées.*

108. *Remarque.* — Comme nous l'avons déjà fait en Géométrie plane, nous conserverons aux expressions analytiques qui représentent des éléments géométriques, quand les lettres dont elles dépendent représentent des quantités réelles, les mêmes noms quand ces lettres représentent des imaginaires. Ainsi l'expression

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2$$

sera toujours le carré de la distance de deux points ayant pour coordonnées rectangulaires, réelles ou non, $x_0$, $y_0$, $z_0$ et $x_1$, $y_1$, $z_1$. Il peut arriver que le carré de la distance de deux points imaginaires soit positif.

Pareillement, si un point M a pour coordonnées

$$\frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \qquad \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \qquad \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda},$$

ce point est sur la droite qui joint les deux points $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et nous dirons encore que $-\lambda = \frac{MM_0}{MM_1}$, etc.

L'expression

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

s'appellera encore $\cos V$, et nous dirons que V est l'angle des directions de paramètres $a$, $b$, $c$ et $a'$, $b'$, $c'$, les axes étant rectangulaires, même si quelques-uns de ces paramètres sont imaginaires.

# CHAPITRE V.

## SPHÈRE.

**109.** On nomme *sphère* le lieu des points situés à une distance donnée d'un point fixe. La distance fixe se nomme le rayon et le point fixe le centre. Soit R le rayon d'une sphère et soient $a$, $b$, $c$ les coordonnées de son centre; son équation est

$$\psi(x - a, y - b, z - c) - R^2 = 0,$$

ou, en développant,

$$\text{(1)} \qquad \psi(x, y, z) - x\psi'_a - y\psi'_b - z\psi'_c + \psi(a, b, c) - R^2 = 0,$$

$\psi(x, y, z)$ désignant, comme nous l'avons vu, la fonction

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu.$$

Quand les axes sont rectangulaires, l'équation précédente se réduit à

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0.$$

**110.** *Conditions pour que l'équation du second degré représente une sphère.* — Soit

$$(2)\qquad \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

une équation du second degré, dans laquelle on a posé

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Pour que l'équation (2) représente une sphère, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $a$, $b$, $c$, R de façon que les premiers membres des équations (1) et (2) ne diffèrent que par un facteur constant. Les calculs et raisonnements sont les mêmes que dans les questions analogues de Géométrie plane relatives au cercle. Le coefficient de $x^2$ dans (2) étant égal à A et dans (1) à l'unité, on doit poser $A \neq 0$, puis

$$(3)\qquad \varphi(x, y, z) = A\psi(x, y, z),$$

$$(4)\qquad 2C = -A\psi'_a,$$

$$(5)\qquad 2C' = -A\psi'_b,$$

$$(6)\qquad 2C'' = -A\psi'_c,$$

$$(7)\qquad D + AR^2 = A\psi(a, b, c).$$

Si les axes sont rectangulaires, on a donc, en vertu de l'identité (3), les conditions

$$(8)\qquad A = A' = A'', \qquad B = B' = B'' = 0$$

quand les axes sont obliques :

$$(8)'\qquad A = A' = A'' = \frac{B}{\cos\lambda} = \frac{B'}{\cos\mu} = \frac{B''}{\cos\nu}.$$

Si l'on suppose ces conditions remplies, les coordonnées $a$, $b$, $c$ sont déterminées par les équations (4), (5), (6) qu'on peut écrire

$$(4)'\qquad a + b\cos\nu + c\cos\mu = -\frac{C}{A},$$

$$(5)'\qquad a\cos\nu + b + c\cos\lambda = -\frac{C'}{A},$$

$$(6)'\qquad a\cos\mu + b\cos\lambda + c = -\frac{C''}{A},$$

et dont le déterminant est différent de zéro. On peut remarquer que

les projections orthogonales du centre sur les trois axes sont déterminées; ainsi sa projection sur $Ox$ est le point ayant pour abscisse $-\frac{C}{A}$, etc.

Pour déterminer $R^2$, on multiplie les deux membres de ces équations par $-a$, $-b$, $-c$ et l'on ajoute, membre à membre avec l'équation (7); il vient

$$(9)\qquad Ca + C'b + C''c + D + AR^2 = 0.$$

Donc, en éliminant $a$, $b$, $c$ entre les équations (4)', (5)', (6)', (9) et tenant compte des relations (8)', il vient

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D + AR^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$R^2 = -\frac{H}{A\Delta},$$

H désignant le discriminant du polynome (2) et $\Delta$ celui du polynome $\varphi(x, y, z)$; mais, en vertu de l'identité (3), $\Delta = A^3\omega^2$, donc

$$R^2 = -\frac{H}{A^4\omega^2}.$$

Les conditions pour que l'équation (2) représente une sphère réelle sont donc, dans le cas général,

$$\begin{gathered} A \neq 0, \\ A = A' = A'' = \frac{B}{\cos\lambda} = \frac{B'}{\cos\mu} = \frac{B''}{\cos\nu}, \\ H < 0. \end{gathered}$$

Si $H > 0$, les coordonnées du centre sont réelles et R est imaginaire sans partie réelle.

D'après cela, l'équation générale des sphères peut se mettre sous la forme

$$A\psi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

*Convention.* — Toutes les fois que nous supposerons $A = 1$, nous représenterons par $\sigma$ le premier membre de l'équation d'une sphère.

111. *Équations d'un cercle.* — Un cercle peut être défini comme étant l'intersection d'une sphère par un plan. D'après cela, si nous représentons par $\sigma = 0$ l'équation d'une sphère et par $P = 0$ l'équation d'un plan, les équations d'un cercle seront

$$\sigma = 0, \qquad P = 0.$$

Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux paramètres variables, les équations

$$\sigma = \lambda, \qquad P = \mu$$

représentent une infinité de cercles situés dans des plans parallèles à un plan fixe, et dont les centres se trouvent sur une droite fixe perpendiculaire à ce plan; en effet, si $\lambda$ varie, le centre de la sphère représentée par l'équation $\sigma = \lambda$ reste fixe et l'on obtient le centre d'un des cercles considérés en abaissant une perpendiculaire, du centre de la sphère sur laquelle il se trouve, sur son plan.

## PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE SPHÈRE.

112. Soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées d'un point P. Une sécante menée par P coupe une sphère représentée par l'équation $f(x, y, z) = 0$, en deux points Q, R.

Si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres directeurs de la sécante, les coordonnées des points d'intersection s'obtiendront en remplaçant, dans les formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 + \gamma\rho,$$

$\rho$ par les racines de l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, \ y_0 + \beta\rho, \ z_0 + \gamma\rho) = 0.$$

Si le coefficient de $x^2$ est égal à A, le terme en $\rho^2$ a pour coefficient $A\psi(\alpha, \beta, \gamma)$, et le terme tout connu sera $f(x_0, y_0, z_0)$. On en conclut

$$\overline{PQ}.\overline{PR} = \frac{f(x_0, y_0, z_0)}{A} = d^2 - R^2,$$

$d$ étant la distance du point P au centre de la sphère. Les calculs sont les mêmes que dans le cas du cercle (I, 235).

Le produit $\overline{PQ}.\overline{PR}$, indépendant de la direction de la sécante, se nomme la *puissance du point* P par rapport à la sphère considérée. Cette puissance est positive, nulle ou négative, suivant que le point P est extérieur à la sphère, sur sa surface ou intérieur.

Le lieu des points ayant une puissance donnée par rapport à une sphère est une sphère concentrique à la première.

## PLAN RADICAL DE DEUX SPHÈRES. — INTERSECTION DE DEUX SPHÈRES.

**113.** *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères.*

En effet, si l'on représente par $\sigma(x, y, z) = 0$, $\sigma_1(x, y, z) = 0$ les équations des deux sphères, le lieu demandé a évidemment pour équation

$$\sigma(x, y, z) - \sigma_1(x, y, z) = 0,$$

ou, pour abréger,

$$\sigma - \sigma_1 = 0.$$

Pour trouver les points communs aux deux sphères données, il suffit de résoudre le système $\sigma = 0$, $\sigma - \sigma_1 = 0$. La seconde équation représentant un plan, on en conclut que l'intersection de deux sphères est un cercle.

Si l'on prend des axes rectangulaires, on vérifie immédiatement que le plan radical est perpendiculaire à la ligne des centres.

**114.** *Les plans radicaux de trois sphères, prises deux à deux, se coupent suivant une droite.*

En effet, soient $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ les équations des trois sphères données; leurs plans radicaux ont pour équations

$$\sigma - \sigma_1 = 0, \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_2 - \sigma = 0.$$

La somme des premiers membres est identiquement nulle; donc ces trois plans ont une droite commune définie par les équations

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2.$$

Cette droite, que nous nommerons l'*axe radical* des trois sphères,

est perpendiculaire au plan des centres. Si les centres sont en ligne droite, elle est, en général, rejetée à l'infini.

**115.** *Les plans radicaux de quatre sphères, prises deux à deux, ont un point commun.*

En effet, il suffit de considérer l'axe radical des trois premières sphères, défini par les équations

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

et le plan radical de la première, par exemple, et de la quatrième

$$\sigma = \sigma_3.$$

On voit que la droite et le plan ainsi obtenus se coupent au point défini par les équations

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

et qui a même puissance par rapport aux quatre sphères. C'est leur centre radical.

**116.** *Équation générale des sphères passant par l'intersection de deux sphères ou d'une sphère et d'un plan.*

Soient $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 0$, $P = 0$ les équations de deux sphères et d'un plan. L'équation générale des sphères, passant par l'intersection des deux premières, est $\sigma + \lambda\sigma_1 = 0$ ; celle des sphères passant par l'intersection de la première et du plan P est $\sigma + \lambda P = 0$. Démonstration par le procédé habituel.

117. *Cercle de l'infini.* — Deux sphères peuvent occuper les mêmes positions relatives que deux cercles situés dans un plan; elles peuvent n'avoir aucun point commun, un seul point commun qui est alors situé sur la ligne des centres, ou enfin se couper suivant un cercle. Mais, de même que deux cercles situés dans un plan ont en commun deux points imaginaires, qui appartiennent à tous les cercles tracés dans ce plan, de même toutes les sphères ont en commun un cercle imaginaire à l'infini, qu'on nomme le *cercle de l'infini.* Pour expliquer le sens de cette proposition, écrivons sous forme homogène l'équation d'une sphère quelconque

$$\psi(x, y, z) + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2 = 0.$$

Cette équation est vérifiée si l'on pose

$$t = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0.$$

Nous dirons que toute solution $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ de ce système représente un point et, comme $t_0 = 0$, nous dirons que c'est un point à l'infini. Nous avons déjà convenu de dire que $t = 0$ est l'équation d'un plan fictif nommé le *plan de l'infini*. Or, l'équation

$$\psi(x, y, z) = 0$$

n'a que des solutions imaginaires, si on laisse de côté la solution $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; d'autre part, soit $x_0, y_0$, $z_0$ une solution quelconque; l'équation est encore vérifiée si l'on pose

$$x = \lambda x_0, \qquad y = \lambda y_0, \qquad z = \lambda z_0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \lambda.$$

On convient, comme nous le savons, de dire que les équations précédentes, à coefficients imaginaires, représentent une droite imaginaire issue de l'origine et, par suite, la surface représentée par $\psi(x, y, z) = 0$ est une surface imaginaire n'ayant qu'un point réel : l'origine, et formée par des droites imaginaires issues de l'origine; c'est ce qu'on nomme un *cône,* mais un cône imaginaire. A un autre point de vue, c'est aussi une sphère ayant son centre à l'origine et son rayon égal à zéro.

D'après cela, l'ensemble des solutions du système

$$t = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

est ce que l'on nomme le *cercle de l'infini*. Le cône représenté par l'équation $\psi(x, y, z) = 0$ peut être considéré comme ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour directrice le cercle de l'infini.

Si l'on fait une transformation de coordonnées en conservant l'origine et que $x', y', z'$ désignent les nouvelles coordonnées d'un point quelconque $M(x, y, z)$, on a

$$\psi(x, y, z) = \psi(x', y', z'),$$

de sorte que le cône considéré ne change pas. Si l'on suppose les axes rectangulaires, ce cône a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Le plan $xOy$ est un plan quelconque mené par le sommet du cône; il coupe ce cône suivant les deux droites définies par le système

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 0,$$

c'est-à-dire suivant les droites isotropes issues de l'origine et tracées dans le plan $xOy$. On voit ainsi que, par un point quelconque de l'espace, on peut mener une infinité de droites isotropes, qui sont situées sur un cône déterminé ayant ce point pour sommet; nous pouvons, en effet, prendre le point considéré pour origine des coordonnées et, par suite, lui appliquer ce

qui précède. Pour cette raison, le cône représenté par l'équation $\psi(x, y, z) = 0$ se nomme le ***cône isotrope*** ayant pour sommet l'origine.

Le cône isotrope ayant pour sommet un point quelconque $(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$\psi(x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0) = 0;$$

c'est la même chose que la sphère de rayon nul ayant ce point pour centre. Cela tient à ce que la distance de deux points situés sur une droite isotrope est nulle et réciproquement.

Remarquons enfin que, si l'on fait une transformation de coordonnées, le plan de l'infini ne change pas; donc le cercle de l'infini est une courbe absolument invariable.

Toutes les sphères ont donc en commun le cercle de l'infini et, réciproquement, toute surface du second degré qui passe par le cercle de l'infini est une sphère. En effet, si l'on pose $t = 0$ dans l'équation d'une surface de second degré, on obtient

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

En d'autres termes, la courbe représentée par les équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad t = 0$$

est située sur cette surface. On voit, comme plus haut, que la première équation est celle d'un cône ayant son sommet à l'origine; pour que le plan de l'infini coupe ce cône suivant le cercle de l'infini, il faut et il suffit que

$$\varphi(x, y, z) \equiv \mathrm{A}\psi(x, y, z);$$

ce qui démontre que la surface doit être une sphère.

Cela étant, soient

$$\psi(x, y, z) + 2\mathrm{C}xt + 2\mathrm{C}'yt + 2\mathrm{C}''zt + \mathrm{D}t^2 = 0,$$
$$\psi(x, y, z) + 2\mathrm{C}_1xt + 2\mathrm{C}'_1yt + 2\mathrm{C}''_1zt + \mathrm{D}_1t^2 = 0$$

les équations de deux sphères. Les points communs à ces deux surfaces sont définis par le système de ces deux équations, que l'on peut remplacer par le système formé par la première, par exemple, et par l'équation

$$t[2(\mathrm{C} - \mathrm{C}_1)x + 2(\mathrm{C}' - \mathrm{C}'_1)y + 2(\mathrm{C}'' - \mathrm{C}''_1)z + \mathrm{D} - \mathrm{D}_1)t] = 0.$$

Or, cette dernière se décompose en deux; $t = 0$ donne le plan de l'infini et le second facteur donne le plan radical. Donc l'intersection complète de deux sphères se compose de deux cercles, dont l'un est le cercle de l'infini.

Si deux sphères sont concentriques, le second cercle se confond avec le cercle de l'infini.

118. On nomme *plan isotrope* tout plan tangent au cercle de l'infini. Supposons les axes rectangulaires et cherchons la condition pour qu'un plan,

passant par l'origine et ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

soit isotrope.

Les droites communes à ce plan et au cône isotrope

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

devant être confondues, nous avons à faire le même calcul que s'il s'agissait d'exprimer qu'une droite est tangente à une conique représentée dans un plan en coordonnées homogènes.

La condition demandée est donc

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Cela posé, soient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

les équations d'une droite isotrope et, par suite, supposons

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Soient $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les paramètres directeurs d'une seconde droite; nous appellerons *cosinus de l'angle de deux droites imaginaires* l'expression analytique formée avec les paramètres de ces droites, qui représente le cosinus de leur angle quand elles sont réelles. D'après cela, pour les deux droites que nous considérons, la formule

$$\cos V = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}$$

montre que $\cos V$ est infini. Cette conclusion n'est pas légitime si la seconde droite est parallèle au plan isotrope défini par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

et qui n'est autre chose que le plan tangent au cône isotrope mené par la droite isotrope considérée; dans ce cas, $\cos V$ est indéterminé.

La normale au plan précédent est la droite isotrope considérée elle-même; donc la perpendiculaire à un plan isotrope, menée par l'un de ses points, s'y trouve contenue tout entière.

### *Exprimer que deux sphères sont orthogonales.*

**119.** Définissons provisoirement le plan tangent en un point à une sphère, le plan perpendiculaire en ce point à l'extrémité du rayon qui y passe; nous dirons que deux sphères sont orthogonales quand les plans tangents, menés en chacun des points de leur intersection,

sont perpendiculaires. Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que

$$d^2 = R^2 + R'^2,$$

$d$ désignant la distance des centres et R, R′ les rayons des deux sphères.

En raisonnant comme dans le cas des deux cercles (I, 243), on obtient la condition

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & C \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & C' \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & C'' \\ 2C_1 & 2C'_1 & 2C''_1 & DA_1 + AD_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est linéaire par rapport aux coefficients de chacune des deux équations et réciproquement; si les coefficients variables de l'équation d'une sphère sont liés par une équation linéaire et homogène, la sphère variable représentée par cette équation est orthogonale à une sphère fixe.

**120.** *Équation de la sphère circonscrite à un tétraèdre, en coordonnées tétraédriques.*

Soient $x_i, y_i, z_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) les coordonnées des sommets A, B, C, D du tétraèdre, rapporté à trois diamètres rectangulaires de la sphère circonscrite à ce tétraèdre. Nous ferons la transformation suivante :

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4, \\ y &= \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4, \\ z &= \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 + \delta z_4, \\ t &= \alpha \quad + \beta \quad + \gamma \quad + \delta \quad , \end{aligned}$$

en substituant dans l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 t^2 = 0,$$

nous voyons immédiatement que les coefficients de $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ sont nuls et que le coefficient de $\alpha\beta$ est égal à $-2\overline{AB}^2$. Si nous désignons par $a$, $b$, $c$ les arêtes AB, AC, AD, et par $d$, $e$, $f$ les arêtes respectivement opposées aux premières CD, BD, BC, on a identiquement

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 t^2 \equiv -(a^2\alpha\beta + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\delta + f^2\beta\gamma + e^2\beta\delta + d^2\gamma\delta).$$

Le discriminant du premier membre est égal à $-R^2$, celui du second a

pour expression

$$\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & f^2 & e^2 \\ b^2 & f^2 & 0 & d^2 \\ c^2 & e^2 & d^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

D'autre part, le module de la substitution est égal à $\pm 6V$, V désignant le volume du tétraèdre; donc

$$36 R^2 V^2 = -\frac{1}{16} D,$$

D désignant le déterminant précédent. Or ce déterminant, qui a pour expression

$$a^4 d^4 + b^4 e^4 + c^4 f^4 - 2a^2 d^2 . b^2 e^2 - 2a^2 d^2 . c^2 f^2 - 2b^2 e^2 . c^2 f^2,$$

peut se mettre sous la forme

$$-(ad + be + cf)(ad + be - cf)(ad - be + cf)(-ad + be + cf)$$

et, par conséquent, si l'on pose $ad + be + cf = 2s$, on a

$$36 R^2 V^2 = s(s - ad)(s - be)(s - cf).$$

Les paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont les coordonnées barycentriques du point ayant pour coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$. L'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence a donc pour équation, en coordonnées barycentriques,

$$a^2 \alpha\beta + b^2 \alpha\gamma + c^2 \alpha\delta + f^2 \beta\gamma + e^2 \beta\delta + d^2 \gamma\delta = 0.$$

Si l'on désigne par A, B, C, D les aires des faces du tétraèdre, et par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ les coordonnées normales, il suffira de poser $\alpha = A\alpha_1$, $\beta = B\beta_1$, $\gamma = C\gamma_1$, $\delta = D\delta_1$ pour avoir l'équation de la sphère en coordonnées normales. En ajoutant au premier membre de l'équation trouvée l'expression

$$(A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 + D\delta_1)(h\alpha_1 + k\beta_1 + l\gamma_1 + m\delta_1),$$

on aura l'équation d'une sphère quelconque.

*Remarque.* — On appelle quelquefois *triangle adjoint à un tétraèdre* le triangle dont les côtés ont pour mesures *ad*, *be*, *cf*. Si l'on désigne par S l'aire de ce triangle, on a

$$36 R^2 V^2 = S^2.$$

Si les quatre points A, B, C, D sont sur un cercle, R doit être indéterminé, on a $V = 0$, donc $S = 0$, c'est-à-dire

$$ad \pm be \pm cf = 0.$$

C'est le théorème de Ptolémée. Réciproquement, si cette relation a lieu,

$RV = 0$. Alors, ou bien les quatre points sont dans un même plan sur un cercle, ou bien ils ne sont pas dans un même plan; dans ce dernier cas $V \neq 0$, donc $R = 0$; ils sont donc alors sur une même sphère de rayon nul. (Cours de M. G. Darboux, à la Sorbonne, 1890-91.)

## Inversion.

**121.** Soient O un point fixe et M un point variable; si l'on prend sur OM un point M' tel que $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$, $k$ étant une constante positive ou négative ($k = \pm a^2$, $a$ désignant une longueur), on dit que la figure décrite par M' est l'inverse de la figure décrite par M, par rapport au point O, qu'on nomme le *pôle d'inversion*.

Si l'on prend trois axes rectangulaires, issus du point O, et si l'on désigne par $x$, $y$, $z$ les coordonnées de M et par $x'$, $y'$, $z'$ celles de M', on a

$$\frac{x}{x'} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{k}{\overline{OM'}^2} = \frac{k}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

ou

$$x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

et de même

$$y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad z = \frac{kz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Donc si le point M décrit une surface ayant pour équation $f(x, y, z) = 0$, le lieu de M' sera aussi une surface définie par l'équation

$$f\left(\frac{kx}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{ky}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{kz}{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0.$$

Il en résulte immédiatement que si M décrit une ligne, intersection de deux surfaces, M' décrit aussi une ligne, intersection des deux surfaces respectivement inverses des premières.

L'inverse d'un plan est une sphère passant par le pôle d'inversion, et réciproquement; en effet, pour plus de simplicité, prenons pour axe des $x$ la perpendiculaire au plan menée par le pôle; l'équation de ce plan étant $x = a$, son inverse a pour équation

$$kx = a(x^2 + y^2 + z^2).$$

Réciproquement, on peut mettre l'équation d'une sphère passant par le pôle sous la forme précédente et, par suite, son inverse est un plan perpendiculaire au diamètre passant par ce pôle.

L'inverse d'une sphère quelconque est une sphère ne passant pas par le pôle. Démonstration immédiate.

L'inverse d'un cercle est un cercle; car un cercle peut être défini comme l'intersection de deux sphères.

Si l'on considère deux points M', M" correspondant à deux valeurs différentes de la puissance d'inversion $k$, $k'$, on a

$$\overline{\mathrm{OM}}.\overline{\mathrm{OM}'} = k, \qquad \overline{\mathrm{OM}}.\overline{\mathrm{OM}''} = k',$$

donc

$$\frac{\overline{\mathrm{OM}''}}{\overline{\mathrm{OM}}} = \frac{k'}{k}$$

et, par suite, M" et M' décrivent des figures homothétiques par rapport au point O. On a alors

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{k'}{k}.$$

## EXERCICES.

1. Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

2. Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à des points fixes soit constante, chaque carré étant multiplié par un coefficient constant.

3. Lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les faces d'un tétraèdre soient dans un même plan.

4. Lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les faces d'un tétraèdre forment un tétraèdre de volume constant.

5. Déterminer les coordonnées des centres de similitude de deux sphères.

6. Étant données quatre sphères, six centres de similitude de ces sphères prises deux à deux, convenablement choisis, sont dans un même plan. Le nombre total de ces plans est égal à 8. Former leurs équations.

7. Former l'équation de la sphère qui passe par les sommets d'un tétraèdre connaissant les coordonnées rectilignes des sommets.

8. Former l'équation de la sphère circonscrite à un triangle et dont le centre est dans le plan de ce triangle, connaissant les coordonnées des sommets du triangle. Cas particulier : les sommets du triangle sont sur les axes de coordonnées.

9. Déterminer une sphère tangente à quatre plans. Calculer les rayons des sphères.

10. Déterminer une sphère tangente à quatre sphères. (Voir *Leçons de l Agrégation*, par M. G. Kœnigs.)

11. Trouver le lieu des points de contact des sphères tangentes à trois

sphères données. — On pourra, à l'aide d'une inversion, remplacer une des sphères données par un plan.

12. Lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données suivant des grands cercles.

13. Lieu des centres des sphères qui coupent trois sphères données suivant des grands cercles.

14. Lieu des centres des sphères qui coupent orthogonalement deux sphères données.

15. Lieu des centres des sphères qui coupent orthogonalement trois sphères données.

16. Former l'équation de la sphère qui coupe orthogonalement quatre sphères données.

17. Trouver le rayon de la sphère de centre donné qui coupe une droite $\Delta$ en deux points A, B et une droite $\Delta'$ en deux points A', B', de sorte que le tétraèdre AB A'B' soit équivalent à un cube donné.

18. Si, sur une sphère de rayon pris pour unité, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées $x$, $y$, $z$ de tout point de cette ligne, la relation

$$\begin{aligned}(x'^2+y'^2+z'^2)\,[(xy''-yx'')^2+(yz''-zy'')^2+(zx''-xz'')^2]\\ =(x'x''+y'y''+z'z'')^2+[x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'z'')+z(x'y''-y'x'')]^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les accents des dérivées sont relatifs à une variable indépendante. (E. Catalan.)

19. Étant données trois sphères, on peut leur mener huit plans tangents communs, deux extérieurs, six intérieurs.

La somme algébrique des distances d'un point quelconque aux deux plans extérieurs est égale à la somme algébrique des distances de ce point aux six plans intérieurs. (Stoll.)

20. Aux faces d'un tétraèdre ayant un sommet commun A on circonscrit trois sphères égales. Démontrer que les plans tangents aux points diamétralement opposés à A se coupent sur la corde commune aux trois sphères.

# CHAPITRE VI.

## COURBES GAUCHES : TANGENTE, PLAN OSCULATEUR, COURBURES.

---

### Équations de la tangente à une courbe.

**122.** Considérons une courbe quelconque; on peut la définir au moyen de deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0,$$

d'où il résulte que les coordonnées $x$, $y$ d'un quelconque de ses points peuvent être regardées comme des fonctions de $z$; et, par suite, si l'on fait un changement de variables en posant $z = \psi(t)$, les deux autres coordonnées deviendront des fonctions de la nouvelle variable $t$; en définitive, les trois coordonnées $x$, $y$, $z$ seront des fonctions de $t$ :

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Réciproquement, un pareil système d'équations définit une courbe, car les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

définissent un cylindre parallèle à l'axe des $z$, et les équations

$$x = f(t), \qquad z = \psi(t)$$

définissent un second cylindre parallèle à l'axe des $y$; l'intersection de ces deux cylindres est le lieu représenté par le système considéré.

Cela étant, soient M et M' deux points de la courbe, correspondant à des valeurs $t$ et $t + \Delta t$ du paramètre; la sécante MM' a pour équations

$$\frac{x - f(t)}{f(t+\Delta t) - f(t)} = \frac{y - \varphi(t)}{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)} = \frac{z - \psi(t)}{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)};$$

les paramètres de la sécante MM' sont proportionnels à

$$f'(t+\theta\Delta t), \quad \varphi'(t+\theta\Delta t), \quad \psi'(t+\theta\Delta t) \qquad (0<\theta<1).$$

Ces expressions ont pour limites respectivement

$$f'(t), \quad \varphi'(t), \quad \psi'(t).$$

La droite ayant pour équations

$$\frac{x-f(t)}{f'(t)} = \frac{y-\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{z-\psi(t)}{\psi'(t)}$$

est la *tangente* en M à la courbe donnée.

On peut remarquer que la projection de la courbe donnée sur le plan $xOy$ étant définie par les équations $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, on vérifie ainsi que la projection d'une tangente est tangente à la projection de la courbe.

On peut encore écrire ces équations sous la forme suivante :

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes et $x, y, z$ celles du point M.

On voit ainsi que les coordonnées d'un point quelconque de la tangente sont de la forme

$$x+\lambda\frac{dx}{dt}, \quad y+\lambda\frac{dy}{dt}, \quad z+\lambda\frac{dz}{dt}.$$

La tangente en M n'est déterminée que si les dérivées $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ne sont pas nulles toutes les trois.

Si la courbe est définie comme intersection de deux surfaces, par les équations

$$f(x, y, z)=0, \qquad f_1(x, y, z)=0,$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz=0$$

et les équations de la tangente en $M(x, y, z)$ sont

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial z}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x}}$$

ou encore

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$(X-x)\frac{\partial f_1}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f_1}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial z_1}{\partial z}=0.$$

### *Plan normal.*

**123.** *On nomme plan normal en un point d'une courbe le plan perpendiculaire à la tangente au point de contact.*

Si les axes sont rectangulaires, l'équation de ce plan est

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0$$

ou, si l'on veut,

$$[X-f(t)]f'(t)+[Y-\varphi(t)]\varphi'(t)+[Z-\psi(t)]\psi'(t)=0.$$

Quand la courbe est déterminée par deux équations, comme plus haut, en éliminant $dx$, $dy$, $dz$ entre l'équation du plan normal et les équations obtenues en différentiant les deux équations données, on met l'équation du plan normal sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

### Longueur d'un arc de courbe.

**124.** Si l'on considère un arc de courbe AB et deux points M, M' de cet arc ayant pour coordonnées $x$, $y$, $z$ et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, la corde MM' a pour longueur

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

ou

$$\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2},$$

en supposant les axes rectangulaires. Si l'on inscrit dans l'arc AB une brisée dont chaque côté ait pour limite zéro, les extrémités de cette brisée étant A et B, ou du moins ayant pour limites les extrémités fixes A et B de l'arc

considéré; en répétant les mêmes raisonnements que dans le cas d'une courbe plane, on démontre que le périmètre de la brisée a une limite ayant pour expression

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

$x_0$ et $x_1$ étant les abscisses de A et B, en supposant que, si un point M parcourt l'arc AB, l'abscisse de ce point va en croissant de $x_0$ à $x_1$. Cette limite, indépendante de la nature de la brisée dont tous les côtés sont seulement assujettis à tendre vers zéro, se nomme la *longueur de l'arc* AB. Si M est un point variable de l'arc AB, la longueur de l'arc AM est une fonction de $x$ que nous représenterons par $s$, de sorte que

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

et l'on en conclut

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Le rapport de l'arc MM' ou $\Delta s$ à la corde MM' a pour limite 1, quand MM' tend vers zéro, car

$$\frac{\text{MM}'}{\Delta s} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}{\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)}.$$

Or, le numérateur et le dénominateur ont la même limite quand $\Delta x$ tend vers zéro.

125. *Application aux tangentes.* — Si l'on nomme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que la tangente en M fait avec les trois axes des coordonnées, on a

$$\frac{\cos\alpha}{dx} = \frac{\cos\beta}{dy} = \frac{\cos\gamma}{dz} = \frac{\varepsilon}{ds},$$

$\varepsilon$ étant égal à $+1$ ou à $-1$, et $ds$ étant la différentielle de l'arc $s$, qui correspond à un accroissement $dt$ de la variable indépendante. Si l'on prend $\varepsilon = +1$, on a

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

et, par suite, $\alpha$ est aigu ou obtus suivant que $s$, regardée comme fonction de $x$, est une fonction croissante ou décroissante. Si l'on considère un mobile M décrivant l'arc AB, si ce mobile prend deux positions infiniment voisines M, M', qui correspondent à deux valeurs $t$ et $t + \Delta t$ du paramètre, le point M' est d'un côté déterminé du plan normal en M; si l'origine des arcs est placée de façon que l'arc $s$ croisse avec la variable $t$, on voit que $\varepsilon = +1$ correspond

à la demi-droite $\overline{\mathrm{MT}}$ portée sur la tangente en M, qui est dirigée relativement au plan normal en M, du même côté que M', c'est-à-dire *dans le sens du mouvement.*

Lorsque la variable indépendante est le temps, un segment égal à $\frac{ds}{dt}$ et porté sur la demi-tangente MT est la vitesse $v$, et l'on a

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = v\cos\beta, \qquad \frac{dz}{dt} = v\cos\gamma.$$

Ces expressions sont les *composantes* de la vitesse respectivement parallèles aux axes, et

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

*Autre définition de la tangente.*

126. On peut définir la tangente à une courbe de la manière suivante. Soient

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

les équations d'une droite menée par un point $M(x, y, z)$ d'une courbe; le carré de la distance à cette droite du point $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ a pour expression

$$\frac{(b\,\Delta x - a\,\Delta y)^2 + (c\,\Delta y - b\,\Delta z)^2 + (a\,\Delta z - c\,\Delta x)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Or, en appelant $x', y', z'$; $x'', y'', z''$, ... les dérivées de $x$, $y$, $z$ par rapport à la variable indépendante $t$, le numérateur a pour expression

$$\left[(bx'-ay')\,\Delta t + \frac{1}{2}(bx''-ay'')\,\Delta t^2 + \ldots\right]^2 + \ldots.$$

On voit ainsi que la distance considérée est du premier ordre par rapport à $\Delta t$, à moins que l'on n'ait

$$\frac{a}{x'} = \frac{b}{y'} = \frac{c}{z'},$$

et, dans ce cas, la distance est au moins du second ordre; elle est du troisième ordre si l'on a, en outre,

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'}.$$

La tangente en M peut donc être définie comme étant une droite telle que la distance d'un point M' de la courbe infiniment voisin de M à cette droite soit infiniment petite, du second ordre au moins, la distance MM' étant re-

gardée comme étant du premier ordre; il faut, en effet, remarquer que $\frac{MM'}{\Delta t}$ a pour limite $\frac{ds}{dt}$ ou $v$.

*Remarque.* — Si l'on a constamment

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'},$$

on en déduit

$$\frac{d \log x'}{dt} = \frac{d \log y'}{dt} = \frac{d \log z'}{dt},$$

d'où, en intégrant deux fois, $x_0$, $y_0$, $z_0$ et $a$, $b$, $c$ étant des constantes,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad \ldots, \quad \text{etc.}$$

127. Application. — *Étant données les coordonnées rectangulaires $x_0$, $y_0$, $z_0$ d'un point $M_0$ et les équations*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

*d'une droite $\Delta$, on fait tourner le point $M_0$ d'un angle $\alpha$ autour de $\Delta$ et l'on demande les coordonnées du point $M_1$ avec lequel $M_0$ vient coïncider après cette rotation.*

Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du point C de rencontre de l'axe $\Delta$ avec le plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par M, de sorte que C est le centre du cercle que décrit le point $M_0$; posons

$$x = x' + X, \quad y = y' + Y, \quad z = z' + Z,$$
$$x_0 = x' + X_0, \quad y_0 = y' + Y_0, \quad z_0 = z' + Z_0,$$

ce qui revient à prendre le point C pour origine. Si l'on nomme $s$ l'arc de cercle compté à partir de $M_0$ que décrit le point mobile, les cosinus directeurs de la tangente en un point M du cercle sont $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$. D'autre part, la tangente étant perpendiculaire au rayon OM et à la droite $\Delta$, on a, en supposant le sens positif de rotation autour de cette droite convenablement choisi (111, 78) et en appelant $r$ le rayon du cercle,

$$\frac{dX}{ds} = \frac{bZ - cY}{r}, \quad \frac{dY}{ds} = \frac{cX - aZ}{r}, \quad \frac{dZ}{ds} = \frac{aY - bX}{r}.$$

On en déduit

$$\frac{d^2X}{ds^2} = \frac{1}{r}\left(b\frac{dZ}{ds} - c\frac{dY}{ds}\right) = \frac{1}{r^2}[a(aX + bY + cZ) - (a^2 + b^2 + c^2)X].$$

Pour simplifier, supposons $a^2+b^2+c^2=1$; d'autre part, le plan du cercle étant perpendiculaire à $\Delta$, on a $aX+bY+cZ=0$; donc enfin

$$\frac{d^2X}{ds^2}=-\frac{X}{r^2}.$$

De même

$$\frac{d^2Y}{ds^2}=-\frac{Y}{r^2}, \qquad \frac{d^2Z}{ds^2}=-\frac{Z}{r^2}.$$

(Ces formules sont évidentes si l'on sait que l'accélération dans le mouvement circulaire uniforme est dirigée vers le centre.) On déduit des équations précédentes

$$X=A\cos\frac{s}{r}+B\sin\frac{s}{r}, \qquad Y=A'\cos\frac{s}{r}+B'\sin\frac{s}{r}, \qquad Z=A''\cos\frac{s}{r}+B''\sin\frac{s}{r},$$

A, B, A', B', A'', B'' étant des constantes arbitraires (*voir*, par exemple, *Cours d'Algèbre*, t. II, p. 164). Or, si $s=0$, le point M est en $M_0$; donc

$$A=X_0, \qquad A'=Y_0, \qquad A''=Z_0.$$

En second lieu,

$$\frac{dX}{ds}=-\frac{1}{r}X_0\sin\frac{s}{r}+\frac{1}{r}B\cos\frac{s}{r}.$$

Si $s=0$,

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)_0=\frac{1}{r}B=\frac{bZ_0-cY_0}{r},$$

ce qui donne B; on calcule de même B' et C'' et, par suite, si $\frac{s}{r}=\alpha$ on a pour le point $M_1$

$$X=X_0\cos\alpha+(bZ_0-cY_0)\sin\alpha,$$
$$Y=Y_0\cos\alpha+(cX_0-aZ_0)\sin\alpha,$$
$$Z=Z_0\cos\alpha+(aY_0-bX_0)\sin\alpha;$$

on en déduira facilement $x, y, z$.

## Plan osculateur.

**128.** Soit M un point d'une courbe correspondant à une valeur $t$ du paramètre et soient M' et M'' deux points correspondant à des valeurs $t+h_1$, $t+h_1+h_2$; si l'on suppose que $h_1$ et $h_2$ soient des infiniment petits du même ordre, le plan MM'M'' tend vers un plan limite déterminé quand $h_1$ et $h_2$ tendent vers zéro, et ce plan limite se nomme *le plan osculateur en* M.

En effet, l'équation d'un plan mené par M est de la forme

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Si l'on nomme $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, $\Delta_1 z$ les accroissements de $x, y, z$ qui correspon-

dent à l'accroissement $h_1$ et $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$, $\Delta_2 z$ ceux qui correspondent à $h_1 + h_2$, on exprime que ce plan passe par M' et par M″ en posant

$$A\Delta_1 x + B\Delta_1 y + C\Delta_1 z = 0,$$
$$A\Delta_2 x + B\Delta_2 y + C\Delta_2 z = 0.$$

On aura donc, à la limite (II, p. 24)

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

et, par suite, l'équation du plan osculateur en M est

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0;$$

ce qu'on peut écrire encore

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

**129.** Le plan osculateur peut être défini autrement : en effet, le *plan mené par la tangente en* M *et parallèle à la tangente en* M' *a pour limite le plan osculateur en* M, *quand* M' *vient se confondre avec* M.

Effectivement, soit

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

l'équation d'un plan passant par M. Ce plan contiendra la tangente en M et sera parallèle à la tangente en M' si A, B, C vérifient les conditions

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$
$$A(x' + \Delta x') + B(y' + \Delta y') + C(z' + \Delta z') = 0.$$

Cette dernière équation peut être remplacée par celle-ci

$$A\frac{\Delta x'}{\Delta t} + B\frac{\Delta y'}{\Delta t} + C\frac{\Delta z'}{\Delta t} = 0,$$

qui, à la limite, devient

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

En éliminant A, B, C on retrouve bien l'équation du plan osculateur en M. Enfin, on peut encore définir ce plan comme étant la limite du plan mené par la tangente en M et par le point M', quand M' tend vers M, car on devra

écrire

$$A\Delta x' + B\Delta y' + C\Delta z' = 0,$$

ce qui donne, à la limite, le même résultat que plus haut.

La propriété caractéristique du plan osculateur est la suivante : si l'on calcule la distance d'un point M' à un plan P, mené par M, la corde MM' étant regardée comme étant l'infiniment petit principal, cette distance est un infiniment petit de l'ordre le plus élevé possible quand le plan P est le plan osculateur en M. En effet, la valeur absolue de la distance de M' au plan P défini par l'équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

ayant, pour expression, au signe près,

$$\frac{A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(Ax' + By' + Cz')\,\Delta t + (Ax'' + By'' + Cz'')\,\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

cette distance est du second ordre si

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

c'est-à-dire si le plan contient la tangente en M ; elle est du troisième ordre, si, en outre,

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Donc la distance considérée est de l'ordre le plus élevé possible si le plan P est le plan osculateur ; c'est, d'ailleurs, cette propriété qui lui a fait donner son nom.

130. *Le plan osculateur d'une courbe plane est le plan de cette courbe ;* cela est évident géométriquement, puisque le plan MM'M'', déterminé par trois points quelconques de la courbe, n'est autre que le plan de la courbe même. On le vérifie aisément par le calcul. Soit, en effet,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan de la courbe, l'équation du plan osculateur peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) \\ x' & y' & Ax' + By' + Cz' \\ x'' & y'' & Ax'' + By'' + Cz'' \end{vmatrix} = 0$$

et se réduit, par suite, à

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

ou

$$AX+BY+CZ+D=0,$$

car les éléments de la dernière colonne du déterminant sont identiquement nuls, à l'exception du premier, et le coefficient $x'y''-y'x''$ doit être supposé différent de zéro, car, si l'on avait identiquement $x'y''-y'x''=0$, on en déduirait $y'=ax'$ et, par suite, $y=ax+b$, $a$ et $b$ étant deux constantes, ce qu'on ne peut supposer si l'on fait l'hypothèse $C\neq 0$, car la courbe se réduirait alors à une droite.

*Réciproquement, si le plan osculateur est fixe, ou seulement s'il reste parallèle à un plan fixe, la courbe est plane.*

En effet, si l'on suppose

$$y'z''-z'y''=\lambda A,\qquad z'x''-x'z''=\lambda B,\qquad x'y''-y'x''=\lambda C,$$

A, B, C étant des constantes, on en tire

$$Ax'+By'+Cz'=0,$$

d'où, en intégrant,

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

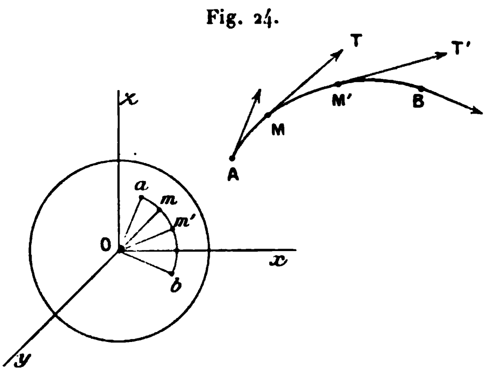
D étant une nouvelle constante.

## Courbures.

131. Considérons une courbe rapportée à trois axes rectangulaires, et soient M un point de cette courbe, M' un point infiniment voisin et enfin MT, M'T' les demi-tangentes tracées dans le sens du mouvement.

Considérons une sphère ayant pour centre un point quelconque, par exemple l'origine des coordonnées, et menons des rayons $Om$, $Om'$ parallèles aux demi-droites MT, M'T'. Quand M décrit l'arc AMB, le point $m$ décrit un arc de courbe sphérique $amb$, qu'on nomme l'*indicatrice sphérique de la courbe donnée* (*fig.* 24).

Fig. 24.




L'angle $mOm'$ est mesuré par un arc de grand cercle ayant pour extrémités les points $m$ et $m'$. Or l'arc de grand cercle considéré et l'arc de courbe

sphérique décrit par $m$ sont des infiniment petits respectivement équivalents à leur corde commune $\overline{mm'}$ : donc leur rapport a pour limite 1. Cela étant, si l'on désigne par $\theta$ l'*angle de contingence*, c'est-à-dire l'angle des demi-tangentes MT, M'T', on nomme *courbure moyenne au point* M de l'arc MM' le quotient $\frac{\theta}{\text{arc MM}'}$; et *courbure* en M la limite de ce rapport. D'après cela, si l'on désigne par $s$ l'arc AM et par $\sigma$ l'arc $am$, on voit que la courbure en M de l'arc AB a pour mesure $\frac{d\sigma}{ds}$. On nomme *rayon de courbure* au point M le rapport inverse, et l'on pose $R = \frac{ds}{d\sigma}$.

Pour calculer R en fonction des coordonnées du point M, remarquons que les coordonnées de $m$ sont les cosinus directeurs de MT, c'est-à-dire $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ et, par suite,

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}$$

ou

$$d\sigma = \sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2};$$

mais

$$d\,\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}.$$

D'autre part,

$$\Sigma(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] + ds^2(d^2s)^2 - 2\,ds\,d^2s(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z).$$

En différentiant l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

on obtient

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s$$

et, en substituant dans la somme précédente, il vient

$$\Sigma(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2],$$

et enfin

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Si l'on prend l'arc pour variable indépendante, cette formule donne

$$\frac{1}{R} = [x''^2 + y''^2 + z''^2]^{\frac{1}{2}}.$$

**132.** Considérons le plan normal en M et le plan normal en M'. Si l'on suppose que les coordonnées de M soient des fonctions d'un paramètre $t$, on

peut représenter le premier par $F(t) = 0$ et le second par $F(t+\Delta t) = 0$. L'intersection de ces deux plans sera définie par les équations

$$F(t) = 0, \qquad F(t+\Delta t) = 0,$$

ou, si l'on veut, par

$$F(t) = 0, \qquad \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = 0 :$$

donc, l'intersection de ces deux plans a pour limite, quand M′ se confond avec M, la droite définie par les deux équations

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0$$

ou

$$(1) \qquad (X-x)x' + (Y-y)y' + (Z-z)z' = 0,$$

$$(2) \qquad (X-x)x'' + (Y-y)y'' + (Z-z)z'' - s'^2 = 0.$$

La droite DE ainsi obtenue est perpendiculaire au plan osculateur, puisque ses cosinus directeurs sont proportionnels aux déterminants

$$y'z'' - z'y'', \qquad z'x'' - x'z'', \qquad x'y'' - y'x''.$$

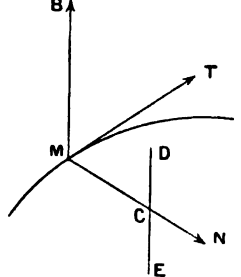
Si l'on prend l'arc $s$ pour variable indépendante, l'équation (2) représente un plan perpendiculaire au plan normal en M, car on a, dans ce cas,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1;$$

d'où, en prenant la dérivée par rapport à $s$,

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Fig. 25.




Cherchons les coordonnées du point C, intersection de la droite DE avec le plan osculateur en M (*fig.* 25), qui a, comme nous le savons, pour équation

$$(3) \quad (X-x)(y'z'' - z'y'') + (Y-y)(z'x'' - x'z'') + (Z-z)(x'y'' - y'z'') = 0.$$

Le déterminant du système formé par les équations (1), (2) et (3) est égal à

$$(y'z'' - z'x'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (z'y'' - y'x'')^2,$$

c'est-à-dire

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 - y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$

ou

$$s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2).$$

En second lieu

$$\begin{vmatrix} 0 & y' & z' \\ s'^2 & y'' & z'' \\ '' & z'x'' - x'z'' & x'y'' - y'x'' \end{vmatrix} = s'^2[x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')] = s'^2(s'x'' - x's''),$$

donc

$$X - x = s' \frac{s'x'' - x's''}{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}.$$

Pareillement

$$Y - y = s' \frac{s'y'' - y's''}{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2},$$

$$Z - z = s' \frac{s'z'' - z's''}{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}.$$

On en déduit

$$\overline{MC}^2 = R^2.$$

Le point C se nomme le centre de courbure, et le cercle ayant pour centre C, pour rayon R et décrit dans le plan osculateur en M se nomme le cercle de courbure relatif au point M.

133. *Normale principale, binormale.* — Toute droite menée par M et perpendiculaire à la tangente en M à la courbe considérée est une normale à cette courbe. On peut donc mener, par chaque point d'une courbe, une infinité de droites normales, en ce point, à cette courbe; parmi toutes ces normales, il y en a deux que l'on distingue plus particulièrement, ce sont: 1° celle qui passe par le centre de courbure; on l'appelle la *normale principale;* elle est l'intersection du plan osculateur et du plan normal en M, et 2° celle qui est perpendiculaire au plan osculateur et qu'on nomme la *binormale.* La tangente en M, ou mieux la demi-tangente MT, la demi-normale MC dirigée de M vers le centre de courbure, et la binormale MB, constituent un trièdre. On peut choisir le sens de la binormale de façon que ce trièdre soit orienté comme le trièdre des axes. L'étude du déplacement de ce trièdre de référence, mobile avec son sommet qui décrit la courbe, est liée intimement à la nature de cette courbe; cette étude se fait en *Cinématique.* (*Voir*, par exemple : *Leçons de Cinématique,* par G. Kœnigs. Paris, Hermann. — Consulter aussi : *Leçons sur la théorie générale des surfaces;* chap. Ier, t. Ier; par G. Darboux. Paris, Gauthier-Villars.)

Nous allons déterminer les cosinus directeurs des arêtes de ce trièdre. Nous connaissons déjà ceux de la demi-tangente MT, qui ont pour expressions

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Le plan osculateur en M est parallèle au plan déterminé par le rayon O$m$ de la sphère que nous avons considérée plus haut, et par la tangente en $m$ à l'indicatrice sphérique, puisque le plan $m$O$m'$ est parallèle au plan mené par MT parallèlement à M'T'. Il en résulte que la tangente en $m$ à l'indicatrice est parallèle à la normale principale en M; donc si $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ sont les angles que MC fait avec les axes, on a

$$\cos\alpha' = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma}, \qquad \cos\beta' = \frac{d\cos\beta}{d\sigma}, \qquad \cos\gamma' = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}$$

ou

$$\cos\alpha' = R\,\frac{d\cos\alpha}{ds}, \qquad \cos\beta' = R\,\frac{d\cos\beta}{ds}, \qquad \cos\gamma' = R\,\frac{d\cos\gamma}{ds};$$

c'est-à-dire

$$\cos\alpha' = R\,\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3},$$

$$\cos\beta' = R\,\frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^3},$$

$$\cos\gamma' = R\,\frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^3}.$$

Soient enfin $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ les angles que la binormale fait avec les axes; on a

$$\frac{\cos\alpha''}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{\cos\beta''}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{\cos\gamma''}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$= \frac{1}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}};$$

donc

$$\cos\alpha'' = R\,\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3},$$

$$\cos\beta'' = R\,\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3},$$

$$\cos\gamma'' = R\,\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}.$$

Si l'arc $s$ est la variable indépendante, ces formules deviennent

$$\cos\alpha = x', \qquad \cos\beta = y', \qquad \cos\gamma = z',$$

$$\cos\alpha' = Rx'', \qquad \cos\beta' = Ry'', \qquad \cos\gamma' = Rz'',$$

$$\cos\alpha'' = R(y'z'' - z'y''), \qquad \cos\beta'' = R(z'x'' - x'z''), \qquad \cos\gamma'' = R(x'y'' - y'x'').$$

**134.** Rapportons une courbe à trois axes rectangulaires confondus avec le trièdre de référence relatif à un point de cette courbe, l'axe des $x$ étant la tangente, l'axe des $y$ la normale principale et l'axe des $z$ la binormale. Si l'on développe les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point M en fonction de la variable $t$ dont elles dépendent, les coefficients de $t$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente à l'origine; donc les coefficients relatifs à $y$ et à $z$ sont nuls et celui de $x$ est égal à $\pm 1$; on peut le supposer égal à 1, en choisissant convenablement le sens des abscisses positives; d'autre part, si $t$ est infiniment petit du premier ordre, $z$ doit être du troisième ordre puisque le plan $xOy$ est le plan osculateur au point O; dans ces conditions

$$x = t + at^2 + a't^3 + \ldots, \qquad y = bt^2 + b't^3 + \ldots, \qquad z = ct^3 + \ldots.$$

Si l'on prend l'arc $s$, compté à partir de l'origine, pour variable indépendante, on doit avoir

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

c'est-à-dire

$$(1 + 2as + 3a's^2 + \ldots)^2 + (2bs + 3b's^2 + \ldots)^2 + (3cs^2 + \ldots)^2 = 1;$$

donc

$$a = 0, \qquad 3a' + 2b^2 = 0, \qquad \ldots$$

et, par conséquent,

$$x = s - \frac{2}{3} b^2 s^3 + \ldots, \qquad y = bs^2 + b's^3 + \ldots, \qquad z = cs^3 + \ldots.$$

On trouve ensuite, pour $s = 0$,

$$\frac{1}{R^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2 = 4b^2.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = 0, \qquad Y = \frac{1}{2b}, \qquad Z = 0.$$

Le cercle de courbure est donc le même que celui de la projection de la courbe sur le plan osculateur.

Si l'on calcule la corde OM, on trouve, pour la longueur de cette corde,

$$l = s - \frac{1}{6} b^2 s^3 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$l = s - \frac{1}{24 R^2} s^3 + \ldots,$$

donc

$$\lim \frac{l - s}{s^3} = \frac{1}{24 R^2},$$

et l'on voit ainsi que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est infiniment petite du troisième ordre, cet arc étant supposé du premier ordre.

## Torsion.

135. Le plan osculateur d'une courbe gauche ne reste pas parallèle à un plan fixe; soient M et M' deux points infiniment voisins d'une courbe gauche; les plans osculateurs en ces points font un angle infiniment petit $\omega$, qu'on nomme l'*angle de torsion*. Le rapport de cet angle à l'arc MM' est ce

qu'on nomme la *torsion moyenne;* la limite de ce rapport est la torsion; on pose

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{1}{\tau},$$

$\tau$ se nomme le *rayon de torsion.*

Soit

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

l'équation du plan osculateur au point $M(x, y, z)$. On a

$$\sin^2\omega = \frac{\Sigma(A\Delta B - B\Delta A)^2}{(A^2+B^2+C^2)[(A+\Delta A)^2+(B+\Delta B)^2+(C+\Delta C)^2]};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{\Sigma(A\,dB - B\,dA)^2}}{(A^2+B^2+C^2)ds}.$$

Pour transformer cette expression, considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

On sait que

$$A = y'z'' - z'y'';$$

donc

$$A' = y'z''' - z'y''';$$

on aurait de même B, C et B', C'. Les propriétés des déterminants adjoints donnent ces identités :

$$AB' - BA' = z'\Delta,$$

$$BC' - CB' = y'\Delta,$$

$$CA' - AC' = x'\Delta;$$

donc

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2};$$

mais nous avons trouvé (132)

$$A^2+B^2+C^2 = s'^2(x''^2+y''^2+z''^2-s''^2)$$

donc

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2+B^2+C^2}{s'^6};$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{R^2\tau} = \frac{\Delta}{s'^6},$$

et, si l'arc $s$ est la variable indépendante,

$$\frac{1}{R^2\tau} = \Delta,$$

formule qui détermine $\tau$ en grandeur et signe.

EXERCICES.

1. L'hélice tracée sur un cylindre de révolution est définie par les formules

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = b\varphi;$$

former les équations de la tangente, de la normale principale, de la binormale, du plan osculateur en un point. Calculer R et $\tau$ en chaque point.

2. Mêmes exercices pour une hélice tracée sur un cylindre quelconque, en prenant pour variable indépendante l'arc $s$ de la section droite de ce cylindre; les coordonnées d'un point quelconque de cette hélice sont données par les formules

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = as,$$

$a$ étant une constante. Prouver que, si l'on nomme $\rho$ le rayon de courbure de la section droite au point M, on a, pour ce point,

$$R = (1 + a^2)\rho, \qquad \tau = \frac{1 + a^2}{a}\rho.$$

3. Mêmes exercices pour l'*hélice conique* définie par les équations

$$x = t\cos t, \qquad y = t\sin t, \qquad z = t.$$

4. Un point parcourt une circonférence pendant que celle-ci tourne autour d'un de ses diamètres, supposé fixe. La vitesse angulaire du point est égale à la vitesse de rotation de la circonférence. On demande : 1° les équations de la trajectoire; 2° l'équation du plan osculateur de cette ligne; 3° l'expression de son rayon de courbure, etc. (E. CATALAN, *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique.*)

5. Étudier la courbe définie par les équations

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = t\sqrt{2}.$$

Prouver que c'est une hélice tracée sur un cylindre ayant pour base une chaînette. Prouver que l'*ombre* de cette hélice sur un certain plan est une hyperbole équilatère. (E. CATALAN.)

6. Étudier la courbe définie par les équations

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + t}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2 + t}, \qquad z = \frac{c^2\gamma}{c^2 + t}.$$

7. On considère sur une courbe gauche cinq points $M, M_1, M_2, M_3, M_4$ correspondant à $t$, $t+h_1$, $t+h_2$, $t+h_3$, $t+h_4$; on suppose que $h_1, h_2, h_3, h_4$ soient infiniment petits et l'on demande d'étudier l'ordre infinitésimal du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$.

— On remarque que le déterminant

$$\left| x+h_1x'+\frac{h_1^2}{2}x''+\frac{h_1^3}{6}x''', \quad y+h_1y'+\frac{h_1^2}{2}y''+\frac{h_1^3}{6}y''', \quad z+h_1z'+\frac{h_1^2}{2}z''+\frac{h_1^3}{6}z''', \quad 1 \right|$$

(la première ligne étant seule représentée dans cette notation, les trois autres s'en déduisent en remplaçant $h_1$ par $h_2$, $h_3$ par $h_4$) est égal au produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \frac{h_1}{1} & \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_1^3}{6} \\ 1 & \frac{h_2}{1} & \frac{h_2^2}{2} & \frac{h_2^3}{6} \\ 1 & \frac{h_3}{1} & \frac{h_3^2}{2} & \frac{h_3^3}{6} \\ 1 & \frac{h_4}{1} & \frac{h_4^2}{2} & \frac{h_4^3}{6} \end{vmatrix}.$$

On trouve ainsi, en négligeant les puissances des accroissements supérieurs à la troisième,

$$72\,V = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} \times (h_1-h_2)(h_1-h_3)(h_1-h_4)(h_2-h_3)(h_2-h_4)(h_3-h_4)$$

ou

$$V = \frac{s'^6}{72\,R^2\tau}P,$$

P désignant le produit des différences des accroissements $h$ deux à deux. (Cours de M. G. Darboux, à la Sorbonne.)

8. Une droite $AA_1$ se déplace, ses extrémités décrivent deux courbes; soient AT et $A_1T_1$ les demi-tangentes aux trajectoires de A et $A_1$, décrites chacune dans le sens du mouvement : prouver que

$$d.AA_1 = -ds.\cos TAA_1 - ds_1.\cos AA_1T_1.$$

— Il suffit de différentier l'expression

$$u^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2;$$

on peut aussi donner une démonstration géométrique.

9. En désignant par $\Delta$ le déterminant formé avec les dérivées premières, deuxièmes et troisièmes des coordonnées d'un point d'une courbe par rap-

port à l'arc $s$, prouver que

$$\Delta^2 = \frac{1}{R^4\tau^2} = \frac{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2}{R^2} - \frac{1}{R^6} - \frac{R'^2}{R^6}.$$

**10.** Démontrer les relations suivantes, les dérivées étant toujours prises par rapport à $s$ :

$$S x' x'' = -\frac{1}{R^2},$$

$$S x'' x'' = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\right)',$$

$$S x' x^{\text{iv}} = -\frac{3}{R}\left(\frac{1}{R}\right)',$$

$$S x'' x^{\text{iv}} = -\frac{1}{R^4} - \frac{1}{R^2\tau^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\right)'',$$

$$S x' x^{\text{v}} = \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^2\tau^2} - 3\left(\frac{1}{R}\right)'^2 - \frac{4}{R}\left(\frac{1}{R}\right)'',$$

le signe S indiquant que la somme doit être étendue aux trois coordonnées (notation de Lamé); ainsi $S x' x''' = x' x''' + y' y''' + z' z'''$.

**11.** On considère une sphère ayant pour équation

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 - \rho^2 = 0;$$

on écrit qu'elle rencontre une courbe définie par les équations $x = f(s)$, $y = \varphi(s)$, $z = \psi(s)$ [$s$ étant la longueur de l'arc AM, A désignant un point fixe pris sur la courbe et M le point variable $(x, y, z)$] en quatre points confondus en un seul (sphère osculatrice); pour cela, on égale à zéro la fonction

$$F(s) = (f - a)^2 + (\varphi - b)^2 + (\psi - c)^2 - \rho^2$$

et ses trois premières dérivées. En déduire les formules

$$a = f + \frac{1}{\Delta}\frac{dA}{ds}, \qquad b = \varphi + \frac{1}{\Delta}\frac{dB}{ds}, \qquad c = \psi + \frac{1}{\Delta}\frac{dC}{ds},$$

A, B, C étant les coefficients de l'équation du plan osculateur, et

$$\rho^2\Delta^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - (x'x''' + y'y''' + z'z''')^2.$$

**12.** Prouver que

$$\rho^2 = R^2 + \tau^2 R'^2.$$

**13.** Si l'arc est pris pour variable indépendante, les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = x + R^2 x'', \qquad Y = y + R^2 y'', \qquad Z = z + R^2 z'';$$

en déduire, en posant

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

la formule

$$dS^2 = \left[\left(\frac{R}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right] ds^2. \qquad \text{(Molins.)}$$

**14.** La partie principale de la distance d'une des extrémités d'un arc infiniment petit $s$ au plan osculateur correspondant à l'autre extrémité a pour mesure $\frac{s^3}{6R\tau}$. (O. Bonnet.)

**15.** La partie principale de la plus courte distance des tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit est égale à $\frac{s^3}{12R\tau}$. (O. Bonnet.)

(*Voir*, pour les questions 9 à 15, le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, de M. Ch. Hermite; Paris, Gauthier-Villars.)

**16.** Prouver que, si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les angles que la tangente à une courbe en un point M fait avec trois axes rectangulaires, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ ceux que la normale principale en M fait avec les mêmes axes, et $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ ceux de la binormale, on a

$$\frac{d\cos\alpha''}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\beta''}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\gamma''}{d\cos\gamma} = \pm\frac{d\omega}{d\sigma} = \pm\frac{R}{\tau},$$

$\omega$ désignant l'arc décrit sur la sphère de rayon 1 par l'extrémité du rayon parallèle à la binormale; d'où il résulte que la tangente à la courbe sphérique décrite par l'extrémité d'un rayon parallèle à la tangente est parallèle à la tangente à la courbe sphérique décrite par l'extrémité d'un rayon parallèle à la binormale, et la direction commune est celle de la normale principale. (J.-A. Serret, Frenet.)

**17.** En conservant les mêmes notations, on a

$$d\cos\alpha = \cos\alpha'\, d\sigma, \qquad d\cos\alpha'' = \cos\alpha'\, d\omega,$$
$$d\cos\alpha' = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\alpha''\, d\omega.$$

En conclure une relation entre les différentielles des arcs que décrivent sur la sphère de rayon 1 les extrémités des rayons parallèles aux arêtes du trièdre de référence.

**18.** Les équations

$$x = a + bt + ct^2, \qquad y = a' + b't + c't^2, \qquad z = a'' + b''t + c''t^2$$

représentent une parabole. Trouver les coordonnées de son sommet, de son foyer, la direction de son axe, etc. Étudier les vecteurs ayant pour composantes

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

# CHAPITRE VII.

## PLANS TANGENTS.

**136.** Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface S. Nous allons prouver qu'en tout point $M(x_0, y_0, z_0)$, pour lequel l'une au moins des trois dérivées $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ est différente de zéro, les tangentes à toutes les courbes passant par M et tracées sur cette surface sont dans un plan qu'on nomme *le plan tangent en* M. En effet, une courbe tracée sur la surface S peut être considérée comme étant l'intersection de cette surface et d'une autre surface S'; elle est donc définie par deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0,$$

$f_1(x, y, z)$ étant seulement assujettie à la condition $f_1(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Les équations de la tangente à cette courbe, au point M, sont

$$(1) \qquad (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0} + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z_0} = 0,$$

$$(2) \qquad (x - x_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + (z - z_0)\frac{\partial f_1}{\partial z_0} = 0.$$

Or, quelle que soit la fonction $f_1$, la droite représentée par ces deux équations est dans le plan défini par l'équation (1); ce qui démontre la proposition.

Il résulte de là que le plan tangent en un point est déterminé quand on connaît les tangentes à deux courbes qui passent par ce point et sont tracées sur la surface.

**137.** *Autres formes de l'équation du plan tangent.* — 1° Si l'on rend l'équation de la surface homogène, en posant

$$F(x, y, z, t) = t^m f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right),$$

on vérifiera, comme pour l'équation de la tangente à une courbe

plane, que l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ peut s'écrire

$$x\frac{\partial f}{\partial x_0}+y\frac{\partial f}{\partial y_0}+z\frac{\partial f}{\partial z_0}+t\frac{\partial f}{\partial t_0}=0.$$

2° L'équation $f(x, y, z)=0$ définit $z$ comme fonction de $x$ et de $y$. Si l'on pose

$$\frac{dz}{dx}=p,\qquad \frac{dz}{dy}=q,$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0.$$

On obtient en effet ces deux équations en annulant la dérivée de $f(x, y, z)$ par rapport à $x$, $y$ conservant une valeur constante, puis de même, la dérivée de $f(x, y, z)$ par rapport à $y$, $x$ demeurant constant. Cela étant, en représentant par de grandes lettres les coordonnées courantes, l'équation du plan tangent au point $(x, y, z)$ étant

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

si l'on élimine $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ entre les trois équations précédentes, on obtient

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

Telle est la seconde forme que nous voulions donner à l'équation du plan tangent.

138. *Autre définition du plan tangent.* — Menons par le point $(x, y, z)$ d'une surface un plan quelconque; la distance du point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ à ce plan a pour mesure, en supposant pour plus de simplicité les axes rectangulaires,

$$\frac{A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Si nous regardons $z$ comme fonction de $x$ et de $y$, en supposant $\Delta x$ et $\Delta y$ infiniment petits du premier ordre, $\Delta z$ sera aussi du premier ordre. Or, on a

$$\Delta z=p\Delta x+q\Delta y+\ldots,$$

les termes suivants étant du second ordre; la distance considérée sera donc du second ordre si l'expression

$$(A+pC)\Delta x+(B+qC)\Delta y$$

est identiquement nulle, c'est-à-dire si $A=-pC$, $B=-qC$; l'équation du

plan cherché est alors

$$-pC(X-x)-qC(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

On retrouve ainsi l'équation du plan tangent en $M(x, y, z)$; on peut donc définir ce plan tangent : *un plan tel que la distance à ce plan d'un point situé sur la surface à une distance de M infiniment petite du premier ordre soit infiniment petite du second ordre au moins.*

**139.** *Autre méthode pour former l'équation du plan tangent (applicable aux coordonnées tétraédriques).* — Soit $f(x, y, z, t)=0$ l'équation d'une surface que nous supposerons algébrique et de degré $m$. Soient $x, y, z, t$ les coordonnées d'un point A de cette surface, et X, Y, Z, T les coordonnées d'un point quelconque M. Les coordonnées d'un point quelconque P appartenant à la droite AM sont de la forme $x+\lambda X$, $y+\lambda Y$, $z+\lambda Z$, $t+\lambda T$; pour que P soit un point commun à la surface $f$ et à la sécante AM, il faut et il suffit que $\lambda$ soit l'une quelconque des racines de l'équation

$$f(x+\lambda X, y+\lambda Y, z+\lambda Z, t+\lambda T)=0.$$

Cette équation étant du degré $m$ en $\lambda$, le nombre de points d'intersection est égal à $m$; il y aura autant de ces points confondus avec le point A que l'équation précédente aura de racines nulles; or, si l'on développe le premier membre par la formule de Taylor, on obtient l'équation

$$f(x, y, z, t)+\lambda\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\ldots=0.$$

Le terme indépendant de $\lambda$ est nul, puisque le point A appartient à la surface. Si l'une au moins des quatre dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$ n'est pas nulle, on voit que, si X, Y, Z, T ne vérifient pas l'équation

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

c'est-à-dire si la droite AM n'est pas dans le plan défini par cette équation, cette droite rencontre la surface en un seul point confondu avec A et en $m-1$ autres points; au contraire, dès que le point M vient se placer dans le plan précédent, l'un au moins de ces $m-1$ points vient se confondre avec A et, par suite, une telle

sécante a au moins deux points communs avec la surface $f$ confondus en A; on dit alors que cette droite est tangente à la surface, et l'on voit que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, le lieu de toutes les tangentes en A à la surface $f$ est un plan défini par l'équation précédente : ce plan est le plan tangent en A. Toute droite issue de A, et non située dans ce plan, ne rencontre la surface $f$ qu'en un seul point confondu avec A; on dit alors que le point A est un point simple. Nous sommes ainsi parvenu à ce résultat : en tout point simple d'une surface algébrique il y a un plan tangent, défini par l'équation écrite plus haut.

Si les quatre dérivées du premier ordre sont nulles au point A, on voit que toute sécante issue de A rencontre la surface $f$ au moins en deux points confondus avec le point A, puisque les deux premiers termes de l'équation en $\lambda$ que nous avons considérée sont nuls. On dit alors que le point A est un point multiple de l'ordre $p$, si la première des dérivées partielles de la fonction $f$ qui ne s'annule pas, au point A, est d'ordre $p$. Dans ce cas, on appelle tangente en A toute droite issue de ce point qui rencontre la surface en $p+1$ points au moins confondus avec A, et l'on obtient l'équation du cône formé par toutes les tangentes en égalant à zéro le coefficient de $\lambda^p$, ce qui donne l'équation symbolique

$$\left(X\frac{\partial}{\partial x}+Y\frac{\partial}{\partial y}+Z\frac{\partial}{\partial z}+T\frac{\partial}{\partial t}\right)_p f=0.$$

Si $p=2$, cette équation développée est la suivante :

$$\mathop{\mathrm{S}} X^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\mathop{\mathrm{S}} XY\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0,$$

le signe $\mathrm{S}$ indiquant que la somme doit être étendue à toutes les coordonnées.

**140.** On démontrera, au moyen de la méthode suivie en Géométrie plane (t. I, p. 353), que si $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des fonctions linéaires des coordonnées $x, y, z$ prenant les valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ au point $M(x_1, y_1, z_1)$, le plan tangent en M à la surface ayant pour équation $f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)=0$ sera défini par l'équation

$$(\alpha-\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}+(\beta-\beta_1)\frac{\partial f}{\partial\beta_1}+\ldots+(\lambda-\lambda_1)\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}=0$$

et si $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $x, y, z, t$ et que l'équation $f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)=0$ soit elle-même homogène par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, l'équation du plan tangent sera

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}+\beta\frac{\partial f}{\partial\beta_1}+\ldots+\lambda\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}=0.$$

**141.** *Plan tangent à l'origine.* — Si une surface passe par l'origine des coordonnées, on obtiendra l'équation du plan tangent ou, plus généralement, l'équation du cône des tangentes à l'origine, en égalant à zéro l'ensemble des termes du plus bas degré dans le premier membre de l'équation de la surface, mise sous forme entière.

Soit

$$\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \ldots = 0$$

l'équation de la surface considérée, $\varphi_p(x, y, z)$ désignant l'ensemble homogène des termes de degré $p$. Les équations d'une droite issue de l'origine étant

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \rho,$$

le point ayant pour coordonnées $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$ sera sur la surface si $\rho$ est racine de l'équation $f(\alpha\rho, \beta\rho, \gamma\rho) = 0$, c'est-à-dire

$$\rho\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^2\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots = 0.$$

Cette équation a une racine nulle et une seule, si $\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Une seconde racine sera nulle si $\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; c'est-à-dire si la sécante est dans le plan ayant pour équation

$$\varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Ce plan est le plan tangent à l'origine.

Si $\varphi_1(x, y, z)$ est identiquement nul, l'équation en $\rho$ a au moins deux racines nulles, quelles que soient les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; et, dans ce cas, toute sécante issue de l'origine coupe la surface en deux points au moins confondus avec l'origine; si le polynome $\varphi_2(x, y, z)$ n'est pas identiquement nul, on voit que l'ensemble des droites ayant plus de deux points communs confondus avec l'origine est représenté par l'équation

$$\varphi_2(x, y, z) = 0.$$

Et ainsi de suite. La proposition est donc démontrée.

**142.** *Intersection d'une surface par son plan tangent en un point simple.* — Prenons pour plan des $x$, $y$ le plan tangent en un point simple d'une surface, l'origine étant le point de contact. L'équation de la surface

sera de la forme suivante :

$$Z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 + \ldots,$$

chacun des termes non écrits étant de degré 3 au moins. L'équation de la courbe d'intersection de la surface par le plan des $x$, $y$ est, dans ce plan,

$$0 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots.$$

Cette intersection a donc un point double à l'origine.

En particulier, si la surface est du second degré, elle est coupée par son plan tangent en un point simple, suivant une conique ayant un point double en ce point, c'est-à-dire suivant deux droites.

On vérifie, par exemple, qu'une sphère est coupée par son plan tangent en un plan quelconque, suivant les deux droites isotropes issues du point de contact.

Considérons une surface de degré supérieur au second et supposons que les tangentes au point double de la section par le plan tangent soient réelles; prenons ces tangentes pour axes des $x$ et des $y$; l'équation de la surface étant alors

$$z = 2bxy + 2dxz + 2eyz + fz^2 + \ldots,$$

si l'on coupe cette surface par le plan $xOz$, la section obtenue aura pour équation, dans ce plan,

$$z = 2dxz + fz^2 + \ldots;$$

on voit que l'origine est un point d'inflexion, la tangente d'inflexion étant l'axe des $x$, c'est-à-dire celle des tangentes à la section par le plan tangent par laquelle on a mené le plan sécant.

**143.** *Remarque.* — Si une droite issue d'un point A est tout entière sur une surface, le plan tangent en A contient cette droite, car si X, Y, Z, T sont les coordonnées d'un point quelconque de cette droite et $x, y, z, t$ celles de A, on a par hypothèse

$$f(x + \lambda X, y + \lambda Y, z + \lambda Z, t + \lambda T) = 0,$$

quelle que soit la valeur de $\lambda$; donc les coefficients de toutes les puissances de $\lambda$ sont nuls et, en particulier,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

de là cette conséquence : si un plan coupe une surface de second degré suivant deux droites, il est tangent à cette surface au point de rencontre de ces deux droites, pourvu toutefois que ce point soit un

point simple. Ainsi, la conclusion serait en défaut pour un plan passant par le sommet d'un cône du second degré.

**144.** *Rayons de courbure principaux.* — Soit

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$

l'équation d'une surface, l'axe des $z$ étant la normale à l'origine et le plan $xOy$ le plan tangent. L'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

étant celle d'une conique ayant pour centre l'origine, on peut supposer que les axes $Ox$ et $Oy$ soient les axes de symétrie de cette conique; alors l'équation de la surface aura la forme

$$z = ax^2 + cy^2 + \ldots.$$

La section par le plan $y = 0$ a pour équation

$$z = ax^2 + \ldots.$$

Le rayon de courbure $R_1$ de cette section a pour mesure $\frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''}$; mais au point O, $z' = 0$, $z'' = 2a$; donc $R_1 = \frac{1}{2a}$; de même $R_2$ étant le rayon de courbure de la section normale menée par $Oy$, on a

$$R_2 = \frac{1}{2c}.$$

L'équation de la surface peut s'écrire

$$z = \frac{1}{2R_1} x^2 + \frac{1}{2R_2} y^2 + \ldots.$$

Cela étant, si l'on fait un changement de coordonnées en posant

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

l'équation deviendra

$$z = \left(\frac{\cos^2\alpha}{2R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{2R_2}\right) x'^2 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{R_1 R_2} x'y' + \left(\frac{\sin^2\alpha}{2R_1} + \frac{\cos^2\alpha}{2R_2}\right) y'^2 + \ldots$$

et l'on voit que les rayons de courbure $R'$ et $R''$ des sections normales rectangulaires $y' = 0$ et $x' = 0$ sont déterminés par les équations

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha, \qquad \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{R_2}\cos^2\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

La somme constante $\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}$ se nomme *la courbure moyenne au point considéré*, $R_1$ et $R_2$ sont les rayons de courbure principaux en ce point.

### Application au second degré.

**145.** Considérons d'abord une sphère

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2-R^2=0.$$

Le plan tangent au point $(x, y, z)$ a pour équation

$$(X-a)(x-a)+(Y-b)(y-b)+(Z-c)(z-c)-R^2=0,$$

en supposant remplie la condition

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0.$$

On vérifie ainsi que le plan tangent est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact.

Soit, en second lieu, une surface de second degré quelconque

$$\begin{aligned}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy&\\ +2Cx+2C'y+2C''z+D&=0;\end{aligned}$$

le plan tangent au point $(x, y, z)$ appartenant à cette surface a pour équation

$$\begin{aligned}AXx+A'Yy+A''Zz+B(yZ+zY)+B'(zX+xZ)+B''(xY+yX)&\\ +C(X+x)+C'(Y+y)+C''(Z+z)+D&=0.\end{aligned}$$

**146.** *Exprimer qu'un plan est tangent à une surface. — Cas du second degré.* — Soit

$$uX+vY+wZ+rT=0 \tag{1}$$

l'équation d'un plan. Pour que ce plan soit tangent à une surface ayant pour équation

$$f(x, y, z, t)=0, \tag{2}$$

il faut et il suffit qu'il existe un système de valeurs de $x$, $y$, $z$, $t$ vérifiant l'équation (2), et telles que l'équation

$$(3) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

soit identique à l'équation (1). On obtiendra la condition demandée en éliminant $x, y, z, t, \lambda$ entre l'équation (2) et les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda u, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda v, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda w, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \lambda r.$$

Dans certains cas, on trouve deux équations de condition (surfaces développables).

Dans le cas du second degré, en remplaçant $\lambda$ par $2\lambda$, nous obtenons les équations du premier degré

$$(4) \qquad \begin{cases} Ax + B''y + B'z + Ct - \lambda u = 0, \\ B''x + A'y + Bz + C't - \lambda v = 0, \\ B'x + By + A''z + C''t - \lambda w = 0, \\ Cx + C'y + C''z + Dt - \lambda r = 0, \\ ux + vy + wz + rt = 0. \end{cases}$$

La dernière de ces équations remplace l'équation (2); en effet, celle-ci pouvant s'écrire

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

on peut y remplacer les dérivées par des quantités proportionnelles $u$, $v$, $w$, $z$.

La condition demandée est donc

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous représenterons par $-F(u, v, w, r)$ le déterminant précédent; on a

$$F(u, v, w, r) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + dr^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr,$$

$a, a', \ldots, c''$ étant les mineurs du discriminant H de la forme $f(x, y, z, t)$. Nous supposons $H \neq 0$.

L'équation $F(u, v, w, r) = 0$ se nomme *l'équation tangentielle* de la surface représentée par $f(x, y, z, t) = 0$ en coordonnées ponctuelles. Les coordonnées homogènes du point de contact du plan $(u, v, w, r)$ tangent à cette surface sont

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial w}, \quad \frac{\partial F}{\partial r},$$

comme on s'en assure en résolvant le système (4).

147. *Exprimer qu'une droite est tangente à une quadrique.* — Soient

$$ux + vy + wz + rt = 0, \qquad u'x + v'y + w'z + r't = 0$$

les équations d'une droite. Si cette droite touche la quadrique en un point $M(x, y, z, t)$, l'équation du plan tangent en ce point doit être de la forme

$$(\lambda u + \mu u')x + (\lambda v + \mu v')y + (\lambda w + \mu w')z + (\lambda r + \mu r')t = 0;$$

on doit donc pouvoir déterminer $\lambda$, $\mu$, $x, y, z, t$, tels que

$$\begin{aligned}
Ax + B''y + B'z + Ct &= \lambda u + \mu u', \\
B''x + A'y + Bz + C't &= \lambda v + \mu v', \\
B'x + By + A''z + C''t &= \lambda w + \mu w', \\
Cx + C'y + C''z + Dt &= \lambda r + \mu r', \\
ux + vy + wz + rt &= 0, \\
u'x + v'y + w'z + r't &= 0,
\end{aligned}$$

et réciproquement, si ces équations sont vérifiées, la droite donnée passe par le point $(x, y, z, t)$ et se trouve située dans le plan tangent en ce point; elle est donc tangente. La condition demandée s'obtient en éliminant $x, y, z, t, \lambda, \mu$ entre les équations précédentes; on obtient ainsi

$$\begin{vmatrix}
A & B'' & B' & C & u & u' \\
B'' & A' & B & C' & v & v' \\
B' & B & A'' & C'' & w & w' \\
C & C' & C'' & D & r & r' \\
u & v & w & r & 0 & 0 \\
u' & v' & w' & r' & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

148. *Mener par une droite un plan tangent à une quadrique.*— Soient

$$(u, v, w, r), \qquad (u', v', w', r')$$

les coefficients des équations de deux plans passant par la droite, c'est-à-dire les coordonnées tangentielles de deux plans menés par cette droite; un plan passant par l'intersection des deux premiers a pour coordonnées tangentielles

$$u+\lambda u', \quad v+\lambda v', \quad w+\lambda w', \quad r+\lambda r';$$

ce plan sera tangent si $\lambda$ est racine de l'équation

$$F(u+\lambda u', \ v+\lambda v', \ w+\lambda w', \ r+\lambda r') = 0.$$

Il y a donc deux plans répondant à la question.

En exprimant que ces deux plans sont confondus en un seul, on obtient la condition pour que la droite donnée soit tangente à la quadrique, sous la forme

$$4F(u, v, w, r)\,F(u', v', w', r') - \left(u'\frac{\partial F}{\partial u} + v'\frac{\partial F}{\partial v} + w'\frac{\partial F}{\partial w} + r'\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 = 0.$$

**149.** *Équation du cône des tangentes à une surface, issues d'un point donné.* — Soient $S(x_0, y_0, z_0, t_0)$ un point donné et $f(x, y, z, t) = 0$ l'équation d'une surface. Soient $x, y, z, t$ les coordonnées d'un point M; on sait que, pour déterminer les points de rencontre de la droite SM et de la surface $f$, il suffit de résoudre l'équation

$$f(x_0+\lambda x, \ y_0+\lambda y, \ z_0+\lambda z, \ t_0+\lambda t) = 0;$$

on exprimera que SM rencontre la surface en deux points confondus en écrivant que cette équation en $\lambda$ a une racine double; l'équation représentera le faisceau des tangentes issues de S. Si la surface est du second degré, l'équation précédente pourra s'écrire

$$f_0 + \lambda P + \lambda^2 f = 0,$$

en posant

$$P \equiv x\frac{\partial f}{\partial x_0} + y\frac{\partial f}{\partial y_0} + z\frac{\partial f}{\partial z_0} + t\frac{\partial f}{\partial t_0} \equiv x_0\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots,$$

et l'équation demandée est

$$4ff_0 - P^2 = 0.$$

Le lieu des points de contact est déterminé par le système formé par l'équation précédente et par l'équation $f = 0$, c'est-à-dire par le système $f = 0$, $P = 0$; la courbe de contact est donc plane. Si l'on représente par $T = 0$ le plan tangent à la surface $f$ en un point $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, et par $P_1$ ce que devient P quand on y remplace les coordonnées courantes par les coordonnées de $M_1$, on voit que le plan tangent au cône en $M_1$ a pour équation

$$2f_0 T - PP_1 = 0.$$

Cette équation se réduit à $T = 0$, si le point $M_1$ est sur la courbe de contact.

Donc, le cône formé par les tangentes issues de M est tangent à la quadrique tout le long de la courbe de contact, ou, comme on dit, il lui est circonscrit. Le plan de la courbe de contact se nomme le *plan polaire* du point S.

**150.** *Équation du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée.* — Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres de la direction donnée et $x, y, z$ les coordonnées cartésiennes d'un point; une droite issue de ce point est définie par les équations

$$X = x + \alpha\rho, \qquad Y = y + \beta\rho, \qquad Z = z + \gamma\rho;$$

on exprimera que cette droite est tangente, c'est-à-dire qu'elle rencontre la surface $f$ en deux points confondus, en écrivant que l'équation

$$f(x + \alpha\rho,\ y + \beta\rho,\ z + \gamma\rho) = 0$$

a une racine double.

Supposons que la surface soit du second degré et soit $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble homogène des termes du second degré; l'équation en $\rho$ est alors

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right) + f(x, y, z) = 0;$$

l'équation du cylindre demandé est donc

$$4f(x, y, z)\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - \left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

On vérifie, comme plus haut, qu'en chacun des points de la courbe des contacts, qui est plane, le plan tangent au cylindre est le même que le plan tangent à la quadrique.

*Remarque.* — Si l'on suppose que le point $S(x_0, y_0, z_0, t_0)$ disparaît à l'infini dans la direction $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ l'équation du cône circonscrit de sommet S devient, à la limite, celle du cylindre circonscrit parallèle à la direction $(\alpha, \beta, \gamma)$; c'est ce que l'on voit immédiatement en remplaçant $x_0, y_0, z_0$ par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $t_0$ par 0 dans l'équation du cône.

## Normale à une surface.

**151.** On nomme *normale en un point* M *d'une surface* la perpendiculaire menée, en ce point, au plan tangent au même point.

Si les axes sont rectangulaires, la normale au point $M(x, y, z)$ à la surface définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$ a pour équations

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{f'_z}.$$

Le point M se nomme le *point d'incidence* ou le *pied de la normale*.

Les pieds des normales issues d'un point $(x_0, y_0, z_0)$ sont à l'intersection de la surface donnée et de la courbe définie par les équations

$$\frac{x_0 - x}{f'_x} = \frac{y_0 - y}{f'_y} = \frac{z_0 - z}{f'_z}.$$

## Plan tangent à une surface définie à l'aide de deux paramètres.

**152.** Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface S; on peut dire que cette équation définit $z$ comme fonction des deux variables indépendantes $x$ et $y$; or, on peut faire un changement de variables et poser

$$x = f(u, v), \qquad y = f_1(u, v),$$

$u$ et $v$ désignant deux nouvelles variables indépendantes; alors $z$ pourra aussi s'exprimer en fonction de $u$ et $v$, et l'on aura, pour définir les points de la surface donnée, le système

$$x = f(u, v), \qquad y = f_1(u, v), \qquad z = f_2(u, v).$$

Réciproquement, un pareil système définit en général une surface; supposons en effet, par exemple, que les deux premières équations déterminent $u$ et $v$ en fonction de $x$ et de $y$; $z$ est alors une fonction de $x$ et de $y$. On obtiendrait d'ailleurs l'équation de la surface en éliminant $u$ et $v$ entre les trois équations données.

Cela étant, supposons qu'à chaque système de valeurs attribuées à $u$ et $v$ corresponde un point M; on demande l'équation du plan tangent en M à la surface que décrit ce point quand $u$ et $v$ varient.

Si l'on remplace $v$ par une fonction de $u$ et que l'on fasse varier $u$, le point défini par les équations précédentes décrira une courbe tracée sur la surface S et les équations de la tangente au point $(u, v)$ seront

$$(1) \qquad \frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} v'} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial v} v'} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} v'}$$

ou, en introduisant un paramètre variable $\lambda$,

$$X - x - \lambda \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda v' \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$
$$Y - y - \lambda \frac{\partial f_1}{\partial u} - \lambda v' \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,$$
$$Z - z - \lambda \frac{\partial f_2}{du} - \lambda v' \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0.$$

En éliminant $\lambda$ et $\lambda v'$, on voit que la tangente considérée est dans le plan défini par l'équation

$$\begin{vmatrix} X - f(u, v) & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ Y - f_1(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ Z - f_2(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Il convient de remarquer que cette équation disparaît si, pour un point M$(u, v)$, les dérivées partielles par rapport à l'un des paramètres sont nulles toutes les trois, ou encore si les dérivées partielles par rapport à $u$ sont proportionnelles aux dérivées par rapport à $v$.

Dans ce cas, les équations (1) représentent toujours la même droite, sauf si

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} v' = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial v} v = \frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} v' = 0;$$

alors, en supposant $\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}$ différents de zéro, les équations de la tangente sont

$$\frac{X - x}{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial f}{\partial v} v''} = \dots.$$

On en déduit, pour l'équation du plan tangent,

$$\begin{vmatrix} X - x & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} v'^2 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

en n'écrivant que la première ligne du déterminant.

On peut arriver à l'équation du plan tangent par un procédé très simple. Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface; regardons $x, y, z$ comme fonctions de $u$ et $v$, et différentions par rapport à $u$, puis par rapport à $v$, ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0;$$

l'équation du plan tangent étant

$$(X-f)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-f_1)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-f_2)\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

il ne reste plus qu'à éliminer $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ entre les trois équations précédentes.

On voit que, si les dérivées partielles par rapport à $u$ sont proportionnelles aux dérivées par rapport à $v$, c'est-à-dire si la courbe $u=$ const. est tangente à la courbe $v=$ const., on ne peut déterminer les rapports de $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$; mais il ne s'ensuit pas que ces dérivées soient nulles et, par suite, on ne peut pas en conclure que le point considéré $(u, v)$ soit un point singulier de la surface.

## EXERCICES.

1. Deux surfaces ont, en général, un certain nombre de points communs pour lesquels les plans tangents font un angle donné. En particulier, deux sphères quelconques sont orthogonales en tous les points du cercle de l'infini.

2. Exprimer que deux surfaces sont tangentes en un point. Ce problème, qu'on peut considérer comme cas particulier du précédent, en diffère notablement. Application à deux sphères.

3. Exprimer qu'une surface et une courbe se coupent sous un angle donné.

4. Déterminer les plans tangents communs à deux sphères.

5. Cônes circonscrits à deux sphères.

6. Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.

7. Mener par une droite un plan tangent commun à deux sphères : condition de possibilité.

8. Mener un plan tangent commun à trois sphères.

9. Trouver l'équation du plan tangent en un point d'une surface définie au moyen de deux paramètres $u$, $v$, en écrivant que la distance du point $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ à un plan mené par le point $(u, v)$ est un infiniment petit du second ordre au moins, quel que soit le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta u}$, $\Delta u$ et $\Delta v$ étant regardés comme étant du premier ordre. Traiter aussi le cas où $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, $\frac{\partial f_2}{\partial u}$ sont proportionnelles à $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f_1}{\partial v}$, $\frac{\partial f_2}{\partial v}$.

10. Former l'équation tangentielle d'une sphère rapportée à des axes quelconques.

# CHAPITRE VIII.

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES. — GÉNÉRATION DES SURFACES OU DES LIGNES.

**153.** Soient

$$(1) \qquad f(x,y,z,a)=0, \qquad f_1(x,y,z,a)=0$$

deux équations renfermant un paramètre arbitraire $a$. A chaque valeur $a_0$ de $a$ correspond une courbe définie par les équations

$$(2) \qquad f(x,y,z,a_0)=0, \qquad f_1(x,y,z,a_0)=0.$$

Si $a$ varie d'une manière continue, la courbe considérée se déforme et se déplace; elle engendre un lieu dont on obtient l'équation en éliminant $a$ entre les deux équations (1). En effet, soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées d'un point M de la courbe $C_0$ définie par les équations (2); on a

$$f(x_0,y_0,z_0,a_0)=0, \qquad f_1(x_0,y_0,z_0,a_0)=0;$$

par conséquent les équations

$$(3) \qquad f(x_0,y_0,z_0,a)=0, \qquad f_1(x_0,y_0,z_0,a)=0$$

ont au moins une solution commune : $a_0$; donc, si nous savons former la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (3) en $a$ aient au moins une solution commune, on aura

$$(4) \qquad R(x_0,y_0,z_0)=0$$

et, par suite, tout point M du lieu est sur la surface ayant pour équation

$$(5) \qquad R(x,y,z)=0.$$

Réciproquement, soit $M(x_0,y_0,z_0)$ un point de cette surface; ses coordonnées vérifiant l'équation (4), les équations (3) ont au

moins une solution commune $a_0$ et, par suite, le point M est sur une courbe définie par les équations (2); le point M est donc un point du lieu.

**154.** Il y a lieu de faire ici une remarque analogue à celle qui a été faite pour la recherche des lieux géométriques en Géométrie plane.

Pour qu'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface trouvée fasse partie du lieu, il peut arriver qu'il soit nécessaire que les équations (3) aient au moins une solution commune $a_0$ satisfaisant à certaines conditions; par exemple, cette solution $a_0$ devra être réelle et, en outre, comprise entre certaines limites. Si ces conditions ne sont pas remplies, certaines parties du lieu trouvé pourront être des parties parasites.

On voit encore que, si l'une des surfaces représentées par l'équation (1) passe par un point fixe, ou contient une courbe fixe, ce point ou cette courbe feront partie du lieu trouvé.

*Cas de plusieurs paramètres.*

**155.** Il arrive souvent que les équations de la ligne mobile renferment plusieurs paramètres. Supposons que le nombre des paramètres variables soit $n$; dans ce cas il faudra assujettir, en général, ces paramètres à $n-1$ relations.

Soient, par exemple, les équations

$$\begin{aligned}
f\,(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0,\\
f_1(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0,\\
\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0,\\
\varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
\varphi_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0.
\end{aligned}$$

On obtiendra l'équation de la surface engendrée par la courbe génératrice définie par les deux premières équations, en éliminant les $n$ paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre les $n+1$ équations précédentes. Nous avons déjà fait plusieurs fois le raisonnement qui convient à ce genre de questions; il est inutile de le reproduire une fois de plus.

## *Génération d'une ligne.*

156. Supposons qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à trois surfaces, dont les équations

$$F(x, y, z, a) = 0, \qquad F_1(x, y, z, a) = 0, \qquad F_2(x, y, z, a) = 0$$

renferment un paramètre variable $a$, on aura l'équation du lieu engendré par le point M, en éliminant $a$ entre ces trois équations; ce qui donnera, en général, deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0;$$

le lieu de M sera donc une ligne.

D'ailleurs, si l'on résout le système proposé, on peut en tirer

$$x = f(a), \qquad y = \varphi(a), \qquad z = \psi(a),$$

et nous savons déjà qu'un pareil système représente une courbe.

157. *Cas général.* — Il peut arriver, d'une manière tout à fait générale, qu'on ait à chercher le lieu décrit par un point dont les coordonnées vérifient $n + 1$ équations renfermant $n$ paramètres

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0, \\ F_2(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ F_{n+1}(x, y, z, a_1, a_2 \ldots, a_n) &= 0; \end{aligned}$$

l'équation du lieu s'obtiendra encore en éliminant $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entre ces $n + 1$ équations; on aura ainsi une équation unique, en général, représentant une surface.

S'il y avait $n + 2$ équations, en éliminant les $n$ paramètres, on obtiendrait deux équations entre $x, y, z$, et le lieu serait une ligne.

Il est superflu d'ajouter que, si l'on donnait autant d'équations qu'il y a de paramètres, tout point de l'espace pourrait convenir; car, si l'on attribue à $x, y, z$ des valeurs particulières $x_0, y_0, z_0$, on aura $n$ équations pour déterminer $n$ inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cependant, dans certains cas, il peut se faire que l'élimination des paramètres soit possible, mais alors au résultat de l'élimination correspond un théorème et non plus un lieu géométrique.

**158.** *Directrices.* — Supposons qu'il s'agisse de trouver l'équation de la surface engendrée par une courbe dont les équations renferment deux paramètres $a$, $b$. Pour que la courbe engendre une surface, il est nécessaire que les paramètres $a$ et $b$ soient liés par une équation; on obtient ordinairement cette équation en exprimant que la génératrice est assujettie à rencontrer une courbe fixe, qu'on nomme *directrice*.

Soient

(G) $$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad f_1(x, y, z, a, b) = 0$$

les équations de la génératrice, et

(D) $$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0$$

les équations de la directrice. Pour exprimer que ces deux courbes se rencontrent, il faut écrire que ces quatre équations en $x$, $y$, $z$ ont au moins une solution commune, c'est-à-dire éliminer $x$, $y$, $z$ entre ces équations. On obtiendra ainsi une équation de condition

$$\psi(a, b) = 0$$

et il n'y aura plus qu'à éliminer $a$ et $b$ entre cette équation et celles de la génératrice.

Plus généralement, si les équations de la génératrice renfermaient $n$ paramètres, il faudrait $n - 1$ directrices pour que la courbe mobile pût engendrer une surface; à chaque directrice correspond, en effet, une relation entre les paramètres.

Nous allons maintenant donner quelques exemples.

**159.** ***Étant données une sphère* S *et une droite* Δ, *on demande le lieu des sommets des cônes circonscrits à la sphère suivant les courbes d'intersection de cette sphère et des plans menés par la droite donnée.***

Prenons pour origine le centre de la sphère, l'axe des $z$ étant parallèle à la droite donnée, l'axe des $x$ étant la perpendiculaire abaissée du centre sur cette droite, et enfin l'axe des $y$ étant perpendiculaire aux deux autres axes. Les équations de la sphère et de la droite sont

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$
$$x = a, \qquad y = 0.$$

Un plan mené par Δ a pour équation

(1) $$X - a + \lambda Y = 0.$$

Soient $x, y, z$ les coordonnées du sommet du cône circonscrit à la sphère S le long du cercle suivant lequel elle est coupée par ce plan; le plan de la courbe de contact a pour équation (149)

$$(2) \qquad Xx + Yy + Zz - R^2 = 0.$$

Identifions les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(3) \qquad z = 0; \qquad x = \frac{y}{\lambda} = \frac{R^2}{a}.$$

Les équations du lieu s'obtiendront en éliminant $\lambda$ entre les équations (3); on trouve ainsi

$$z = 0, \qquad x = \frac{R^2}{a}.$$

Le lieu est donc une droite $\Delta_1$ facile à construire; mais, si l'on ne considère que des figures réelles, la droite tout entière ne convient pas nécessairement au lieu; il faut en effet que le cercle, intersection du plan (1) et de la sphère, soit réel; pour cela, il faut et il suffit que la distance de l'origine au plan sécant soit moindre que le rayon de la sphère, c'est-à-dire que $\lambda$ vérifie l'inégalité

$$\frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2}} < R,$$

en supposant $a > 0$; ce qui donne

$$\lambda^2 > \frac{a^2 - R^2}{R^2}.$$

Cette condition est toujours vérifiée si l'on suppose $a < R$; supposons $a > R$; dans ce cas, il faut supposer $\lambda > \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R}$ ou $\lambda < -\frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R}$; la droite $\Delta_1$ coupe la sphère S en deux points ayant pour ordonnées $y = \pm \frac{R}{a}\sqrt{a^2 - R^2}$; un point quelconque de $\Delta_1$ ayant pour ordonnée $y = \lambda \frac{R^2}{a}$, les points d'intersection trouvés sont ceux qui correspondent à $\lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R}$; donc la portion de $\Delta_1$ située à l'intérieur de la sphère ne correspond pas à la définition géométrique du lieu.

160. *Trouver le lieu des intersections de deux plans faisant partie de deux faisceaux homographiques.* — Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations d'une droite $\Delta$; $P' = 0$, $Q' = 0$ les équations d'une droite $\Delta'$; un plan appartenant au premier faisceau a pour équation

$$P + \lambda Q = 0;$$

un plan appartenant au second faisceau

$$P' + \lambda' Q' = 0.$$

La relation homographique la plus générale étant

$$\lambda\lambda' + a\lambda + b\lambda' + c = 0,$$

l'équation du lieu est

$$PP' - aPQ' - bQP' + cQQ' = 0.$$

Si l'on suppose que P' corresponde à P et Q' à Q, on peut disposer des coefficients de façon que la relation homographique se réduise à $\lambda = \lambda'$; l'équation du lieu est alors

$$PQ' - QP' = 0.$$

Le lieu est une surface du second degré.

*Cas particulier.* — Supposons les droites $\Delta$, $\Delta'$ parallèles et les plans correspondants perpendiculaires; soient

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

les équations de $\Delta$ et de $\Delta'$; un plan passant par $\Delta$ a pour équation

$$(1) \qquad a(z - z_0) - c(x - x_0) + \lambda[c(y - y_0) - b(z - z_0)] = 0,$$

de même

$$(2) \qquad a(z - z_1) - c(x - x_1) + \lambda'[c(y - y_1) - b(z - z_1)] = 0$$

représente un plan passant par $\Delta'$; ces plans étant supposés rectangulaires, on doit poser

$$(3) \qquad c^2(1 + \lambda\lambda') + (a - \lambda b)(a - \lambda' b) = 0;$$

on aura l'équation du lieu en éliminant $\lambda$ et $\lambda'$ entre les équations (1), (2), (3). Le lieu est évidemment un cylindre circulaire droit; si l'on pose

$$cy_0 - bz_0 = \alpha, \qquad az_0 - cx_0 = \beta, \qquad bx_0 - ay_0 = \gamma,$$
$$cy_1 - bz_1 = \alpha_1, \qquad az_1 - cx_1 = \beta_1, \qquad bx_1 - ay_1 = \gamma_1,$$

l'équation du cylindre prend la forme symétrique

$$(cy - bz - \alpha)(cy - bz - \alpha_1) + (az - cx - \beta)(az - cx - \beta_1) + (bx - ay - \gamma)(bx - ay - \gamma_1) = 0,$$

ou encore

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 - (\alpha + \alpha_1)(cy - bz) - (\beta + \beta_1)(az - cx) - (\gamma + \gamma_1)(bx - ay) + \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0.$$

### Cylindres.

161. On nomme *cylindre* une surface engendrée par une ligne droite qui se déplace en s'appuyant sur une directrice fixe et en restant parallèle à une direction donnée.

L'équation d'un cylindre peut toujours se mettre sous une forme remarquable. Si l'on choisit pour axe des $z$ une droite parallèle à la direction des génératrices, l'équation du cylindre sera de la forme

$$f(x, y) = 0:$$

mais, si l'on fait un changement de coordonnées, $x$ et $y$ se changeront en des fonctions linéaires P, Q des nouvelles coordonnées et l'équation prendra la forme

$$f(P, Q) = 0,$$

$P = 0$, $Q = 0$ représentant deux plans non parallèles.

On arrive à ce résultat directement de la façon suivante :

Si l'on représente par les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

la direction donnée, P et Q étant deux polynomes du premier degré, les équations d'une génératrice quelconque seront de la forme

$$P = a, \qquad Q = b.$$

En exprimant que cette droite s'appuie sur une courbe fixe donnée, on aura une équation de condition

$$f(a, b) = 0,$$

et l'équation de la surface s'obtiendra en éliminant $a$, $b$ entre les trois équations précédentes, ce qui donne

$$f(P, Q) = 0.$$

162. *Réciproquement,* si P et Q désignent deux polynomes linéaires

$$P \equiv ax + by + cz + d, \qquad Q = a'x + b'y + c'z + d'$$

supposés distincts, c'est-à-dire tels que l'un au moins des déter-

minants $ab' - ba'$, $bc' - cb'$, $ca' - ac'$ soit différent de zéro, toute équation de la forme

$$f(P, Q) = 0$$

représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite D, ayant pour équations $P = 0$, $Q = 0$.

En effet, supposons qu'on trace sur la surface représentée par l'équation donnée une courbe quelconque, et soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées d'un point M de cette courbe; je dis que la parallèle à D menée par M est tout entière sur la surface S; effectivement, si $P_0$ et $Q_0$ désignent $ax_0 + by_0 + cz_0 + d$ et $a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d$, les équations de cette parallèle sont

$$P = P_0, \qquad Q = Q_0.$$

Pour qu'un point M' de cette parallèle appartienne à S, il faut et il suffit que

$$f(P', Q') = 0;$$

or cela est évident, car

$$P' = P_0, \qquad Q' = Q_0$$

et le point M étant par hypothèse sur S, on a

$$f(P_0, Q_0) = 0.$$

D'ailleurs, on peut remarquer que l'équation donnée peut être regardée comme étant obtenue en éliminant les deux paramètres $a$, $b$ entre les équations

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad f(a, b) = 0.$$

**163.** Problème. — *Former l'équation du cylindre ayant pour directrice la courbe définie par les deux équations*

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0$$

*et dont les génératrices ont pour paramètres directeurs* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Soient $x, y, z$ les coordonnées d'un point M; ce point sera sur le cylindre si la parallèle à la direction donnée, menée par M, rencontre la directrice donnée.

Les coordonnées d'un point quelconque de cette parallèle étant de la forme $x + \alpha\rho, y + \beta\rho$, $z + \gamma\rho$, il faut et il suffit, pour qu'il

en soit ainsi, que les deux équations

$$f(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)=0, \qquad f_1(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)=0$$

aient au moins une solution commune. On obtiendra donc l'équation demandée en éliminant $\rho$ entre les équations précédentes.

*Cas particulier.* — Soient

$$z=0, \qquad f(x,y)=0$$

les équations de la directrice et

$$x=az, \qquad y=bz$$

celles de la direction des génératrices; les équations d'une génératrice étant

$$x=az+p, \qquad y=bz+q,$$

les paramètres $p$, $q$ sont les coordonnées de la trace de cette génératrice sur le plan de la directrice plane donnée; l'équation du cylindre est donc évidemment

$$f(x-az, y-bz)=0.$$

L'équation

$$(x-az-x_0)^2+(y-bz-y_0)^2-R^2=0$$

représente un cylindre circulaire oblique.

**164.** Théorème. — *Le plan tangent à un cylindre est le même en tous les points d'une génératrice.*

La proposition se vérifie facilement si l'on suppose l'axe des $z$ parallèle aux génératrices; dans ce cas l'équation du cylindre étant

$$f(x,y)=0,$$

le plan tangent en un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de cette surface a pour équation

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}=0;$$

il est donc indépendant de la position du point M sur la génératrice $x=x_0, y=y_0$. La trace de ce plan sur le plan $xOy$ est la tangente au point $(x_0, y_0)$ à la trace du cylindre sur ce plan.

La vérification se fait aussi avec l'équation générale $f(P, Q) = 0$. En effet, pour des points $M_0$, $M_1$ situés sur une même génératrice, on a $P_1 = P_0$ et $Q_1 = Q_0$; or, les plans tangents en $M_0$ et $M_1$ ont pour équations

$$(P - P_0)\frac{\partial f}{\partial P_0} + (Q - Q_0)\frac{\partial f}{\partial Q_0} = 0$$

et

$$(P - P_1)\frac{\partial f}{\partial P_1} + (Q - Q_0)\frac{\partial f}{\partial Q_1} = 0$$

et ces équations sont identiques, en vertu de la remarque précédente.

**165.** Problème. — *Reconnaître si une surface donnée est cylindrique.*

On coupe la surface par un des plans de coordonnées; supposons que la section par le plan $xOy$ soit une courbe ayant pour équation $f(x, y) = 0$. L'équation générale des cylindres ayant cette courbe pour directrice est $f(x - az, y - bz) = 0$. On cherche s'il est possible de déterminer $a$ et $b$, de façon que cette équation soit identique à celle de la surface donnée.

Nous trouverons une méthode plus simple pour le second degré.

## Cônes.

**166.** On appelle *cône* une surface engendrée par une droite, qui se déplace en passant toujours par un point fixe nommé le *sommet* du cône.

Soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du sommet; on peut mettre les équations de la génératrice sous la forme

$$x - x_0 = a(z - z_0), \qquad y - y_0 = b(z - z_0).$$

Il faut que les deux paramètres $a$, $b$ vérifient une équation

$$F(a, b) = 0,$$

que l'on obtiendra, par exemple, en exprimant que la génératrice rencontre une directrice donnée, ou encore qu'elle se déplace en restant tangente à une surface donnée. L'équation du cône engendré est donc

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

ou

$$f(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

$f$ désignant une fonction homogène. En particulier, l'équation d'un cône, ayant pour sommet l'origine des coordonnées, est de la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

le premier membre étant homogène.

Plus généralement, supposons que le sommet soit défini par trois équations du premier degré

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

en supposant que le déterminant des coefficients de $x$, $y$, $z$ soit différent de zéro; une droite quelconque, passant par le point de concours de ces trois plans, peut être représentée par deux équations de la forme

$$P = aR, \qquad Q = bR;$$

si les paramètres $a$, $b$ sont liés par l'équation de condition

$$F(a, b) = 0,$$

l'équation du cône sera

$$F\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$$

ou, sous forme homogène,

$$f(P, Q, R) = 0.$$

167. *Réciproquement,* à la condition expresse que P, Q, R désignent trois fonctions linéaires de $x$, $y$, $z$ distinctes, une équation $f(P, Q, R) = 0$, dont le premier membre est homogène par rapport à P, Q, R, représente un cône ayant pour sommet le point S, commun aux plans ayant pour équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0.$$

Effectivement, soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du point S, et $P_0$, $Q_0$, $R_0$ les résultats de la substitution des coordonnées de ce point aux coordonnées courantes dans P, Q, R; une droite quelconque passant par S a pour équations

$$\frac{P}{P_0} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{R}{R_0}.$$

Soient $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées d'un point quelconque M de

la surface représentée par l'équation donnée; on a, par hypothèse,

$$f(P_1, Q_1, R_1) = 0;$$

mais

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{R_1}{R_0}:$$

donc $x$, $y$, $z$ étant les coordonnées d'un point quelconque de la droite SM, on a aussi

$$\frac{P}{P_1} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{R}{R_1}$$

et, par suite,

$$f(P, Q, R) = 0;$$

ce qui prouve que la droite SM est tout entière sur la surface $f$; cette surface peut donc être engendrée par une droite passant par S et s'appuyant sur une courbe fixe, car on peut supposer que le point M décrive une courbe tracée sur cette surface; en un mot, la surface considérée est un cône. D'ailleurs, en écrivant l'équation sous la forme

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}, 1\right) = 0$$

ou

$$F\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0;$$

on peut considérer cette équation comme obtenue en éliminant les deux paramètres $a$, $b$ entre les trois équations

$$P = aR, \qquad Q = bR, \qquad F(a, b) = 0.$$

*Remarque.* — Si les polynomes P, Q, R étaient liés linéairement, de sorte que l'on eût, par exemple, $R \equiv \alpha P + \beta Q$, l'équation homogène $f(P, Q, R) = 0$ représenterait un cylindre, puisqu'elle serait de la forme $\varphi(P, Q) = 0$. Ainsi, par exemple,

$$f(x-y, y-z, z-x) = 0$$

n'est pas l'équation d'un cône, mais d'un cylindre.

Si Q et R étaient fonctions linéaires de P, l'équation donnée représenterait un système de plans.

**168.** *Trouver l'équation du cône ayant pour sommet un point donné* $S(x_0, y_0, z_0, t_0)$ *et pour directrice la courbe définie par les deux équations*

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) = 0,$$

$$(2) \qquad f_1(x, y, z, t) = 0.$$

Soient $x, y, z, t$ les coordonnées d'un point M du cône cherché; les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice SM étant de la forme

$$x+\lambda x_0, \quad y+\lambda y_0, \quad z+\lambda z_0, \quad t+\lambda t_0,$$

pour que SM s'appuie sur la directrice donnée, il faut et il suffit que les deux équations

$$f(x+\lambda x_0, y+\lambda y_0, z+\lambda z_0, t+\lambda t_0)=0, \tag{3}$$

$$f_1(x+\lambda x_0, y+\lambda y_0, z+\lambda z_0, t+\lambda t_0)=0 \tag{4}$$

aient une racine commune $\lambda$. On aura donc l'équation demandée en éliminant $\lambda$ entre les équations (3) et (4).

En particulier, supposons que le sommet donné soit l'origine des coordonnées, c'est-à-dire supposons $x_0=y_0=z_0=0$; les deux équations (3) et (4) se réduisent à celles-ci :

$$f(x, y, z, t+\lambda t_0)=0,$$
$$f_1(x, y, z, t+\lambda t_0)=0.$$

Au lieu d'éliminer $\lambda$, on peut, ce qui revient au même, éliminer $t+\lambda t_0$; il est donc évident que l'équation du cône cherché s'obtiendra en éliminant $t$ entre les équations (1) et (2).

*Application.* — Soit à trouver l'équation du cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour directrice le cercle défini par les équations

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0,$$
$$ux+vy+wz-1=0.$$

Rendons les deux dernières équations homogènes; il suffira d'éliminer la variable d'homogénéité; ce qui donne

$$[x-x_0(ux+vy+wz)]^2+[y-y_0(ux+vy+wz)]^2 + [z-z_0(ux+vy+wz)]^2-R^2(ux+vy+wz)^2=0,$$

ou

$$x^2+y^2+z^2+(ux+vy+wz)^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R)^2 - (xx_0+yy_0+zz_0)(ux+vy+wz)=0.$$

169. Théorème. — *Le plan tangent à un cône est le même en tous les points d'une génératrice.*

Prenons le sommet du cône pour origine des coordonnées, son équation sera

$$f(x, y, z)=0,$$

le premier membre étant homogène. Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les paramètres de direction d'une génératrice, les coordonnées d'un point quelconque M de cette génératrice seront $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, $z = \gamma\rho$. Le plan tangent en M a pour équation

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ou

$$X \frac{\partial f}{\partial \alpha} + Y \frac{\partial f}{\partial \beta} + Z \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0;$$

cette équation est indépendante de $\rho$, ce qui démontre la proposition.

170. *Reconnaître si une surface donnée est un cône.* — On transporte l'origine des coordonnées en un point $x_0$, $y_0$, $z_0$ et l'on cherche si l'on peut déterminer $x_0$, $y_0$, $z_0$ de façon que la nouvelle équation soit homogène par rapport aux nouvelles coordonnées.

### Surfaces conoïdes à plan directeur.

171. On appelle ainsi une surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur deux directrices fixes, dont l'une est une droite, et enfin reste parallèle à un plan fixe nommé *plan directeur*.

Soient $P = 0$ l'équation du plan directeur donné, $Q = 0$, $R = 0$ les équations de la directrice rectiligne donnée. Les équations d'une génératrice seront évidemment de la forme

$$(1) \qquad P = a, \qquad Q = bR,$$

$a$ et $b$ désignant deux paramètres variables. En exprimant que la génératrice s'appuie sur la seconde directrice, on obtient une équation de condition

$$(2) \qquad f(a, b) = 0$$

et l'équation de la surface engendrée est, par suite,

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme peut être regardée

comme obtenue en éliminant les paramètres $a$, $b$ entre les équations (1) et (2); elle représente donc un conoïde.

Au lieu de s'appuyer sur une droite et sur une courbe, la génératrice peut être assujettie à s'appuyer sur une droite et à rester tangente à une surface donnée.

172. EXEMPLES. — 1° *Plan gauche.* — On appelle ainsi la surface conoïde dont les deux directrices $\Delta$, $\Delta'$ sont rectilignes.

Prenons la droite $\Delta$ comme axe des $z$; on obtient une génératrice quelconque en joignant les traces des droites $\Delta$, $\Delta'$ sur un plan parallèle au plan donné; prenons l'une des génératrices ainsi obtenues pour axe des $x$; enfin, supposons le plan $yOz$ parallèle à $\Delta'$, le plan $xOy$ étant parallèle au plan directeur; les axes étant ainsi déterminés, les équations de $\Delta$ sont $x = 0$, $y = 0$, et celles de $\Delta'$ : $x = a$, $y = bz$.

Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$z = h, \qquad y = mx,$$

puisque cette droite doit s'appuyer sur l'axe des $z$ et être parallèle au plan $xOy$; en exprimant que la génératrice rencontre $\Delta'$, on obtient la condition

$$bh = ma.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer les paramètres variables $m$, $h$; ce qui donne l'équation du conoïde

$$bzx - ay = 0.$$

On voit que la section de cette surface par un plan parallèle à $yOz$ est représentée par les équations

$$x = \alpha, \qquad bz\alpha - ay = 0,$$

qui définissent une droite. Cette droite mobile rencontre les génératrices du premier système et reste parallèle au plan $zOy$.

De plus, soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées d'un point M de la surface trouvée, de façon que

$$bz_0x_0 = ay_0;$$

on peut représenter une droite du premier système par les équations

$$z = h, \qquad y = \frac{bh}{a}x,$$

et déterminer $h$ de façon que cette droite passe par M, car les deux équations

$$z_0 = h, \qquad y_0 = \frac{bh}{a}x_0$$

sont compatibles; de même on peut déterminer $\alpha$, de façon que

$$x_0 = \alpha, \qquad b z_0 - \alpha y_0 = 0.$$

On voit aussi qu'il passe deux droites par chaque point de la surface trouvée. Nous verrons plus loin que c'est une propriété générale des surfaces du second degré.

2° *Hélicoïde à plan directeur.* — Considérons une hélice définie par les équations

$$x = R\cos\alpha, \qquad y = R\sin\alpha, \qquad z = a\alpha;$$

une droite perpendiculaire à l'axe du cylindre sur lequel cette hélice est tracée et qui s'appuie sur l'axe a pour équations

$$z = h, \qquad y = x\tan\alpha;$$

en exprimant que la droite rencontre l'hélice, on a la condition $a\alpha = h$: l'équation du conoïde engendré est donc

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{z}{a}.$$

## Surfaces de révolution.

173. On appelle *surface de révolution* toute surface engendrée par la rotation d'une courbe fixe, plane ou gauche, autour d'un axe $\Delta$. Tout point de la courbe donnée décrit un cercle ayant son centre sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à cet axe, et qu'on nomme *parallèle*. Une surface de révolution peut donc être considérée comme engendrée par un cercle mobile dont le centre décrit une droite fixe (l'axe) et dont le plan reste perpendiculaire à cette droite, c'est-à-dire un cercle ayant pour axe la droite $\Delta$; ce cercle mobile étant assujetti à rencontrer une directrice fixe.

Ce second mode de génération va nous permettre de trouver la forme de l'équation de toute surface de révolution.

En effet, tout cercle dont le centre est sur un axe $\Delta$ perpendiculaire à son plan peut être considéré comme l'intersection d'une sphère ayant son centre en un point quelconque de l'axe et d'un plan perpendiculaire à cet axe; et, par conséquent, si $P = 0$ est l'équation d'un plan perpendiculaire à $\Delta$ et $\sigma = 0$, l'équation d'une sphère déterminée ayant son centre sur $\Delta$, les équations de tout cercle satisfaisant aux conditions données pourront se mettre sous

la forme

$$(1) \qquad \sigma = a, \qquad P = b$$

et réciproquement, quels que soient $a$ et $b$, ce système représente un cercle satisfaisant à ces conditions. Pour que ce cercle rencontre une courbe fixe, il faut et il suffit qu'il y ait entre $a$ et $b$ une relation

$$(2) \qquad f(a, b) = 0,$$

qu'on obtiendra en éliminant $x, y, z$ entre les équations du cercle mobile et celles de la directrice donnée; donc la surface engendrée aura pour équation

$$f(\sigma, P) = 0.$$

Ainsi, l'équation d'une surface de révolution quelconque peut toujours être formée au moyen de deux fonctions $\sigma, P$; $\sigma = 0$ étant l'équation d'une sphère et $P = 0$ celle d'un plan.

174. *Réciproquement,* toute équation de la forme précédente représente une surface de révolution dont l'axe est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère $\sigma$ sur le plan P.

En effet, une équation de cette forme peut toujours être regardée comme obtenue en éliminant deux paramètres $a$, $b$ entre les équations (1) et (2).

On peut d'ailleurs faire le raisonnement suivant : soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées d'un point M de la surface représentée par l'équation donnée, de sorte que

$$f(\sigma_0, P_0) = 0,$$

$\sigma_0$, $P_0$ étant les résultats de la substitution des coordonnées de M aux coordonnées courantes. Les équations

$$\sigma = \sigma_0, \qquad P = P_0$$

représentent un cercle passant par M, ayant son centre sur la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère $\sigma$ sur le plan P et dont le plan est parallèle au plan $P_0$; or, un point quelconque $M_1$ de ce cercle est sur la surface, attendu qu'en vertu des équations $\sigma_1 = \sigma_0$, $P_1 = P_0$, on a

$$f(\sigma, P) = 0.$$

La surface peut donc être considérée comme engendrée par le mouvement d'un cercle mobile ayant pour axe une droite fixe.

**175.** *Cas particuliers.* — Supposons que l'axe de révolution soit l'axe des $z$, les coordonnées étant rectangulaires et soient

$$x = f(z), \qquad y = f_1(z),$$

les équations de la génératrice; un cercle ayant $Oz$ pour axe est défini par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \qquad z = b,$$

ou, plus simplement,

$$x^2 + y^2 = a', \qquad z = b.$$

Puisque ce cercle doit rencontrer la courbe donnée, on doit poser

$$f^2(b) + f_1^2(b) = a'$$

et, par suite, la surface engendrée a pour équation

$$x^2 + y^2 = f^2(z) + f_1^2(z).$$

Si la courbe génératrice est dans le plan $xOz$, par exemple, et définie par l'équation

$$f(x, z) = 0,$$

on a, pour un parallèle quelconque,

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \qquad f(\rho, z) = 0;$$

donc l'équation demandée est

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Application. — *Équation du tore.* — Considérons le cercle ayant pour équations

$$y = 0, \qquad (x - a)^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

la surface engendrée par ce cercle tournant autour de l'axe des $z$ a pour équation

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 - R^2 = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(a^2 + R^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 - R^2)z^2 + (a^2 - R^2)^2 = 0.$$

### Équation générale des surfaces de révolution du second degré.

176. Supposons qu'on prenne des axes rectangulaires, l'axe des $z$ étant l'axe d'une surface de révolution du second degré; la section par le plan $xOz$, c'est-à-dire la courbe méridienne, est une conique ayant pour axe de symétrie l'axe $Oz$; son équation dans le plan $xOz$ sera donc de la forme

$$Ax^2 + A'z^2 + 2Cz + D = 0;$$

donc la surface elle-même a pour équation

$$A(x^2 + y^2) + A'z^2 + 2Cz + D = 0$$

ou

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cz + D + (A' - A)z^2 = 0.$$

Si l'on fait un changement quelconque de coordonnées, la fonction

$$A\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2C}{A}z + \frac{d}{A}\right)$$

se change identiquement en $A\sigma$, et $z$ devient une fonction linéaire P des nouvelles coordonnées; donc l'équation la plus générale d'une surface de révolution du second degré est de la forme

$$A\sigma + P^2 = 0,$$

A étant une constante et $\sigma$ et P ayant la signification déjà donnée. Réciproquement, toute équation de cette forme représente évidemment une surface de révolution du second degré.

Nous allons vérifier ce résultat sur des exemples particuliers.

177. *Exemples de surfaces de révolution du second degré.*

1° *Ellipsoïde.* — Prenons trois axes rectangulaires et considérons l'ellipse tracée dans le plan des $x$, $z$ et ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

si l'on fait tourner cette ellipse autour de $Oz$, elle engendre un *ellipsoïde de révolution* ayant pour équation

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Si $a > c$, cette surface porte le nom d'*ellipsoïde aplati;* si $a < c$, c'est un *ellipsoïde allongé*.

2° *Hyperboloïde de révolution à une nappe.* — Surface engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe imaginaire. L'équation de la méridienne étant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

celle de l'hyperboloïde sera

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On voit que tout plan parallèle au plan des $x, y$, ayant pour équation $z = h$, coupe la surface suivant un parallèle réel, dont le rayon a pour expression

$$\frac{a}{c}\sqrt{h^2 + c^2}.$$

Cette surface peut être engendrée d'une autre manière. Considérons une droite $\Delta$ et un axe, et prenons pour axe des $x$ la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite $\Delta$, l'axe des $z$ étant l'axe de révolution, et enfin l'axe des $y$ étant perpendiculaire aux deux autres. Les équations de $\Delta$ sont de la forme

$$x = a, \qquad y = mz.$$

La surface engendrée par $\Delta$, tournant autour de $Oz$, a donc pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2 + m^2 + z^2$$

ou

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{m^2}{a^2} z^2 = 1;$$

il suffit de poser $m = \pm \frac{a}{c}$ pour que cette équation coïncide avec celle de l'hyperboloïde trouvé plus haut; ce qui prouve que cette surface peut être engendrée de deux manières, soit en faisant tourner la droite $\Delta$

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{c} z,$$

soit en faisant tourner la droite $\Delta'$

$$x = a, \qquad y = -\frac{a}{c} z,$$

l'une et l'autre autour de l'axe des $z$.

3° *Hyperboloïde de révolution à deux nappes.* — Considérons l'hyperbole ayant pour équation, dans le plan $xOz$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Si cette courbe tourne autour de son axe réel, elle engendre la surface défi-

nie par l'équation

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$$

un parallèle étant défini par

$$z = h, \qquad x^2+y^2 = \frac{a^2}{c^2}(h^2-c^2)$$

n'est réel que si $h > c$ ou $h < -c$. La surface n'a aucun point entre les plans ayant pour équations $z = -c$, $z = +c$; elle a donc *deux nappes*.

4° *Paraboloïde de révolution.* — Soit

$$x^2 - 2pz = 0$$

l'équation d'une parabole tracée dans le plan $xOz$; la surface engendrée par cette parabole tournant autour de son axe a pour équation

$$x^2+y^2-2pz = 0.$$

Si l'on suppose $p > 0$, cette surface n'a de points réels que du côté des $z$ positifs.

5° *Cône de révolution.* — La méridienne est une droite rencontrant l'axe. Soient

$$y = 0, \qquad z = x \operatorname{tang} \alpha$$

les équations de cette droite; la surface engendrée a pour équation

$$x^2+y^2-z^2\cot^2\alpha = 0.$$

6° *Cylindre de révolution.* — Supposons enfin que la droite

$$y = 0, \qquad x = a$$

tourne autour de $Oy$, la surface engendrée a pour équation

$$x^2+y^2 = a^2;$$

ce qui est évident, *a priori*.

*Remarque.* — Chacune des équations trouvées est bien de la forme $A\sigma + P^2 = 0$; ainsi, par exemple,

$$x^2+y^2-2pz \equiv (x^2+y^2+z^2-2pz) - z^2, \quad \text{etc.}$$

178. *Équations du cylindre et du cône de révolution rapportés à des axes rectangulaires quelconques.* — Soient

$$(1) \qquad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

les équations de l'axe et R le rayon du cylindre donné. On aura l'équation de ce cylindre en écrivant que la distance d'un quelconque de ses points à l'axe est égale à R; cette équation est donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &[b(x-x_0)-a(y-y_0)]^2+[c(y-y_0)-b(z-z_0)]^2\\ &\quad+[a(z-z_0)-c(x-x_0)]^2-R^2(a^2+b^2+c^2)=0.\end{aligned}\right.$$

En second lieu, supposons que $x_0$, $y_0$, $z_0$ soient les coordonnées du sommet S d'un cône et $\theta$ le demi-angle d'ouverture de ce cône, l'axe étant la droite représentée par les équations (1); en appelant $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point du cône, on a

$$\cos\theta=\frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

ou

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(a^2+b^2+c^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\cos^2\theta\\ &\quad-[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)]^2=0.\end{aligned}\right.$$

## PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

**179.** Théorème. — *Les normales à une surface de révolution aux différents points d'un même parallèle rencontrent l'axe de la surface en un même point et réciproquement.*

Prenons l'axe d'une surface de révolution pour axe des $z$; les coordonnées étant rectangulaires, l'équation de cette surface peut s'écrire

$$x^2+y^2=f(z).$$

La normale au point $(x, y, z)$ a pour équation

$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}=\frac{Z-z}{-f'(z)};$$

cette droite rencontre l'axe des $z$ en un point ayant pour coordonnées $X=0$, $Y=0$, $Z=z+\frac{1}{2}f'(z)$; ce point, ne dépendant que de $z$, reste donc le même pour tous les points d'un même parallèle.

Réciproquement, supposons qu'une surface soit telle que les normales menées à cette surface en tous les points de toute section plane, dont le plan est parallèle à un plan déterminé, rencontrent une droite perpendiculaire au plan de cette section; si cette droite

est prise pour axe des $z$, les coordonnées étant rectangulaires, et la surface ayant pour équation $f(x, y, z) = 0$, la condition pour que la normale au point $(x, y, z)$ rencontre cet axe est

$$\frac{x}{f'_x} = \frac{y}{f'_y};$$

or, si $z$ a une valeur constante $z_0$, l'équation $f(x, y, z_0) = 0$ donne

$$f'_x + y'_x f'_y = 0;$$

la condition obtenue peut donc s'écrire

$$x + y y'_x = 0;$$

ce qui prouve que l'expression $x^2 + y^2$ reste constante quand $z = z_0$; on a donc $x^2 + y^2 = c$, $c$ étant une constante dont la valeur dépend de $z_0$. Cela revient à dire que $x^2 + y^2$ est une fonction de $z$ seulement et, par suite, que l'équation de la surface est

$$x^2 + y^2 = f(x).$$

Ce théorème est donc démontré.

On peut l'établir encore ainsi. La normale en un point M étant perpendiculaire à la tangente en M à la section plane menée par M parallèlement au plan donné, sa projection sur le plan de cette section est normale à la section; donc la normale à la surface rencontrant l'axe donné, la normale à la section rencontre le pied de l'axe; cette section est donc telle que toutes les normales rencontrent un point fixe et, par suite, c'est une circonférence. On en conclut immédiatement que la surface est de révolution.

**180.** *Le plan tangent en tout point d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par ce point.*

La proposition est évidente géométriquement. En effet, le plan d'un parallèle étant perpendiculaire aux plans des méridiens, la tangente en M au parallèle est perpendiculaire au plan du méridien passant par M et, par suite, le plan tangent en M, contenant la tangente au parallèle, est perpendiculaire au plan méridien.

Voici, à titre d'exercice, la vérification par le calcul.

Soit

$$f(\sigma, P) = 0$$

l'équation d'une surface de révolution, en posant

$$\sigma = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \qquad P = ax + by + cz.$$

Le plan tangent au point $M(x, y, z)$ a pour équation

$$(X - x)\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\frac{\partial f}{\partial \sigma}[(X - x)(x - x_0) + (Y - y)(y - y_0) + (Z - z)(z - z_0)] \\ & \qquad + \frac{\partial f}{\partial P}[a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z)] = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que l'équation

$$(X - x)(x - x_0) + (Y - y)(y - y_0) + (Z - z)(z - z_0) = 0$$

est celle du plan perpendiculaire à AM, A étant le point de coordonnées $x_0, y_0, z_0$, et que

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

est le plan du parallèle mené par M; l'intersection de ces deux plans est perpendiculaire au plan méridien mené par M; donc la proposition est vérifiée. On peut aussi remarquer que le plan méridien de M ayant pour équation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ a & b & c \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

la condition d'orthogonalité des deux plans (1) et (2) est

$$\begin{vmatrix} 2\frac{\partial f}{\partial \sigma}(x - x_0) + a\frac{\partial f}{\partial P} & 2\frac{\partial f}{\partial P}(y - y_0) + b\frac{\partial f}{\partial P} & 2\frac{\partial f}{\partial \sigma}(z + z_0) + c\frac{\partial f}{\partial P} \\ a & b & c \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0;$$

elle est évidemment remplie.

**181.** *Plan bitangent au tore.* — Nous avons trouvé l'équation du tore

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

La méridienne se compose de deux cercles égaux, symétriques par rapport à l'axe des $z$; considérons une tangente commune intérieure à ces deux cercles; le plan mené par cette droite et perpendiculaire au plan méridien est bitangent au tore; je dis que ce plan coupe la surface suivant deux

cercles. En effet, le cercle de l'infini est un parallèle double; il en résulte que le plan considéré coupe la surface du tore suivant une courbe du $4^e$ degré ayant quatre points doubles, dont deux sont les points cycliques du plan bitangent et les deux autres les points de contact. La section se décompose donc en deux coniques passant par les points cycliques, c'est-à-dire en deux cercles.

C'est ce que nous allons vérifier par le calcul. Soit $\varphi$ l'angle que le plan bitangent fait avec le plan des $x, y$. Faisons un changement de coordonnées en conservant l'axe des $y$ et faisant tourner autour de l'angle $\varphi$ l'angle $xOz$. Les formules de transformation se réduisent ici aux suivantes

$$x = x_1 \cos\varphi - z_1 \sin\varphi, \qquad y = y_1, \qquad z = x_1 \sin\varphi + z_1 \cos\varphi;$$

on devra faire $z_1 = 0$ pour avoir l'équation de la section dans son plan, ce qui donne, en supprimant les indices,

$$(x^2 + y^2 + a^2 - R^2)^2 = 4x^2(a^2 - R^2) + 4a^2y^2.$$

En appliquant la méthode donnée Tome II, page 134, on reconnaît que cette équation représente deux cercles. On peut arriver à ce résultat de la manière suivante : ordonnons par rapport à $y$, ce qui donne

$$y^4 + 2y^2(x^2 + a^2 - R^2) + (x^2 + a^2 - R^2)^2 - 4x^2(a^2 - R^2) - 4a^2y^2 = 0,$$

ou, après une transformation facile,

$$y^4 + 2y^2(x^2 - a^2 + R^2) + (x^2 - a^2 + R^2)^2 = 4R^2y,$$

équation qui se met sous la forme

$$(x^2 + y^2 - a^2 + R^2 - 2Ry)(x^2 + y^2 - a^2 + R^2 + 2Ry) = 0.$$

On obtient bien ainsi deux cercles dont les centres sont sur l'axe des $y$ à une distance de l'origine égale au cercle générateur.

## Surfaces de translation.

**182.** Considérons deux courbes définies par les équations

$$(C) \qquad x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u)$$

et

$$(C_1) \qquad x = f_1(v), \qquad y = \varphi_1(v), \qquad z = \psi_1(v).$$

Le milieu de la droite joignant un point P de la première à un point Q de la seconde décrit une surface définie par les équations

$$2x = f(u) + f_1(v), \qquad 2y = \varphi(u) + \varphi_1(v), \qquad 2z = \psi(u) + \psi_1(v).$$

Ces surfaces, auxquelles M. S. Lie a donné le nom de *surfaces de translation,* peuvent être engendrées de deux façons par la translation d'une courbe. Effectivement, si $v$ conserve une valeur constante, ce qui revient à supposer le point Q fixe, le milieu de QM décrit évidemment, quand M se déplace sur la première courbe C, une courbe homothétique C', et dont le rapport de similitude est égal à $\frac{1}{2}$; si le point Q décrit la seconde courbe $C_1$, la courbe C' éprouve une translation et se déplace sur la surface obtenue. On verrait de même que cette même surface peut être engendrée par la translation d'une courbe $C'_1$ homothétique à $C_1$ dans le rapport $\frac{1}{2}$. Si l'on prend

$$x = f(u) + f_1(v), \qquad y = \varphi(u) + \varphi_1(v), \qquad z = \psi(u) + \psi_1(v),$$

on aura une surface susceptible d'être engendrée par la translation d'une courbe égale à C ou d'une courbe égale à $C_1$, ce qui est d'ailleurs évident par les formules précédentes, car, si $v = v_0$, on obtient le point dont les coordonnées sont $f(u) + f_1(v_0)$, $\varphi(u) + \varphi_1(v_0)$, $\psi(u) + \psi_1(v_0)$, en faisant subir au point ayant pour coordonnées $f(u)$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ une translation dont les composantes sont $f_1(v_0)$, $\varphi_1(v_0)$, $\psi_1(v_0)$, et qui reste par suite la même pour tous les points de la courbe C.

Ainsi, la courbe $u =$ const. est une courbe égale à C et qu'on peut faire coïncider avec C par une translation; de même, la courbe $v =$ const. est une courbe égale à $C_1$.

*Exemple.* — Les courbes C et $C_1$ sont définies par les équations

$$x = \frac{u^2}{2p}, \qquad y = u, \qquad z = 0,$$
$$x = \frac{v^2}{2q}, \qquad y = 0, \qquad z = v;$$

la surface de translation correspondante est déterminée par les formules

$$x = \frac{u^2}{2p} + \frac{v^2}{2q}, \qquad y = u, \qquad z = v,$$

son équation est donc

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Nous étudierons plus loin cette surface qui est un paraboloïde.

EXERCICES.

1. Étant données deux droites OA, OB, trouver la surface engendrée par la droite OM qui fait avec OA et OB deux angles MOA, MOB dont la somme est constante.

2. Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à trois plans fixes soit constante.

3. Une droite de longueur constante se déplace de façon que les extrémités glissent sur deux droites fixes, non situées dans un même plan. Lieu décrit par un point marqué sur cette droite; surface engendrée par la droite.

4. Lieu des centres des parallélogrammes qui ont leurs sommets sur les côtés d'un quadrilatère gauche.

5. Le côté AB d'un triangle ABC est inscrit dans un angle fixe MON, le plan du triangle fait avec le plan de cet angle un angle constant; trouver le lieu du sommet C.

— On trouve une ellipse : la somme ou la différence de ses demi-axes est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB. (TERQUEM.)

6. Lieu des points dont la somme des distances aux côtés d'un angle droit est constante.

7. Lieu des points dont la somme des distances aux côtés d'un trièdre trirectangle est constante.

8. On donne deux triangles ABC, A'B'C'. Par un point quelconque M du plan ABC on mène les droites MA, MB, MC; on prend dans l'espace un point S, tel que dans le tétraèdre SA'B'C' on ait

$$SA' = MA, \qquad SB' = MB, \qquad SC' = MC;$$

le lieu de S est une surface du second degré. (JACOBI.)

9. On donne une sphère et un point A sur cette sphère; une sécante AP coupe cette sphère en P; on prend sur AP le segment PM égal à une longueur donnée $a$; lieu de M.

10. Lieu des points M de l'espace tels que

$$MF \pm MF' = 2a \quad \text{ou} \quad MF.MF' = a^2,$$

F et F' étant deux points fixes.

11. La surface définie par les équations

$$x = \cos u \cos 2v, \qquad y = \cos u \sin 2v, \qquad z = \sin u(\cos v - \cos u \sin v)$$

est de révolution. Prouver qu'elle n'a qu'une *face*. (HOPPE.)

12. L'angle des droites qui joignent un point quelconque d'un tore aux points de contact d'un plan bitangent est constant.

13. Une sphère doublement tangente à un tore le coupe suivant deux cercles.

14. Dans un tore, on inscrit deux sphères dont les centres sont dans un même plan méridien. Démontrer que les tangentes menées d'un point quelconque du tore à ces deux sphères ont un produit proportionnel à la distance du point au plan méridien considéré.

15. On inscrit trois sphères dans un tore. Démontrer que, si d'un point quelconque du tore on leur mène des tangentes, si $c$, $c'$, $c''$ désignent les dis-

tances des centres des sphères et $t$, $t'$, $t''$ les longueurs des tangentes, on a

$$ct \pm c't' \pm c''t'' = 0.$$

**16.** Trouver la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux cercles qui ont un rayon commun OC et dont les plans sont rectangulaires, et sur la droite AB joignant les extrémités des rayons OA et OB perpendiculaires à OC.

**17.** Pour tout cône ayant son sommet à l'origine, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0;$$

on peut dire que chacune de ces équations est l'*équation différentielle* de ces cônes. ($r$, $\varphi$, $\theta$ sont les coordonnées sphériques.) (T.)

**18.** L'équation différentielle des surfaces de révolution autour de l'axe des $z$ est $\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0$. (T.)

**19.** Interpréter l'équation $\sin\theta \frac{\partial r}{\partial \theta} + r\cos\theta = 0$. (T.)

**20.** Une surface est engendrée par un cercle variable dont le plan est parallèle à $x + y = 0$ et qui rencontre l'axe des $x$, l'axe des $y$ et la ligne $y = x$, $z = c$. Trouver l'équation de cette surface et le volume compris entre l'origine et le plan $x + y = c$. (T.)

**21.** Deux paraboles égales ont leur sommet commun à l'origine; leurs axes coïncident avec l'axe des $x$, mais sont opposés; le plan de l'une est le plan des $x$, $y$; celui de la seconde, le plan des $x$, $z$. Une droite variable parallèle au plan $y = z$ rencontre ces deux paraboles. Lieu de sa trace sur le plan des $y$, $z$. (T.)

**22.** Lieu des points de contact des plans tangents menés par un point donné aux surfaces dont l'équation $f(x, y, z, a) = 0$ renferme un paramètre variable $a$.

**23.** Si le cône $x^2 + y^2 = z(mx + z)$ coupe une sphère ayant son centre à l'origine, trouver la projection de la courbe d'intersection sur le plan des $x$, $z$. (T.)

**24.** Un cercle touche l'axe des $z$ à l'origine et rencontre toujours une ligne droite située dans le plan des $x$, $y$; trouver l'équation de la surface engendrée. Prouver que l'origine est un point singulier et prouver que, dans *le voisinage* de l'origine, la surface peut être considérée, approximativement, comme engendrée par un cercle ayant son plan parallèle au plan des $x$, $y$ et son rayon proportionnel à $z^2$. (T.)

**25.** Lieu du point M tel que le plan mené par M et perpendiculaire à OM détache du trièdre des axes un volume constant. (T.)

**26.** Trouver la surface engendrée par une droite qui est parallèle au plan des $x$, $y$ et rencontre l'axe des $z$ et la courbe $xyz = a^3$, $x^2 + y^2 = c^2$. (T.)

27. Équation de la surface engendrée par une droite de longueur donnée qui se meut parallèlement au plan des $x, y$, dont une extrémité est dans le plan des $y, z$ et l'autre sur la courbe $x = \varphi(z)$ tracée dans le plan des $x, z$. (T.)

28. Équation de la surface engendrée par une droite rencontrant à angle droit la droite $x + y = 0$, $z = 0$ et rencontrant la parabole $x^2 = az$, $y = 0$. (T.)

29. La droite AB de longueur donnée s'appuie par ses extrémités sur deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$; on abaisse la perpendiculaire OC sur AB et de C comme centre avec CO, pour rayon, on trace un cercle dans un plan perpendiculaire à $xOy$; équation de la surface engendrée par ce cercle. (T.)

30. On donne les équations d'une droite $\Delta$ et l'équation d'une courbe rapportée à cette droite et à une perpendiculaire à $\Delta$ menée par un de ses points. Équation de la surface de révolution engendrée par cette courbe tournant autour de $\Delta$.

31. Lieu des points équidistants d'une droite et d'un plan.

32. Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites quelconques est constante.

33. Prouver que la surface qui a pour équation, en axes rectangulaires,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$$

est de révolution. Trouver son axe.

34. On donne un cylindre droit vertical; une hélice tracée sur ce cylindre; une sphère inscrite dans ce cylindre. Une droite horizontale se meut en s'appuyant sur l'hélice et en restant tangente à la sphère. Équation de la surface engendrée. (DEWULF.)

35. Un conoïde, circonscrit à une sphère, a pour directrice rectiligne une tangente à cette surface, perpendiculaire au plan directeur. On demande : 1° l'équation du conoïde; 2° les équations de la courbe suivant laquelle il touche la sphère.

— La courbe de contact est la même que la courbe trajectoire de l'Exercice 4 du Chapitre VI. En outre, si l'on considère le triangle sphérique ayant pour côtés deux quadrants perpendiculaires et la demi-trajectoire passant par leurs extrémités, ce triangle est équivalent au carré construit sur le rayon de la sphère. (VIVIANI.)

36. Une circonférence C, de rayon R, roule dans l'intérieur d'une circonférence fixe C′ de rayon 2R, en entraînant une circonférence C″ qui a, avec la circonférence C, un diamètre commun, mais dont le plan est perpendiculaire au plan des circonférences C, C′. On demande : 1° quelle est la ligne décrite dans l'espace par un point quelconque lié à la circonférence C″; 2° quelle est la surface engendrée par C″. (E. CATALAN.)

# CHAPITRE IX.

## NOTIONS SUR LES SURFACES RÉGLÉES.

---

**183.** *Définition des surfaces réglées.* — On nomme *surface réglée* toute surface qui peut être engendrée par le mouvement d'une ligne droite. Ainsi par exemple le plan, les cylindres, les cônes, l'hélicoïde à plan directeur, le lieu des tangentes à une courbe gauche, etc., sont des surfaces réglées. Nous verrons que toutes les surfaces du second degré sont réglées ; seulement il y aura à distinguer celles qui admettent des génératrices rectilignes réelles.

**184.** *Expression des coordonnées d'un point d'une surface réglée au moyen de deux paramètres. Plan tangent en un point.* — Considérons une surface réglée S, et soit G une génératrice rectiligne de cette surface : G rencontre une courbe C tracée sur S en un point P ; soient $x, y, z$ les coordonnées de P : ce sont des fonctions d'un paramètre $u$. Si nous supposons que par chaque point P de la courbe C passe une génératrice G déterminée, les coefficients directeurs $a$, $b$, $c$ de G sont déterminés en fonction de $u$ : soit M un point de la génératrice G, nous pouvons considérer la distance PM comme un second paramètre arbitraire $v$, et, en supposant les axes rectangulaires et

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

les coordonnées X, Y, Z de M sont données par les formules

$$X = x + av, \qquad Y = y + bv, \qquad Z = z + cv.$$

Si nous représentons par $a', \ldots, x', \ldots$ les dérivées de $a, \ldots, x, \ldots$, par rapport à $u$, l'équation du plan tangent au point M est

$$\begin{vmatrix} X - x - av & Y - y - bv & Z - z - cv \\ x' + a'v & y' + b'v & z' + c'v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' + a'v & y' + b'v & z' + c'v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie ainsi que le plan tangent en M contient la génératrice PM, puisque

pour tout point de cette génératrice les éléments de la première et de la dernière ligne de ce déterminant sont proportionnels.

183. *Surfaces développables.* — Cherchons à quelles conditions le plan tangent à une surface réglée est le même tout le long d'une génératrice.

L'équation du plan tangent en M développée suivant les éléments de la seconde ligne du déterminant peut se mettre sous la forme

$$A + Bv = 0;$$

pour que cette équation soit indépendante de $v$, il faut et il suffit que A et B aient un rapport indépendant de $v$, sans quoi l'équation précédente représenterait, quand $v$ varie, une infinité de plans passant par l'intersection des deux plans $A = 0$, $B = 0$.

Il faut donc que les équations

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

représentent un même plan et, par suite, que les mineurs du premier déterminant relatifs à la première ligne soient proportionnels aux mineurs correspondants du second déterminant; en d'autres termes, dans le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix},$$

les mineurs relatifs à deux lignes doivent être proportionnels; donc ce déterminant est nul, et réciproquement, s'il en est ainsi, les mineurs relatifs à deux lignes sont proportionnels; donc les déterminants A et B ne diffèrent que par un facteur indépendant de $v$. La condition demandée est donc

$$D = 0.$$

En posant

$$A = bc' - cb', \qquad B = ca' - ac', \qquad C = ab' - ba',$$

on a

$$D = Ax' + By' + Cz'.$$

*Interprétation de la condition* $D = 0$. — Si nous supposons maintenant que $v$ soit une fonction de $u$, le point M décrira une courbe. Cherchons dans quel cas la tangente en M à cette courbe sera, pour tous les points M, la droite PM elle-même. Les coordonnées X, Y, Z sont dès lors des fonctions de $u$, et l'on a

$$X' = x' + a'v + av',$$
$$Y' = y' + b'v + bv',$$
$$Z' = z' + c'v + cv',$$

et nous voulons que X', Y', Z' soient proportionnels à $a$, $b$, $c$; ce qui exige que

$$\frac{x'+a'v}{a}=\frac{y'+b'v}{b}=\frac{z'+c'v}{c},$$

ou, en introduisant une variable auxiliaire $\lambda$,

$$\begin{aligned} x'+a'v-a\lambda&=0,\\ y'+b'v-b\lambda&=0,\\ z'+c'v-c\lambda&=0. \end{aligned}$$

Il faut donc qu'il existe des valeurs de $v$ et de $\lambda$ vérifiant ces trois équations, qui sont linéaires; donc il faut et il suffit que $D=0$. Si cette condition est remplie, les équations précédentes se réduiront à deux, desquelles on pourra tirer $v$ en fonction de $u$. Aussi, en résumé, *pour que le plan tangent à une surface réglée demeure le même en tous les points d'une génératrice, et cela, pour toutes les génératrices, il faut et il suffit que les génératrices rectilignes de la surface soient toutes tangentes à une même courbe gauche.* On dit alors que la surface est *développable,* et la courbe gauche que nous venons de définir se nomme l'*arête de rebroussement.*

On peut encore remarquer que *si* D *n'est pas identiquement nul, mais s'annule pour une valeur de u, le plan tangent est le même tout le long de la génératrice qui correspond à cette valeur de u.*

186. *Détermination de l'arête de rebroussement.* — Nous supposons remplie la condition

$$Ax'+By'+Cz'=0.$$

Les équations écrites plus haut donnent alors

$$v=\frac{cy'-bz'}{A}=\frac{az'-cx'}{B}=\frac{bx'-ay'}{C},$$

équations équivalentes en vertu de la condition précédente et de l'identité

$$Aa+Bb+Cc=0.$$

Les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement sont donc

$$X=x+a\,\frac{cy'-bz'}{A},\qquad Y=y+b\,\frac{az'-cx'}{B},\qquad Z=z+c\,\frac{bx'-ay'}{C}.$$

*Cas particulier.* — Supposons les équations de la génératrice données sous la forme

$$X=az+\alpha,\qquad Y=bz+\beta.$$

On peut poser $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=0$ et recommencer les calculs précédents

on trouvera comme condition, pour que la surface soit développable,

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0$$

et les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement seront

$$X = \alpha - \frac{a\beta'}{b'}, \qquad Y = \beta - \frac{b\alpha'}{a}, \qquad Z = \frac{b\alpha' - a\beta'}{ab' - ba'};$$

mais $\beta' = \frac{b'\alpha'}{a'}$, donc on peut écrire

$$X = \frac{\alpha a' - a\alpha'}{a'}, \qquad Y = \frac{\beta b' - b\beta'}{b'}, \qquad Z = -\frac{\alpha'}{a'}.$$

THÉORÈME. — *Le plan tangent en un point* M *d'une surface développable est le plan osculateur à l'arête de rebroussement au point de contact de la génératrice rectiligne qui passe par* M.

En effet, on peut supposer que le point P, origine des abscisses $v$ soit précisément le point de contact de la génératrice G avec l'arête de rebroussement. On a alors

$$a = kx', \qquad b = ky', \qquad c = kz'$$

et les coordonnées du point M sont

$$X = x + wx', \qquad Y = y + wy', \qquad Z = z + wz',$$

en posant $w = kv$. Le plan tangent en M a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' + wx'' & y' + wy'' & z' + wz'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0$$

ou, plus simplement,

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui démontre la proposition.

187. ***Point central, ligne de striction, paramètre de distribution, formule de Chasles.*** — Considérons deux génératrices G, $G_1$ d'une surface réglée quelconque et soit $RR_1$ leur perpendiculaire commune. Si $G_1$ vient se confondre avec G, le pied R de la perpendiculaire commune sur G tend, en général, vers un point limite déterminé $\omega$, qu'on nomme le *point central* de G; le lieu des points centraux se nomme *ligne de striction*. En conservant les mêmes notations, nous allons chercher la limite de PR. Si nous appelons $a_1$, $b_1$, $c_1$ les paramètres directeurs de $G_1$, l'une des équations de

la perpendiculaire $RR_1$ est

$$\begin{vmatrix} X-x_1 & Y-y_1 & Z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ bc_1-cb_1 & ca_1-ac_1 & ab_1-ba_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$x_1, y_1, z_1$ étant les coordonnées du point $P_1$ de rencontre de $G_1$ avec la courbe C.

Les coordonnées de R étant $x+av$, $y+bv$, $z+cv$, $v$ est déterminé par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_1+av & y-y_1+bv & z-z_1+cv \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ bc_1-cb_1 & ca_1-ac_1 & ab_1-ba_1 \end{vmatrix} = 0.$$

d'où

$$v\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ bc_1-cb_1 & ca_1-ac_1 & ab_1-ba_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ bc_1-cb_1 & ca_1-ac_1 & ab_1-ba_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$a_1 = a+\Delta a, \qquad b_1 = b+\Delta b, \qquad c_1 = c+\Delta c,$$
$$x_1 = x+\Delta x, \qquad y_1 = y+\Delta y, \qquad z_1 = z+\Delta z,$$

en divisant par $\Delta u$ et faisant tendre $\Delta u$ vers zéro, on obtient

$$\lim v = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2}.$$

Le numérateur peut se simplifier. En effet, le coefficient de $x'$, par exemple, est égal à

$$b(ab'-ab')-c(ca'-a'c) = a(aa'+bb'+cc')-a'(a^2+b^2+c^2);$$

or l'équation $a^2+b^2+c^2=1$ donne $aa'+bb'+cc'=0$, donc ce coefficient se réduit à $-a'$; on a ainsi finalement

$$\lim v = -\frac{a'x'+b'y'+c'z'}{A^2+B^2+C^2}.$$

Il convient de remarquer qu'on ne peut supposer que l'on a constamment $A=B=C=0$, car, dans ce cas,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

d'où l'on tire

$$\frac{b}{a} = \text{const. et } \frac{c}{a} = \text{const.},$$

et, par suite, la surface serait un cylindre. Nous laisserons ce cas particulier de côté.

Quand la surface est développable, le point central est le point de contact de G avec l'arête de rebroussement. En effet, si l'on suppose que le point P soit précisément ce point de contact, on a

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

et, par suite,

$$a'x' + b'y' + c'z' = 0.$$

Reprenons le cas d'une surface réglée quelconque, et soit $\varphi$ l'angle des deux génératrices infiniment voisines G, $G_1$. Si $\delta$ est la longueur de la perpendiculaire commune à G et $G_1$, on a

$$\frac{\delta}{\sin\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}$$

d'où

$$\lim \frac{\delta}{\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

ou

$$\lim \frac{\delta}{\varphi} = \frac{Ax' + By' + Cz'}{A^2 + B^2 + C^2} = k;$$

si la surface est développable $k = 0$, et réciproquement.

Cela étant, prenons pour point P, origine des abscisses $v$, le point central $\omega$, c'est-à-dire posons

$$a'x' + b'y' + c'z' = 0$$

et soit $\overline{\omega M} = \rho$, M étant un point quelconque de la génératrice G; cherchons le plan tangent en M; son équation est

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' + a'\rho & y' + b'\rho & z' + c'\rho \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Les cosinus directeurs de ce plan sont proportionnels à

$$bz' - cy' + A\rho, \qquad cx' - az' + B\rho, \qquad ay' - bx' + C\rho;$$

ceux du plan tangent en $\omega$ sont proportionnels à

$$bz' - cy', \qquad cx' - az', \qquad ay' - bx'.$$

Soit $\theta$ l'angle de ces deux plans; on a

$$\operatorname{tang}\theta = \rho\,\frac{\sqrt{\Sigma[B(ay'-bx')-C(cx'-az')]^2}}{\Sigma(bz'-cy')^2+\rho\,\Sigma A(bz'-cy')}.$$

Or

$$\Sigma A(bz'-cy') = \Sigma x'(Bc-bC) = a'x'+b'y'+c'z' = 0$$

et, par suite, en vertu du résultat précédent et de l'identité de Lagrange, on a

$$\Sigma[B(ay'-bx')-C(cx'-az')]^2 = (A^2+B^2+C^2)\,\Sigma(bz'-cy')^2;$$

en outre

$$\begin{aligned} &B(ay'-bx')-C(cx'-az') \\ &\quad = a(By'+Cz')-x'(Bb+Cc) = a(Ax'+By'-Cz'), \end{aligned}$$

donc

$$\Sigma[B(ay'-bx')-C(cx'-az')]^2 = (Ax'+By'+Cz')^2;$$

on trouve ainsi, en définitive,

$$\operatorname{tang}\theta = \rho\,\frac{A^2+B^2+C^2}{Ax'+By'+Cz'} = \frac{\rho}{k},$$

pourvu que l'on compte $\theta$ avec le signe $+$ dans un sens convenable. Cette formule a été donnée par Chasles.

Si $\rho$ croît de $0$ à $+\infty$, $\theta$ varie de $0$ à $+\frac{\pi}{2}$, si l'on suppose $k > 0$, et si $\rho$ décroît de $0$ à $-\infty$, $\theta$ varie de $0$ à $-\frac{\pi}{2}$. Il en résulte que tout plan mené par G est tangent à la surface en quelque point de G.

Cette dernière remarque entraîne une conséquence importante.

Si l'on cherche le nombre de plans tangents menés par une droite $\Delta$ à une surface réglée, on en trouvera, en général, autant qu'il y a de points communs à la surface et à la droite $\Delta$. En effet, soit M l'un de ces points, il passe par M une génératrice rectiligne G, et le plan, formé par $\Delta$ et G, est un plan tangent. Réciproquement, si nous considérons un plan tangent à la surface mené par $\Delta$, ce plan tangent contient une génératrice qui rencontre $\Delta$ en un point M; ce point est le point de contact. Il y a donc, en général, autant de plans passant par $\Delta$ que de points de rencontre de $\Delta$ avec la surface.

Ce raisonnement paraît en défaut pour une quadrique, car nous verrons plus loin que par chaque point d'une quadrique passent deux génératrices rectilignes; mais les quatre génératrices, menées par les deux points d'intersection de $\Delta$ avec une quadrique, se trouvent dans deux plans, et l'on n'obtient, en définitive, que deux plans tangents.

On nomme *classe* d'une surface le nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par une droite. La *classe* d'une surface réglée est donc égale à *son degré*.

Les surfaces développables ne sont pas comprises dans le raisonnement précédent, puisque un plan quelconque mené par une génératrice n'est pas

tangent, en général, à la surface. Dans le cas des surfaces développables, on nomme *classe* le nombre de plans tangents qu'on peut mener par un point quelconque.

188. Nous avons vu que les cosinus directeurs du plan tangent en M sont proportionnels à

$$A + \frac{1}{\rho}(bz' - cy'), \qquad B + \frac{1}{\rho}(cx' - az'), \qquad C + \frac{1}{\rho}(ay' - bx');$$

donc, si M est à l'infini sur G, les cosinus sont proportionnels à A, B, C.

Si l'on mène par un point fixe, par exemple par l'origine des coordonnées des parallèles à toutes les génératrices G, on obtient un cône qu'on nomme le *cône directeur de la surface*. Pour obtenir les cosinus directeurs du plan tangent à ce cône le long de la génératrice $g$ parallèle à G, considérons deux génératrices infiniment voisines $g$ et $g_1$, dont les cosinus sont $a$, $b$, $c$ et $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$. Le plan mené par $g$ et $g_1$ a pour équation

$$x(b\Delta c - c\Delta b) + y(c\Delta a - a\Delta c) + z(a\Delta b - b\Delta a) = 0;$$

donc le plan tangent cherché a pour équation

$$x(bc' - cb') + y(ca' - ac') + z(ab' - ba') = 0.$$

Ainsi le plan tangent à la surface réglée, dont le point de contact est à l'infini sur G, est parallèle au plan tangent au cône directeur le long de $g$. Il en résulte que le plan tangent au point central, plan que nous appellerons le *plan central*, est perpendiculaire au plan tangent suivant $g$ au cône directeur.

Dans le cas particulier où les génératrices G sont toutes parallèles à un même plan $\Delta$, le cône directeur se réduit à un plan directeur. Alors la perpendiculaire commune à deux génératrices G, $G_1$ perce le plan $\Delta$ au point d'intersection des projections de G et $G_1$ sur $\Delta$; le point central est donc le point de G qui se projette sur $\Delta$ au point de contact de la projection de G avec son enveloppe, et le plan central est perpendiculaire au plan directeur $\Delta$.

189. *Dans toute surface réglée, le rapport anharmonique de quatre plans tangents menés par une même génératrice* G *est égal au rapport anharmonique de leurs points de contact.*

Cela résulte immédiatement de la formule de Chasles. Coupons le faisceau des quatre plans tangents par une perpendiculaire au plan central; les distances des points d'intersections au plan central, proportionnelles aux tangentes des angles que les plans tangents font avec le plan central, sont aussi proportionnelles aux distances des points de contact au point central. Si l'on préfère, en prenant pour axe des $z$ la génératrice G et pour plan des $x$, $z$ le plan central, l'origine étant le point central et enfin les coordonnées étant

rectangulaires, l'équation d'un plan tangent en M dont la cote est $z$ étant $y = mx$, on a

$$m = \frac{z}{k},$$

d'où il suit que

$$\frac{m_1 - m_3}{m_1 - m_4} : \frac{m_2 - m_3}{m_2 - m_4} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

**190.** On déduit de là que, si deux surfaces réglées ont une génératrice commune G, elles ont même plan tangent en deux points de G, et, si elles en ont plus de deux, elles se raccordent tout le long de G.

C'est d'ailleurs ce que montre le calcul; en effet, comptons les distances à partir du point central $\omega$ de la première surface, et soit $\overline{\omega\omega_1} = \rho_1$, $\omega_1$ étant le point central de la seconde, enfin soit $\theta_1$ l'angle que le plan central de la seconde surface fait avec le plan central de la première. Si l'on nomme $\theta'$ l'angle que le plan tangent en M à la seconde surface fait avec son plan central, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\rho}{k}, \qquad \operatorname{tang}\theta' = \frac{\rho'}{k'};$$

les deux plans tangents coïncideront si

$$\theta' = \theta - \theta_1, \qquad \rho' = \rho - \rho_1,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta_1) = \frac{\rho - \rho_1}{k'},$$

ce qui donne

$$k'\left(\frac{\rho}{k} - \operatorname{tang}\theta_1\right) = (\rho - \rho_1)\left(1 + \frac{\rho}{k}\operatorname{tang}\theta_1\right).$$

On obtient ainsi une équation du second degré en $\rho$.

Si les deux surfaces ont même plan directeur, $\theta_1 = 0$ et l'équation s'abaisse au premier degré, et, par suite, il n'y a plus qu'un point où le plan tangent soit le même.

Donc, si deux surfaces réglées ont trois plans tangents communs en trois points d'une même génératrice, elles sont tangentes en chacun des points de cette génératrice, et, dans le cas où elles ont même plan directeur, si elles ont deux plans tangents communs en deux points d'une génératrice commune, elles se raccordent tout le long de cette génératrice.

**191.** Si l'on connaît les plans tangents en trois points A, B, C d'une génératrice G, le plan tangent en tout autre point M est déterminé, comme le montre le théorème du n° 189. On peut l'obtenir par une construction ingénieuse indiquée par MM. Mannheim et Dewulf. Menons par G un plan H quelconque et, dans ce plan, traçons sur AB un segment capable de l'angle que le plan tangent en B fait avec le plan tangent en A; puis, du même côté, traçons sur BC un segment capable de l'angle que le plan tangent en C fait

avec le plan tangent en B; les deux cercles obtenus se coupent en B et en un second point D; l'angle BDM est égal à l'angle que le plan tangent en M fait avec le plan tangent en C, car, si l'on coupe le plan H par des plans perpendiculaires menés par DA, DB, DC, DM, le rapport anharmonique du faisceau de ces quatre plans est égal à celui des quatre points A, B, C, M. Inversement, si le quatrième plan tangent est donné, la même construction permet de déterminer son point de contact M.

192. Enfin, nous indiquerons une détermination remarquable du point central donnée par M. G. Darboux. Si l'on porte sur une perpendiculaire à G, menée par le point central, une longueur égale à $k$ de O en A, l'angle MAO est précisément égal à $\theta$, puisque $\operatorname{tang} \mathrm{MAO} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}\cdot$ Or on peut mener par G deux plans tangents au cercle de l'infini, qui, par cela seul qu'ils passent par G, sont aussi tangents à la surface considérée.

Si l'on conserve les mêmes axes qu'au n° 189, un plan mené par G, ayant pour équation $y = mx$, sera tangent au cercle de l'infini si $m = \pm i$.

Le point de contact est déterminé par l'équation

$$\frac{z}{k} = \operatorname{tang}\theta = \pm i.$$

D'après cela, si l'on détermine, avec des axes quelconques, les deux plans tangents au cercle de l'infini menés par la génératrice G, la distance de leurs points de contact divisée par $2i$ donne pour quotient le paramètre de distribution $k$, et le milieu du segment formé par ces points de contact est le point central de G.

## EXERCICES.

1. Vérifier que les équations

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2),$$
$$b^2 z = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2+y^2)$$

représentent des surfaces développables. (T.)

2. Trouver la surface engendrée par les normales à une surface réglée gauche, menées en tous les points d'une même génératrice.

3. Appliquer les formules générales relatives aux surfaces réglées à la surface engendrée par la droite

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \lambda\left(\frac{x}{a} - 1\right), \qquad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a} + 1\right),$$

ou par la droite

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \mu\left(\frac{x}{a} + 1\right), \qquad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a} - 1\right),$$

$\lambda$ et $\mu$ désignant des paramètres variables.

Trouver la ligne de striction.

**4.** Mêmes questions pour la surface engendrée par la droite

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda},$$

ou par la droite

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\mu}.$$

**5.** Trouver la ligne de striction de la surface développable circonscrite à deux ellipses dont les axes sont parallèles et les centres sont sur une perpendiculaire à leurs plans.

**6.** Si les deux plans tangents communs à deux surfaces réglées en deux points d'une génératrice commune sont isotropes, ces deux surfaces se coupent le long de cette génératrice sous un angle constant. Réciproque.

**7.** Deux surfaces réglées ayant même paramètre de distribution le long d'une génératrice commune peuvent être placées de manière à se couper, le long de cette génératrice, suivant un angle constant.

— Examiner ce qui arrive si les paramètres sont égaux et de signes contraires.

**8.** Sur une surface donnée on peut, par chaque point, tracer deux courbes telles que les normales à la surface le long de chacune de ces courbes décrivent une surface développable.

— En effet, soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles de la normale avec trois axes rectangulaires; si l'on porte sur la normale une longueur R convenablement choisie à partir du pied, on devra avoir

$$\frac{d(x + R\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{d(y + R\cos\beta)}{\cos\beta} = \frac{d(z + R\cos\gamma)}{\cos\gamma}$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{dx + R\,d\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{dy + R\,d\cos\beta}{\cos\beta} = \frac{dz + R\,d\cos\gamma}{\cos\gamma}.$$

Mais, si l'on ajoute membre à membre après multiplication des deux termes par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on reconnaît que la somme des numérateurs est nulle, tandis que celle des dénominateurs égale 1. Donc

$$\frac{d\cos\alpha}{dx} = \frac{d\cos\beta}{dy} = \frac{d\cos\gamma}{dz} = -\frac{1}{R}.$$

(Olindes Rodrigues.)

Ensuite, en tenant compte des formules

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad d\cos\alpha = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - p\,d\cos\gamma,$$

on obtient

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

et, en remplaçant $dp$ par $r\,dx + s\,dy$ et $dq$ par $s\,dx + t\,dy$,

$$\frac{(1+p^2)\,dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + (1+q^2)\,dy}{s\,dx + t\,dy},$$

ou enfin

$$[s(1+p^2) - pqr]\,dx^2 + [t(1+p^2) - s(1+q^2)]\,dx\,dy + [pqt - s(1+q^2)]\,dy^2 = 0,$$

ce qui donne, en chaque point, deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, à chacune desquelles correspond une valeur de R.

# CHAPITRE X.

## ENVELOPPES.

193. *Définition.* — Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

l'équation d'une surface dépendant d'un paramètre arbitraire $a$. Les surfaces correspondant à deux valeurs infiniment voisines $a$ et $a+h$ du paramètre déterminent une courbe définie par les deux équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad f(x, y, z, a+h) = 0,$$

ou encore par

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{f(x, y, z, a+h) - f(x, y, z)}{h} = 0.$$

La courbe d'intersection a donc pour limite, quand $h$ tend vers zéro, la courbe définie par les deux équations

$$(2) \qquad f(x, y, z, a) = 0, \qquad f'_a(x, y, z, a) = 0.$$

Cette courbe se nomme une *caractéristique*. On nomme *enveloppe* de la famille de surfaces définies par l'équation (1) le lieu de

ses caractéristiques. L'équation de l'enveloppe s'obtient donc en éliminant $a$ entre les équations (2).

Chacune des surfaces de la famille (1) se nomme une *enveloppée*. La propriété suivante justifie ces dénominations.

**194.** *En tous les points d'une caractéristique l'enveloppe est tangente à l'enveloppée correspondante.*

Considérons, en effet, un point $M(x, y, z)$ appartenant à la caractéristique qui correspond à une valeur déterminée $a_0$ du paramètre, et dont les équations sont, par suite,

$$f(x, y, z, a_0) = 0, \qquad f'_{a_0}(x, y, z, a_0) = 0.$$

Si l'on regarde $x$, $y$ comme des fonctions de $z$ et de $a$ définies par les équations (2), ces deux équations définissent l'enveloppe F. Les équations de la tangente en M à une courbe tracée sur F étant

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

$dx$, $dy$, $dz$ vérifient l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial a} da = 0,$$

où $a = a_0$; ou, plus simplement, en vertu de la seconde des équations (2),

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

ce qui prouve que toutes les tangentes de M à l'enveloppe sont dans le plan représenté par l'équation

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire, puisqu'on suppose $a = a_0$, dans le plan tangent en M à l'enveloppée qui a pour équation

$$f(x, y, z, a_0) = 0;$$

ce qui démontre la proposition.

**195.** Mais les enveloppes que nous venons de considérer ne sont

pas les seules. On peut, en effet, considérer des enveloppes de surfaces dépendant de deux paramètres arbitraires.

Effectivement, soit

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \tag{3}$$

une équation dans laquelle $a$ et $b$ désignent deux paramètres variables.

Attribuons à $a$ et $b$ des accroissements arbitraires infiniment petits $h$, $k$, et considérons la surface infiniment voisine de la première et ayant pour équation

$$f(x, y, z, a+h, b+k) = 0. \tag{4}$$

La courbe d'intersection peut être considérée comme définie par le système formé par l'équation (3) et par celle-ci

$$f(x, y, z, a+h, b+k) - f(x, y, z, a, b) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$hf'_a(x, y, z, a+\theta h, b+\theta k) + kf'_b(x, y, z, a+\theta h, b+\theta k) \quad (0 < \theta < 1.)$$

Si l'on suppose que $\frac{k}{h}$ ait une limite $\lambda$, la courbe d'intersection a pour limite la courbe définie par les deux équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad f'_a(x, y, z, a, b) + \lambda f'_b(x, y, z, a, b) = 0.$$

Mais, quelle que soit la valeur arbitraire $\lambda$, les points dont les coordonnées sont déterminées par les trois équations

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0. \tag{5}$$

sont sur cette courbe. On appelle encore *enveloppe* le lieu de ces points, qui ont reçu le nom de *points caractéristiques*.

**196.** *En chacun des points caractéristiques l'enveloppe est tangente à l'enveloppée.*

Les équations (5) peuvent être regardées comme définissant $x$, $y$, $z$ en fonction de $a$ et $b$. Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point M de l'enveloppe, correspondant à des valeurs $a_0$, $b_0$ des para-

mètres; la tangente en M à une courbe quelconque tracée sur cette enveloppe est définie, comme plus haut, par les équations

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

les différentielles $dx$, $dy$, $dz$ devant vérifier l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0,$$

où $a=a_0$, $b=b_0$. Mais on suppose $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, $\frac{\partial f}{\partial b}=0$; on voit donc, comme dans le cas d'un seul paramètre, que chacune des tangentes considérées est dans le plan

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

c'est-à-dire dans le plan tangent en M à l'enveloppée $(a_0, b_0)$.

*Exemples.*

197. Soit

$$ux+vy+wz+rt=0$$

l'équation d'un plan; si $u$, $v$, $w$, $r$ sont des fonctions d'un seul paramètre, l'enveloppe de ce plan sera une surface réglée, puisque les caractéristiques sont des droites. En outre, le plan tangent à l'enveloppe sera le même en tous les points d'une caractéristique $a_0$, car ce plan sera évidemment celui des plans considérés qui correspond à la valeur $a_0$ du paramètre; en d'autres termes, l'enveloppe est une *surface développable*. Les équations d'une génératrice sont donc

$$ux+vy+wz+r=0, \qquad u'x+v'y+w'z+r'=0,$$

où $u'$, $v'$, $w'$, $r'$ désignent les dérivées de $u$, $v$, $w$, $r$ prises par rapport à $a$.

On peut se proposer de trouver l'*arête de rebroussement*. Pour cela, si nous considérons un point M de la génératrice, dont les coordonnées $x$, $y$ soient des fonctions de $z$ et du paramètre $a$, quand on passe d'une génératrice à la génératrice infiniment voisine, le point M prend une nouvelle position M' et, si M appartient à l'arête de rebroussement, la droite MM' a pour limite la génératrice elle-même. Or les paramètres directeurs de MM' ont pour limites les différentielles $dx$, $dy$, $dz$ définies par les deux équations

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz+(u'x+v'y+w'z+r')da=0,$$
$$u'\,dx+v'\,dy+w'\,dz+(u''x+v''y+w''z+r'')da=0.$$

Le coefficient de $da$ est nul dans la première équation; or, il faut que $dx$,

$dy$, $dz$ soient proportionnels à $vw' - wv'$, $wu' - uw'$, $uv' - vu'$; donc on doit avoir

$$u''x + v''y + w''z + r'' = 0.$$

Cette équation, jointe à celles de la génératrice, achève de déterminer l'arête de rebroussement; on peut, en effet, tirer des trois équations obtenues $x, y, z$ en fonction du paramètre $a$.

Ainsi, l'enveloppe d'un plan mobile, dont l'équation ne dépend que d'un seul paramètre, est une surface réglée, lieu des tangentes à une courbe gauche. On peut démontrer que, réciproquement, une pareille surface réglée est l'enveloppe d'un plan mobile.

En effet, le plan tangent en un point d'une génératrice rectiligne est le même tout le long de cette génératrice et coïncide avec le plan osculateur au point de contact de cette génératrice avec la courbe gauche donnée; il en résulte que la limite de l'intersection des plans tangents, le long de deux génératrices infiniment voisines, est la limite de l'intersection de deux plans osculateurs en des points infiniment voisins de la courbe gauche donnée; or on démontre facilement que cette limite n'est autre que la tangente à la courbe gauche, c'est-à-dire précisément la première génératrice considérée. L'enveloppe des plans tangents est le lieu de ces génératrices, c'est-à-dire la surface considérée elle-même.

D'ailleurs, pour faire comprendre la proposition relative aux plans osculateurs sur laquelle nous venons de nous appuyer, il suffit de remarquer que, si $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ sont quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche, les plans $M_1M_2M_3$ et $M_2M_3M_4$ ont pour intersection la ligne $M_2M_3$ et, en général, cette ligne a pour limite la tangente en M. En tout cas, la démonstration par le calcul n'offre aucune difficulté.

198. Si $x, y, z$ sont les coordonnées d'un point d'une surface, on peut regarder $z$ comme fonction de $x$ et de $y$; si l'on pose

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

une surface développable sera caractérisée par l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

C'est ce qu'il est aisé de prouver. Remarquons d'abord que, si l'on se déplace sur une génératrice quelconque d'une surface développable, $p$ et $q$ demeurent constants; on peut déjà en conclure que $q$ est une fonction de $p$; mais nous allons établir directement cette proposition. Les coordonnées d'un point d'une surface développable peuvent se mettre sous la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

où $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ sont fonctions d'un paramètre $u$, vérifiant la condition (186)

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0.$$

On peut dire que les équations précédentes définissent $z$ et $u$ comme fonctions de $x$ et de $y$; par conséquent, en prenant les dérivées par rapport à $x$ et $y$ successivement, on obtient

$$1 = ap + (a'z + \alpha')\frac{du}{dx}, \qquad 0 = aq + (a'z + \alpha')\frac{du}{dy},$$
$$0 = bp + (b'z + \beta')\frac{du}{dx}, \qquad 1 = bq + (b'z + \beta')\frac{du}{dy},$$

et, par conséquent, en éliminant $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$,

$$\frac{ap-1}{bp} = \frac{aq}{bq-1} = \frac{a'z+\alpha'}{b'z+\beta'}.$$

Mais la condition $a'\beta' - b'\alpha' = 0$ montre que le dernier rapport est indépendant de $z$; donc

$$\frac{ap-1}{bp} = \frac{aq}{bq-1} = \frac{\alpha'}{\beta'},$$

et, par suite, en éliminant $u$ entre ces deux équations, on arrivera à une relation entre $p$ et $q$. Or, si l'on suppose $q = f(p)$, on en tire

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f'(p)\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial q}{\partial y} = f'(p)\frac{\partial p}{\partial y},$$

d'où il résulte que le déterminant des dérivées partielles de $p$ et $q$, c'est-à-dire $rt - s^2$, est nul.

**199.** Réciproquement, si $rt - s^2 = 0$, $q$ est une fonction de $p$. En effet, soient $p = F(x, y)$, $q = F_1(x, y)$; en éliminant $y$, on aura une relation entre $p$, $q$ et $x$ qu'on peut écrire ainsi

$$q = f(p, x),$$

et d'où l'on tire

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{dq}{dy} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy};$$

mais, par hypothèse, les dérivées de $p$ sont proportionnelles à celles de $q$: donc $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, et, par suite, $f(p, x)$ est indépendant de $x$. On peut donc poser $q = f(p)$. L'équation du plan tangent au point $(x, y, z)$ de la surface considérée étant

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

nous pouvons écrire

$$Z = pX + qY + z - px - qy.$$

Mais, si $q = f(p)$, je dis que $z - px - qy$ est aussi une fonction de $p$; en

effet, si l'on pose

$$v = px + qy - z$$

on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = rx + sy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = sx + ty;$$

de sorte que

$$r\frac{\partial v}{\partial y} - s\frac{\partial v}{\partial x} = y(rt - s^2) = 0.$$

Les dérivées de $v$ étant proportionnelles à celles de $p$, $v$ est une fonction de $p$. D'après cela, l'équation du plan tangent peut s'écrire

$$Z = pX + f(p)Y + \varphi(p):$$

l'enveloppe de ce plan est une surface développable.

200. Lorsque $rt - s^2 \neq 0$, l'équation du plan tangent renferme deux paramètres et, si l'on met cette équation sous la forme générale

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

la surface enveloppe pourra être considérée comme définie par cette équation jointe aux équations

$$x\frac{\partial u}{\partial a} + y\frac{\partial v}{\partial a} + z\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial h}{\partial a} = 0, \qquad x\frac{\partial u}{\partial b} + y\frac{\partial v}{\partial b} + z\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial h}{\partial b} = 0.$$

Mais il n'est pas inutile d'ajouter que toute surface peut être considérée comme étant l'enveloppe de ses plans tangents; la proposition a déjà été établie dans le cas des surfaces développables. En prenant comme variables indépendantes $x$ et $y$, le plan tangent ayant pour équation

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0,$$

nous devons égaler à zéro les dérivées du premier membre par rapport à $x$ et $y$, ce qui donne, tout calcul fait,

$$r(X - x) + s(Y - y) = 0,$$
$$s(X - x) + t(Y - y) = 0.$$

Si l'on suppose $rt - s^2 \neq 0$, on a donc bien $X = x$, $Y = y$ et par suite $Z = z$, X, Y, Z désignant un point de l'enveloppe, ce qui prouve que l'enveloppe est le lieu des points de contact.

On voit ainsi que tout plan tangent à une surface non développable ne peut *toucher* la surface qu'en un nombre limité de points. Dans le cas du second degré, un plan tangent coupe la surface suivant deux droites, il est vrai, mais il n'est *tangent* qu'au point de rencontre de ces deux droites.

201. *Cas de plusieurs paramètres liés par des équations données.* — Soit à trouver l'enveloppe des surfaces définies par l'équation

$$f(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

les paramètres étant assujettis à $n-1$ équations de condition :

$$\varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

où $p = 1, 2, \ldots, n-1$. On obtiendra dans ce cas l'enveloppe en procédant comme en Géométrie plane, c'est-à-dire en adjoignant aux $n$ équations données l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le déterminant formé, avec les dérivées prises par rapport aux paramètres, des $n$ fonctions $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Supposons maintenant que les $n$ paramètres ne soient assujettis qu'à $n-2$ équations de condition. Pour simplifier, considérons trois paramètres liés par une équation, et soit proposé de trouver l'enveloppe de la surface ayant pour équation

$$f(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

sachant que

$$\varphi(a, b, c) = 0.$$

Traitons $c$ comme une fonction de $a$ et de $b$; on doit poser

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{da} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{db} = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{da} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{db} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial b}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}.$$

On écrira donc que les dérivées de la fonction $f$ par rapport aux paramètres $a$, $b$, $c$ sont proportionnelles aux dérivées de $\varphi$ par rapport aux mêmes paramètres respectivement, et il ne restera plus qu'à éliminer $a$, $b$, $c$ entre quatre équations.

On en conclut, en imitant la démonstration donnée en Géométrie plane (t. I, 401), que l'on obtient l'enveloppe de la surface définie par l'équation

$$f(x, y, z, u, v, w, r) = 0,$$

homogène par rapport aux paramètres $u$, $v$, $w$, $r$ satisfaisant à une relation homogène

$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$

en éliminant les paramètres entre l'une des deux équations précédentes et celles qu'on obtient en écrivant que les dérivées de $f$ et de $\varphi$ par rapport à ces paramètres sont proportionnelles :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial w}}{\frac{\partial \varphi}{\partial w}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}.$$

Ainsi, pour avoir l'équation de l'enveloppe du plan

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

dont les coefficients vérifient l'équation homogène

$$F(u, v, w, r) = 0,$$

il suffit d'éliminer les paramètres $u$, $v$, $w$, $r$ entre l'une de ces équations et les suivantes

$$\frac{x}{F'_u} = \frac{y}{F'_v} = \frac{z}{F'_w} = \frac{t}{F'_r}.$$

L'équation $F = 0$ est l'*équation tangentielle de l'enveloppe*, et l'on voit que les coordonnées ponctuelles d'un point de l'enveloppe sont proportionnelles aux dérivées de la fonction F.

**202.** Si l'on avait $n$ paramètres liés par $n-2$ relations

$$\varphi_p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, n-2,$$

on adjoindrait aux équations données celles qu'on obtient en égalant à zéro les déterminants fonctionnels des fonctions $f$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\varphi_{n-2}$, obtenus en laissant de côté successivement deux paramètres $a_1$, puis $a_2$ par exemple, et en éliminant les $n$ paramètres entre les $n+1$ équations obtenues.

Mais on peut procéder d'une manière plus symétrique; supposons, pour fixer les idées, qu'on donne les équations

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, V) = 0, \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, V) = 0, \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma, V) = 0.$$

Nous devrons écrire les deux conditions

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} & \frac{\partial \varphi}{\partial V} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi}{\partial V} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} & \frac{\partial \varphi}{\partial V} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi}{\partial V} \end{vmatrix} = 0.$$

Or on sait que, pour qu'un déterminant soit nul, il faut et il suffit qu'il existe entre les éléments des rangées parallèles une même relation linéaire; on doit donc pouvoir déterminer des constantes $\lambda$, $\mu$ telles que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \gamma},$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial V} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial V},$$

et par suite aussi

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \beta}.$$

Mais, si l'on différentie les équations données, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial f}{\partial V} dV = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial V} dV = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \psi}{\partial V} dV = 0,$$

on voit que, en vertu des relations écrites plus haut en $\lambda$ et $\mu$, ces trois équations doivent se réduire à une seule, ou, en d'autres termes, la première par exemple, doit être identique à celle qu'on obtient en ajoutant membre à membre les deux dernières après multiplication par des facteurs convenables $\lambda$ et $\mu$. Il n'y a plus ensuite qu'à éliminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, V, $\lambda$, $\mu$ entre sept équations. Nous allons appliquer cette méthode remarquable à un exemple.

**203.** *Trouver l'enveloppe du plan défini par l'équation* (¹)

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = V,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, V *étant liés par les relations*

$$(2) \qquad \frac{\alpha^2}{V^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{V^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{V^2 - c^2} = 0,$$

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Différentions les équations (1), (2), (3) en regardant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, V comme des variables, ce qui donne

$$(4) \qquad x\, d\alpha + y\, d\beta + z\, d\gamma = dV,$$

$$(5) \qquad \alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{\alpha\, d\alpha}{V^2 - a^2} + \frac{\beta\, d\beta}{V^2 - b^2} + \frac{\gamma\, d\gamma}{V^2 - c^2} = k\, dV,$$

en posant

$$k = \left[\frac{\alpha^2}{(V^2 - a^2)^2} + \frac{\beta^2}{(V^2 - b^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(V^2 - c^2)^2}\right] V.$$

---

(¹) Surface de l'onde de l'ellipsoïde

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1.$$

(*Voir* MASCART, *Traité d'Optique*, t. I, p. 563.) Ce calcul est dû à A. Smith (*Philosophical Magazine*, t. XII, p. 335; 1838).

Pour appliquer la méthode exposée plus haut, nous devons déterminer $\lambda$ et $\mu$ tels que

(7) $$x = \lambda\alpha + \frac{\mu\alpha}{V^2 - a^2},$$

(8) $$y = \lambda\beta + \frac{\mu\beta}{V^2 - b^2},$$

(9) $$z = \lambda\gamma + \frac{\mu\gamma}{V^2 - c^2},$$

(10) $$1 = \mu k.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, V, $\lambda$, $\mu$ entre les équations (1), (2), (3), (7), (8), (9), (10).

Or, les équations (7), (8), (9) donnent, en vertu de (2) et (3),

$$V = \alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda.$$

En posant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on obtient

$$r^2 = V^2 + \mu^2 \frac{k}{V} = V^2 + \frac{\mu}{V}$$

ou

$$\mu = V(r^2 - V^2).$$

De là on tire

$$x = V\alpha\left(1 + \frac{r^2 - V^2}{V^2 - a^2}\right) = V\alpha\,\frac{r^2 - a^2}{V^2 - a^2}$$

et, par suite,

$$\frac{x}{r^2 - a^2} = \frac{V\alpha}{V^2 - a^2} = \frac{x - V\alpha}{r^2 - V^2}.$$

On peut donc écrire les équations

$$\frac{x}{r^2 - a^2} = \frac{x - V\alpha}{r^2 - V^2},$$

$$\frac{y}{r^2 - b^2} = \frac{y - V\beta}{r^2 - V^2},$$

$$\frac{z}{r^2 - c^2} = \frac{z - V\gamma}{r^2 - V^2},$$

d'où, en multipliant par $x$, $y$, $z$ et ajoutant,

(11) $$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1.$$

Cette équation peut d'ailleurs se transformer en l'écrivant ainsi

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

ou

$$\sum\left(\frac{x^2}{r^2-a^2}-\frac{x^2}{r^2}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{r^2-c^2}=0. \tag{12}$$

En chassant les dénominateurs, on obtient enfin, sous forme entière,

$$\left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\&\quad-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(c^2+a^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

L'enveloppe cherchée est donc une surface du quatrième ordre.

**204.** *Équations tangentielles.* — On peut regarder une surface soit comme le lieu de ses points, soit comme l'enveloppe de ses plans tangents. Si on l'envisage à ce dernier point de vue, il y a lieu de distinguer si la surface est développable ou non.

En effet, quand la surface n'est pas développable, une seule équation exprime qu'un plan lui est tangent ou, en d'autres termes, la surface n'a qu'une seule équation tangentielle. Effectivement, l'équation d'un plan tangent à cette surface dépend de deux paramètres; en l'écrivant sous la forme

$$ux+vy+wz+1=0,$$

$u$, $v$, $w$ étant des fonctions de deux paramètres; si l'on applique la méthode du n° **195**, on obtiendra une équation

$$F(u,v,w)=0,$$

ou, si l'on écrit l'équation du plan tangent sous forme homogène,

$$ux+vy+wz+rt=0,$$

on aura une équation homogène

$$F(u,v,w,r)=0,$$

qui est ce que nous avons appelé l'*équation tangentielle* de la surface; nous savons que les coordonnées ponctuelles du point de contact du plan $(u, v, w, r)$, dont les coefficients vérifient l'équation $F=0$, sont proportionnelles aux dérivées $F'_u$, $F'_v$, $F'_w$, $F'_r$.

L'équation

$$F(u+\lambda u', v+\lambda v', w+\lambda w', r+\lambda r')=0$$

détermine les plans tangents menés par l'intersection des deux plans $(u, v, w, r)$ et $(u', v', w', r')$. On voit ainsi que la *classe* est égale au degré de l'équation tangentielle.

**205.** Les choses se passent différemment quand il s'agit d'une surface développable.

En effet, si l'on conserve les mêmes notations, on voit que les coefficients $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$ de l'équation d'un plan tangent à une pareille surface étant fonctions d'un seul paramètre, si l'on applique la méthode du n° 193, on obtiendra *deux équations* entre ces coefficients, ou deux équations homogènes

$$F(u, v, w, r) = 0, \qquad F_1(u, v, w, r) = 0.$$

Donc, une surface développable est définie par un système de *deux équations tangentielles.*

Considérons, par exemple, le cône du second degré ayant pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Pour qu'un plan ayant pour équation

$$ux + vy + wz + r = 0,$$

lui soit tangent, il faut d'abord qu'il passe par son sommet, ce qui donne une première condition

$$r = 0.$$

En identifiant ensuite l'équation

$$ux + vy + wz = 0$$

avec celle d'un plan tangent au cône, on aura un calcul absolument identique à celui qui permet de trouver l'équation tangentielle d'une conique, en Géométrie plane, avec des coordonnées homogènes (ce qui s'explique en remarquant que le plan considéré sera tangent au cône, si l'intersection de ce plan par le plan $z = 1$ est tangente à l'intersection du cône par ce même plan).

On obtient ainsi *les deux équations tangentielles du cône :*

$$r = 0, \qquad au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

où $a, a', a'', b, b', b''$ sont les mineurs du discriminant du premier membre de l'équation ponctuelle de ce cône.

**206.** Il nous reste à prouver qu'une *courbe* a une équation tangentielle.

Supposons, en effet, que les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point d'une courbe soient exprimées en fonction d'un paramètre arbitraire $t$, les coordonnées d'un point quelconque de la tangente au point $(t)$ étant

$$f(t)+\lambda f'(t),\qquad f_1(t)+\lambda f_1'(t),\qquad f_2(t)+\lambda f_2'(t),$$

un plan contiendra cette tangente si

$$\begin{aligned} uf(t)+vf_1(t)+wf_2(t)+r&=0,\\ uf'(t)+vf_1'(t)+wf_2'(t)\qquad&=0; \end{aligned}$$

en éliminant $t$, on a bien une équation homogène en $u, v, w, r$.

Ainsi, il peut arriver qu'une équation tangentielle représente une ligne et non une surface.

L'équation

$$u^2+v^2+w^2=0$$

exprime que le plan $(u, v, w, r)$ est tangent au cercle de l'infini. Cette équation est l'équation tangentielle du cercle de l'infini.

Les équations tangentielles d'un cône isotrope, ayant son sommet à l'origine, sont donc

$$r=0,\qquad u^2+v^2+w^2=0.$$

Les équations du cône isotrope de sommet $(a, b, c)$ sont

$$au+bv+cw+r=0,\qquad u^2+v^2+w^2=0.$$

Considérons une courbe située dans le plan ayant pour équation

$$u'x+v'y+w'z+1=0.$$

Soit

$$ux+vy+wz+1=0$$

l'équation d'un second plan; l'intersection de ces deux plans sera tangente à la courbe considérée, si le plan mené par l'origine et par cette intersection, c'est-à-dire le plan ayant pour équation

$$(u-u')x+(v-v')y+(w-w')z=0,$$

est tangent au cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe donnée; on en conclut que cette courbe est représentée par une équation de la forme

$$F(u-u', v-v', w-w')=0,$$

F désignant une fonction homogène.

Réciproquement, l'équation précédente est vérifiée, quel que soit $\lambda$, si l'on pose

$$u=u'+\lambda\alpha,\qquad v=v'+\lambda\beta,\qquad w=w'+\lambda\gamma$$

et

$$F(\alpha, \beta, \gamma)=0.$$

Or l'équation du plan mobile étant alors

$$u'x + v'y + w'z + 1 + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0,$$

à chaque système de valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ correspondent tous les plans passant par une droite située dans le plan

$$u'x + v'y + w'z + 1 = 0;$$

l'enveloppe est donc une courbe située dans ce plan.

Si

$$u' = v' = w' = 0,$$

la courbe est dans le plan de l'infini; c'est facile à vérifier directement. Ainsi, par exemple, si l'équation donnée est

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

on a, en appliquant la méthode générale des enveloppes,

$$ux + vy + wz + t = 0, \qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w};$$

donc

$$t = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

## EXERCICES.

1. Trois points se meuvent avec des vitesses uniformes à partir de positions données sur trois axes rectangulaires; trouver l'enveloppe du plan passant par leurs positions contemporaines. (T.)

2. Une sphère de rayon constant passe par l'origine; trouver l'enveloppe des plans de contact des cônes circonscrits de sommet donné. (T.)

3. Enveloppe des plans qui touchent deux paraboles ayant même sommet, même axe et situées dans deux plans rectangulaires.

4. Enveloppe des plans ayant pour équation

$$uX + vY + wZ = \sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}.$$

5. Une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$$

est coupée par une autre sphère passant par l'origine et ayant son centre sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Trouver l'enveloppe des plans d'intersection. (T.)

6. Enveloppe des plans de contact des cônes dont les sommets se meuvent sur l'ellipsoïde

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = n^2$$

et circonscrits à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

7. Trouver l'enveloppe des surfaces définies par l'équation

$$(\lambda^2+\mu^2)P+2\lambda Q+2\mu R+S=0,$$

P, Q, R, S étant des polynomes donnés en $x$, $y$, $z$.

8. Trouver l'enveloppe d'une sphère de rayon constant et dont le centre décrit une courbe donnée.

9. Trouver l'enveloppe d'une sphère passant par un point fixe et dont le centre décrit une courbe donnée.

10. Trouver l'enveloppe d'une sphère orthogonale à une sphère donnée et dont le centre décrit une courbe donnée.

11. On mène des plans tangents à la surface $cz=xy$ en tous les points où elle est coupée par le cylindre $x^2=ay$. Trouver les équations de l'arête de rebroussement de la surface développable engendrée par ces plans. (**T.**)

12. Enveloppe des plans

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=1,$$

sachant que

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=1,$$
$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2=1.$$

13. Former l'équation tangentielle de chacune des ellipses définies par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0\quad \text{et}\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,\quad z=h;$$

en conclure les équations de l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à ces deux ellipses.

— Les équations tangentielles des deux ellipses sont

$$a^2u^2+b^2v^2-1=0,\qquad a'^2u^2+b'^2v^2-(wh+1)^2=0;$$

on peut poser

$$u=\frac{\cos t}{a},\qquad v=\frac{\sin t}{b},\qquad wh+1=\sqrt{\frac{a'^2}{a^2}\cos^2 t+\frac{b'^2}{b^2}\sin^2 t};$$

on a ainsi $u$, $v$, $w$ en fonction de $t$ et l'on applique la méthode du n° 197, ce qui donne les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement exprimées au moyen du paramètre $t$.

14. L'équation du plan tangent à une surface peut s'écrire

$$X\sin\theta\cos\varphi+Y\sin\theta\sin\varphi+Z\cos\theta=\delta,$$

$\delta$ étant une fonction de $\theta$ et de $\varphi$.

On peut poser

$$\sin\theta = \frac{1}{\cos iy}, \qquad \cos\theta = i \operatorname{tang} iy \qquad \text{et} \qquad \varphi = x;$$

on obtient ainsi

$$X \cos x + Y \sin x + i Z \sin iy + z = 0,$$

$z$ étant une fonction de $x$ et de $y$.

Calculer les coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du point de contact. (O. BONNET)

Appliquer à l'équation

$$Z = aX + bY + R\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

**15.** Étudier les sections par les plans de coordonnées de la surface de l'onde représentée par l'équation (13) (203).

# CHAPITRE XI.

## NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DE DROITES. — COMPLEXES, CONGRUENCES.

**207.** Nous avons vu que l'on peut faire correspondre à une droite six paramètres $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ liés par une relation homogène

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

et, réciproquement, à tout système de paramètres liés par l'équation précédente correspond une droite. On démontre plus généralement que l'on peut faire correspondre à chaque droite six paramètres $x_1$, $x_2$, ..., $x_6$ liés par une équation quadratique et homogène

$$\xi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0,$$

et réciproquement; et en outre que la condition, qui exprime que deux droites $x_1$, ..., $x_6$; $x'_1$, ..., $x'_6$ se coupent, est la suivante

$$x'_1 \frac{\partial\xi}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial\xi}{\partial x_2} + \ldots = 0 \ (^1).$$

(1) *Voir* G. KŒNIGS, *La Géométrie réglée et ses applications* (Paris, Gauthier-Villars) et la Note à la fin de l'Ouvrage.

Mais nous nous bornerons à faire usage dans ce qui suit des coordonnées de Plücker.

208. L'ensemble des droites, satisfaisant à une relation homogène de la forme

$$f(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

constitue ce qu'on nomme un *complexe*. L'ordre du complexe est le degré $m$ de l'équation précédente.

Par chaque point de l'espace, il passe une infinité de droites du complexe qui sont sur un cône qu'on nomme *cône du complexe* relatif à ce point et dont nous pouvons aisément former l'équation. En effet, soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées d'un point donné A ; en nommant $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un second point M et X, Y, Z les coordonnées courantes, les équations de la droite AM sont

$$\frac{X - x}{x - x'} = \frac{Y - y}{y - y'} = \frac{Z - z}{z - z'}$$

ou

$$\begin{aligned} Y(z - z') - Z(y - y') &= zy' - yz', \\ Z(x - x') - X(z - z') &= xz' - zx', \\ X(y - y') - Y(x - x') &= yx' - xy'. \end{aligned}$$

On peut donc poser

$$\begin{aligned} a &= x - x', & b &= y - y', & c &= z - z', \\ \alpha &= zy' - yx', & \beta &= xz' - zx', & \gamma &= yx' - xy' \end{aligned}$$

et, par suite,

$$f(x - x',\ y - y',\ z - z',\ zy' - yz',\ xz' - zx',\ yx' - xy') = 0.$$

Cette équation étant homogène par rapport aux différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ représente un cône de degré $m$ ayant pour sommet le point A.

En second lieu, les droites du complexe situées dans un plan donné enveloppent une courbe dont la classe est égale à l'ordre du complexe.

En effet, soit

$$u'x + v'y + w'z + 1 = 0$$

l'équation d'un plan donné, et soit

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation d'un plan passant par une droite située dans le premier plan.

Les équations de cette droite sont

$$\begin{aligned} (vu')y + (wu')z &= u - u', \\ (wv')z + (uv')x &= v - v', \\ (uw')x + (vw')y &= w - w'. \end{aligned}$$

On peut donc poser

$$a = (wv'), \qquad b = (uw'), \qquad c = (vu'),$$
$$\alpha = u - u', \qquad \beta = v - v', \qquad \gamma = w - w',$$

où

$$(wv') = wv' - vw', \qquad \text{etc.}$$

Pour toutes les droites situées dans le plan $(u', v', w')$ on a donc

$$f[(wv'),\ (uw'),\ (vu'),\ u - u',\ v - v',\ w - w'] = 0.$$

Cette relation est homogène par rapport aux différences $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$; elle représente une courbe et la classe de cette courbe est égale à l'ordre du complexe. Cette courbe se nomme la *courbe du complexe* relative au plan donné.

Si les équations de la droite mobile sont sous la forme

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

l'équation du complexe sera une relation entre $a$, $b$, $p$, $q$.

209. On nomme *congruence* l'ensemble des droites appartenant à deux complexes. Par chaque point de l'espace on peut mener un nombre déterminé de droites de la congruence; ce sont les génératrices communes aux cônes des deux complexes donnés; dans un plan il y a un nombre déterminé de droites de la congruence, qui sont les tangentes communes aux courbes de la congruence situées dans le plan donné.

Si l'on adopte les quatre paramètres $a$, $b$, $p$, $q$, il y a, pour une congruence, deux relations entre ces paramètres.

Enfin, si l'on donnait trois relations, $a$, $b$, $p$, $q$ pourraient être regardés comme des fonctions données d'un paramètre, et les droites du système considéré seraient les génératrices d'une surface réglée.

Un plus grand nombre de relations correspondrait à un nombre déterminé de droites.

En résumé, on peut considérer : 1° ce que M. Kœnigs appelle l'*espace réglé*, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les droites de l'espace, lesquelles dépendent de quatre paramètres; 2° les complexes ou systèmes de droites à triple indétermination; 3° les congruences, systèmes de droites à double indétermination; 4° les séries réglées à indétermination simple; 5° enfin les ensembles de droites qui sont déterminées et, par suite, d'*indétermination nulle*.

Voici encore quelques autres définitions dont nous pourrons avoir besoin dans la suite. Nous adoptons celles qui ont été proposées par M. G. Kœnigs.

Les droites issues d'un point dans un plan forment un *faisceau plan;* le point et le plan en sont les *supports*.

Deux droites qui se coupent définissent un faisceau plan ; trois droites qui se coupent deux à deux forment un triangle ou un trièdre. Dans le premier

cas, toute droite qui les rencontre est dans leur plan; dans le second cas, toute droite qui les rencontre toutes les trois passe par leur point de rencontre commun; l'ensemble de toutes ces droites forme ce qu'on nomme une *gerbe*. D'une manière générale, on appelle *hyperfaisceau* l'ensemble de toutes les droites qui rencontrent trois droites qui se coupent deux à deux.

**210.** *Étude sommaire du complexe linéaire.* — On nomme *complexe linéaire* le complexe défini par une équation du premier degré

$$Aa + Bb + Cc + D\alpha + E\beta + F\gamma = 0.$$

Le cône du complexe se réduit à un plan et la courbe du complexe à un point. On voit, en effet, que les droites du complexe qui passent par le point $(x', y', z')$ sont dans le plan ayant pour équation

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D(zy' - yz') + E(xz' - zx') + F(yx' - xy') = 0.$$

Cherchons les droites situées dans le plan $(u', v', w')$; on a, pour ces droites,

$$A(wv' - vw') + B(uw' - wu') + C(vu' - uv') + D(u - u') + E(v - v') + F(w - w') = 0,$$

ou, en ordonnant,

$$(D + Bw' - Cv')u + (E + Cu' - Aw')v + (F + Av' - Bu')w - (Du' + Ev' + Fw') = 0.$$

Le plan $(u, v, w)$, mené par une droite du complexe située dans le plan $(u', v', w')$, passe donc par le point ayant pour coordonnées

$$x_1 = -\frac{D + Bw' - Cv'}{Du' + Ev' + Fw'},$$

$$y_1 = -\frac{E + Cu' - Aw'}{Du' + Ev' + Fw'},$$

$$z_1 = -\frac{F + Av' - Bu'}{Du' + Ev' + Fw'}.$$

Or

$$u'x_1 + v'y_1 + w'z_1 + 1 = 0;$$

donc, toutes les droites considérées passent par un point fixe situé dans le plan $(u', v', w')$. Ce point se nomme le *foyer* ou *pôle* du plan.

Il est évident que les droites passant par un point donné étant dans un plan, ce plan a pour foyer le point donné; on l'appelle le *plan focal* ou le *plan polaire du point donné*.

Si l'on emploie des coordonnées homogènes, les coordonnées ponctuelles homogènes du pôle du plan $(u', v', w', r')$ sont

$$Dr' + Bw' - Cv', \quad Er' + Cu' - Aw', \quad Fr' + Av' - Bu', \quad -(Du' + Ev' + Fw').$$

Si l'on suppose $u' = v' = w' = 0$, $r' = 1$, ces expressions deviennent

$$D, \quad E, \quad F, \quad 0;$$

donc le pôle du plan de l'infini est dans une direction bien déterminée qu'on peut appeler la *direction axiale* du complexe.

Enfin, si $Du' + Ev' + Fw' = 0$, le pôle du plan $(u', v', w')$ est à l'infini; on appelle *plan diamétral* tout plan dont le pôle est à l'infini, c'est-à-dire tout plan parallèle à la direction axiale.

Comme exemple très simple, on peut considérer le complexe des droites rencontrant une droite donnée $\Delta(a', b', c', \alpha', \beta', \gamma')$. L'équation du complexe est alors

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0,$$

on vérifie alors que le pôle d'un plan est le point où ce plan rencontre $\Delta$; que la direction axiale est celle de $\Delta$, etc. Mais tous les points de la droite donnée sont des points *singuliers* du complexe, car une droite quelconque passant par chacun d'eux fait partie du complexe. Un tel complexe est dit *complexe spécial*.

Les droites assujetties à rencontrer deux droites données, non situées dans un même plan, constituent une congruence linéaire; par chaque point il en passe une et dans chaque plan il s'en trouve une.

Nous verrons que les droites assujetties à rencontrer trois droites forment une quadrique.

211. *Exemple de complexe du second ordre.* — Nous considérerons le complexe formé par les tangentes à une sphère. Si l'on prend trois axes rectangulaires passant par le centre de cette sphère, l'équation du complexe sera, R étant le rayon de la sphère,

$$R^2(a^2 + b^2 + c^2) - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Le cône du complexe de sommet $x', y', z'$ a pour équation

$$R^2[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] = (zy' - yz')^2 + (xz' - zx')^2 + (yx' - xy')^2;$$

c'est le cône de sommet $(x', y', z')$ circonscrit à la sphère.

L'équation tangentielle de la courbe du complexe située dans le plan défini par l'équation

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

est

$$R^2[(wv' - vw')^2 + (uw' - wu')^2 + (vu' - uv')^2] = (u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2.$$

Cette courbe n'est pas autre chose que la section de la sphère par le plan considéré. On le vérifie aisément de la façon suivante :

Faisons passer un plan par l'intersection des plans $(u, v, w)$ et $(u', v', w')$,

son équation sera

$$(u+\lambda u')x+(v+\lambda v')y+(w+\lambda w')z+1+\lambda=0;$$

il sera tangent à la sphère si

$$R^2[(u+\lambda u')^2+(v+\lambda v')^2+(w+\lambda w')^2]=(1+\lambda)^2.$$

La droite d'intersection sera une tangente si les deux plans tangents qu'on obtient ainsi se confondent, c'est-à-dire si l'équation précédente a une racine double. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve précisément l'équation tangentielle obtenue plus haut.

Tous ces résultats sont évidents géométriquement.

Les tangentes communes à deux sphères définissent une congruence. Il en passe quatre par chaque point : ce sont les génératrices communes aux deux cônes circonscrits aux sphères données et ayant ce point pour sommet. Dans chaque plan il y en a quatre, qui sont les tangentes communes aux cercles suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par le plan considéré.

## EXERCICES.

1. Si l'on considère deux droites d'un faisceau plan ayant pour coordonnées $(a_1, \ldots, a_6)$ et $(b_1, \ldots, b_6)$, les coordonnées de toute droite du faisceau sont de la forme

$$x_i=\lambda a_i+\mu b_i,$$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux paramètres.

2. De même, les coordonnées de toute droite d'un hyperfaisceau, défini par trois droites $a$, $b$, $c$, sont de la forme

$$x_i=\lambda a_i+\mu b_i+\nu c_i.$$

3. Étant donné un plan P et un point $p$ situé dans ce plan, le pôle $p'$ du plan P est dans le plan polaire P' du point $p$ (210).

4. Les pôles de tous les plans menés par une droite sont situés dans les plans polaires de tous les points de cette droite.

5. Les plans polaires de tous les points d'une droite $\Delta$ se coupent suivant une même droite $\Delta'$, qui est le lieu des pôles des plans menés par $\Delta$. Ces deux droites sont dites *conjuguées*.

6. Toute droite qui coupe deux conjuguées fait partie du complexe.

7. Toute droite du complexe qui coupe une droite $\Delta$ coupe aussi sa conjuguée.

8. Deux angles formés de droites conjuguées sont sur une quadrique. (Voir la *Théorie des génératrices rectilignes des quadriques.*)

9. Le rapport anharmonique de quatre plans menés par une droite est égal au rapport anharmonique de leurs pôles.

10. Le lieu des pôles d'une série de plans parallèles est une droite qu'on nomme *diamètre*. Quand les plans sont parallèles à la direction axiale ils sont perpendiculaires à leur diamètre, qui se nomme alors *axe* du complexe.

11. Tout plan perpendiculaire à l'axe rencontre cet axe et deux droites conjuguées quelconques en trois points en ligne droite.

12. La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées rencontre l'axe à angle droit.

13. Si l'on nomme $\delta$ la plus courte distance d'une droite d'un complexe linéaire et de l'axe de ce complexe, $\theta$ l'angle aigu formé par ces deux droites, on a

$$\delta \operatorname{tang}\theta = k,$$

$k$ étant une constante. Dans le cas du complexe spécial, $k = 0$.

14. Les droites d'un complexe linéaire sont les binormales à des hélices d'égal pas, tracées dans un même sens sur les divers cylindres de révolution ayant pour axe commun l'axe du complexe. Ces hélices s'appellent ***hélices normales du complexe***. (G. FOURET.)

15. Par rapport à un complexe linéaire, le plan polaire d'un point quelconque de l'espace est le plan normal de l'hélice normale qui passe par ce point.

16. Les plans osculateurs d'une hélice, aux divers points de rencontre de cette hélice avec un plan quelconque, se coupent en un même point de ce plan. (G. FOURET.)

17. Les points de contact d'une hélice avec les plans osculateurs qu'on peut lui mener par un point quelconque sont dans un même plan passant par ce point. (G. FOURET.)

18. Si l'on définit une droite par ses coordonnées vectorielles $\bar{u}$, $\bar{v}$, l'équation d'un complexe linéaire est de la forme

$$\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0.$$

19. La distance $d$ à l'axe du pôle $p$ d'un plan P est donnée par la formule

$$d = k \operatorname{tang}\theta,$$

$\theta$ étant l'angle de l'axe et de la normale au plan P. En déduire la formule du n° 13, ou inversement.

20. Étudier le complexe tétraédral ou complexe des droites qui coupent les faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

21. Lorsque les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe de droites, le plan osculateur, en un point de cette courbe, est le plan tangent au cône du complexe suivant la tangente à la courbe en ce point.

**22.** Soit $f(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ l'équation d'un complexe; soit $\Delta_0$ une droite de ce complexe; on appelle *complexe linéaire tangent* relatif à $\Delta_0$ le complexe linéaire défini par l'équation

$$a\frac{\partial f}{\partial a_0} + b\frac{\partial f}{\partial b_0} + c\frac{\partial f}{\partial c_0} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha_0} + \beta\frac{\partial f}{\partial \beta_0} + \gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma_0} = 0. \quad \text{(PLÜCKER)}$$

Le plan polaire d'un point quelconque M de $\Delta_0$, par rapport à ce complexe, est tangent suivant $\Delta_0$ au cône du complexe relatif au point M.

**23.** En un point M d'une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur est le plan polaire de M par rapport au complexe linéaire tangent relatif à la tangente en M à la courbe.

**24.** Trouver l'équation de la surface réglée lieu des axes des complexes linéaires ayant quatre droites données (cylindroïde de Cayley ou conoïde de Plücker); on peut donner à l'équation du *cylindroïde* cette forme

$$z(x^2 + y^2) + kxy = 0,$$

$k$ étant une constante.

[*Voir* pour ces Exercices : G. KŒNIGS, *La Géométrie réglée;* G. FOURET, *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites;* A. DEMOULIN, *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites.*]

# CHAPITRE XII.

## FIGURES HOMOTHÉTIQUES.

**212.** *Définitions.* — Soient S et M deux points ayant respectivement pour coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ et $x$, $y$, $z$; prenons sur la droite SM un point M′ tel que

$$(1) \qquad \frac{\overline{SM}}{\overline{SM'}} = k;$$

$k$ étant une constante numérique donnée, positive ou négative, suivant que les deux segments SM et SM′ ont le même sens ou des sens contraires. Si l'on opère ainsi pour chaque point M d'une figure F, on en déduira une nouvelle figure F′, engendrée par le point variable M′; on dit que les deux figures F et F′ sont homo-

thétiques directes si $k$ est positif, inverses si $k$ est négatif; le point S se nomme le *centre d'homothétie* et $k$ le *rapport d'homothétie*. La relation (1) subsiste pour les projections des segments $\overline{SM}$, $\overline{SM'}$ sur un axe quelconque; on a donc, $x'$, $y'$, $z'$ étant les coordonnées de M',

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = k$$

et, par suite,

$$x = x_0(1 - k) + kx';$$

de même

$$y = y_0(1 - k) + ky',$$
$$z = z_0(1 - k) + kz',$$

et, en posant

$$x_0(1 - k) = a, \qquad y_0(1 - k) = b, \qquad z_0(1 - k) = c,$$

on obtient les formules

$$(2) \qquad x = kx' + a, \qquad y = ky' + b, \qquad z = kz' + c.$$

Si le point M décrit une surface ayant pour équation

$$f(x, y, z) = 0$$

le point M' décrira la surface définie par l'équation

$$f(kx + a, ky + b, kz + c) = 0.$$

On voit de même que, si M décrit une courbe, M' décrira aussi une courbe.

A un plan correspond un plan; à une droite, une droite.

**213.** Si l'on déplace le centre d'homothétie S, sans changer le rapport $k$, la figure F' subira une translation et ne changera pas de forme par conséquent. En effet, si l'on remplace $x_0$, $y_0$, $z_0$ par $x_0 + x_1$, $y_0 + y_1$, $z_0 + z_1$ respectivement, on obtiendra pour déterminer les coordonnées $x''$, $y''$, $z''$ du point M'' correspondant à M dans ce second cas, les équations

$$(3) \qquad x = kx'' + a + a_1, \qquad y = ky'' + b + b_1, \qquad z = kz'' + c + c_1,$$

où l'on a posé

$$x_1(1 - k) = a_1, \qquad y_1(1 - k) = b_1, \qquad z_1(1 - k) = c_1.$$

La comparaison des équations (2) et (3) donne

$$x' = x'' + \frac{a_1}{k}, \qquad y' = y'' + \frac{b_1}{k}, \qquad z' = z'' + \frac{c_1}{k}.$$

Ce qui montre que l'on passe du point M' au point M'' en faisant subir au premier point une translation déterminée.

## CYLINDRES HOMOTHÉTIQUES.

**214.** *La figure homothétique d'un cylindre est un cylindre.*

En effet, si l'on suppose l'axe des $z$ parallèle aux génératrices du cylindre donné, l'équation de ce cylindre étant $f(x, y) = 0$, celle de la surface homothétique sera de la forme

$$f(kx + a, ky + b) = 0.$$

Si le premier cylindre est algébrique, le second l'est aussi et du même degré que le premier.

Si l'on déplace le centre d'homothétie parallèlement à l'axe des $z$, cette équation ne change pas, ce qui prouve que deux cylindres homothétiques ont une ligne de centres d'homothétie, parallèle à leurs génératrices, que l'on appelle l'*axe d'homothétie*.

De là résulte immédiatement cette conséquence : *un plan coupe deux cylindres homothétiques suivant deux courbes homothétiques,* le centre d'homothétie de ces courbes étant la trace de l'axe d'homothétie des deux cylindres sur le plan sécant.

**215.** On en déduit que *deux plans parallèles coupent deux cylindres homothétiques suivant des courbes homothétiques.*

Considérons, en effet, deux cylindres homothétiques C, C' coupés par deux plans parallèles P, P'. Ces plans rencontrent l'axe d'homothétie des deux cylindres en des points S, S'; les sections des deux cylindres par le plan P sont des courbes homothétiques par rapport à S; soient M et M'' deux points correspondants de ces courbes; la génératrice du cylindre C' menée par M'' rencontre le plan P' en un point M', et la droite MM' rencontre l'axe d'homothétie en un point $S_1$, tel que

$$\frac{S_1 S}{S_1 S'} = \frac{S_1 M}{S_1 M'} = \frac{SM}{SM''} = k,$$

ce qui démontre la proposition.

*Réciproquement,* si l'on prend deux courbes homothétiques

pour bases de deux cylindres ayant des génératrices parallèles à une même droite, les cylindres obtenus sont homothétiques.

216. On démontre de même que la figure homothétique d'un cône est un cône; les sommets des deux cônes sont des points homologues.

On démontre facilement que les sections de deux cônes homothétiques par deux plans parallèles sont des courbes homothétiques; il suffit de remarquer que deux plans parallèles coupent un même cône suivant deux courbes homothétiques par rapport à leur sommet; cela étant, soient C et C′ deux cônes homothétiques, P un plan, P′ son homologue; les sections correspondantes sont évidemment homothétiques; or, les sections du cône C′ par deux plans parallèles P′ et P″ étant homothétiques, on en conclut aisément que les sections du cône C par le plan P et du cône C′ par le plan parallèle P″ sont aussi homothétiques.

217. La figure homothétique d'une surface du second degré est une surface du second degré qui a les mêmes directions asymptotiques que la première.

La réciproque est vraie au point de vue algébrique. Il y aurait à faire une discussion analogue à celle qui a été faite pour les coniques; mais nous regarderons comme étant homothétiques deux quadriques ayant les mêmes directions asymptotiques, même si le rapport de similitude est imaginaire.

## APPLICATION AUX SECTIONS PLANES D'UNE SURFACE.

218. Théorème préliminaire. — *Une section plane d'une surface algébrique et sa projection sur un plan sont de même degré.*

Formons l'équation du cylindre projetant la section plane considérée, les génératrices étant parallèles à l'axe des $z$; l'équation du cylindre est la même que celle de sa projection rapportée aux axes $Ox$, $Oy$. Faisons une transformation de coordonnées, le nouveau plan des $x$, $y$ étant le plan sécant; l'équation du cylindre, dans le nouveau système, l'axe des $z$ ayant gardé la même direction, sera la même que celle de la section plane rapportée aux nouveaux axes

des $x$ et des $y$. Or le degré de l'équation du cylindre n'a pas changé, donc les degrés de la section plane considérée et de sa projection sont les mêmes. La démonstration géométrique est d'ailleurs évidente.

Dans le cas du second degré, il est évident que la section et sa projection sont de même espèce.

**219.** Théorème. — *Les sections d'une quadrique par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.*

En effet, on peut supposer le plan des $x$, $y$ parallèle aux plans sécants. Si l'équation de la quadrique est alors

$$f(x, y, z) = 0,$$

les équations d'une section sont

$$z = h, \qquad f(x, y, h) = 0.$$

Si $h$ varie, la seconde équation représente des cylindres homothétiques et l'on sait que les sections de deux cylindres homothétiques par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.

**220.** Théorème. — *Les sections de deux quadriques homothétiques par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.*

En effet, soient

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0$$

les équations de deux quadriques homothétiques; les sections par des plans parallèles au plan des $x$, $y$ sont définies par des équations de la forme

$$z = h, \qquad f(x, y, h) = 0$$

et

$$z = h', \qquad f_1(x, y, h') = 0;$$

on a donc encore à considérer les sections de deux cylindres homothétiques par des plans parallèles, puisque les termes du second degré sont les mêmes dans les équations des deux quadriques et, par suite, dans les équations des deux cylindres projetants.

**221.** Corollaire. — *Les sections d'une quadrique et du cône de ses directions asymptotiques, de sommet quelconque, par des plans parallèles, sont des courbes homothétiques.*

En effet, une quadrique et le cône de ses directions asymptotiques ayant pour sommet un point quelconque sont des surfaces homothétiques dont le rapport d'homothétie est nul ou infini; d'ailleurs les termes du second degré étant les mêmes pour ces deux surfaces, la démonstration précédente s'applique sans modification.

Il convient toutefois de remarquer, à l'égard des théorèmes précédents, que si deux sections parallèles sont des hyperboles, l'une peut être homothétique à la conjuguée de l'autre.

**222.** *Sections planes d'un cône du second degré.* — Considérons un cône du second degré et soit P un plan; si nous menons par le sommet du cône un plan P′ parallèle au plan P, les sections du cône par les plans P, P′ sont des courbes homothétiques. Or le plan P′ coupe le cône suivant deux droites qui peuvent être réelles et distinctes, confondues en une seule droite réelle, ou imaginaires conjuguées, en supposant que les équations du cône et du plan aient tous leurs coefficients réels.

Si les génératrices situées dans le plan P′ sont imaginaires conjuguées, la section faite par le plan P devant être homothétique à un système de deux droites imaginaires conjuguées est nécessairement une ellipse.

Si ces génératrices se confondent en une seule, la section par le plan P, homothétique à une droite double, est une parabole; enfin si ces génératrices sont distinctes et réelles, la section par le plan P est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces génératrices.

Quelle que soit la courbe du second degré, ellipse, parabole ou hyperbole que l'on donne comme directrice d'un cône du second degré, on peut donc, en vertu de ce qui précède, obtenir une section plane d'espèce donnée; on peut même obtenir un cercle. En effet, si un plan P coupe un cône du second degré suivant un cercle, le plan P′ parallèle à P et mené par le sommet du cône coupe ce dernier suivant deux droites isotropes et réciproquement; il suffit donc de chercher les génératrices communes au cône donné et au cône isotrope ayant même sommet; soient $G$, $G'$; $G_1$, $G'_1$; les deux couples de droites isotropes imaginaires conjuguées obtenus; les deux plans menés par $G$ et $G'$ ou par $G_1$ et $G'_1$ sont réels et tout plan parallèle à l'un de ces deux plans coupe le cône considéré sui-

vant un cercle. Un cône réel du second degré peut donc être regardé, de deux manières, comme un cône circulaire.

**223.** *Sections planes d'un cylindre du second degré.* — Les sections planes d'un cylindre du second degré donné sont de même espèce, quel que soit le plan sécant; on a donc trois espèces de cylindres du second degré : le cylindre elliptique, le cylindre parabolique et le cylindre hyperbolique.

#### EXERCICES.

1. On nomme *figure semblable à une figure donnée* toute figure égale à une figure homothétique directe de la proposée.

Former l'équation générale des surfaces semblables à une surface donnée.

2. Lieu des points qui partagent dans un rapport donné les cordes d'une quadrique issues d'un point donné.

# CHAPITRE XIII.

## CLASSIFICATION DES QUADRIQUES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES PONCTUELLES.

**224.** *Préliminaires.* — Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

le discriminant de la forme

$$\varphi(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Ce déterminant a trois mineurs du premier ordre symétriques :

$$A'A'' - B^2, \quad A''A - B'^2, \quad AA' - B''^2;$$

les trois autres mineurs du premier ordre, non symétriques, sont

$$B'B'' - AB, \quad B''B - A'B', \quad BB' - A''B''.$$

Nous ferons, relativement à ces mineurs, les remarques suivantes, qui nous seront très utiles :

1° *Lorsque* $\Delta = 0$, *si l'un des six mineurs précédents est différent de zéro, l'un au moins des mineurs symétriques est différent de zéro, et si deux mineurs symétriques sont différents de zéro, ils ont le même signe, si tous les coefficients sont réels.*

En effet, la fonction $\varphi(x, y, z)$ est la somme de deux carrés, puisqu'on suppose $\Delta = 0$ et qu'au moins un mineur de premier ordre est supposé différent de zéro. Donc

$$\varphi(x, y, z) \equiv \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2,$$

$\varepsilon$ et $\varepsilon'$ ayant la signification habituelle. Les deux carrés étant distincts, l'un des déterminants $ab' - ba'$, $ca' - ac'$, $bc' - cb'$ est différent de zéro. Soit par exemple $ab' - ba' \neq 0$; alors, en faisant $z = 0$ dans l'identité précédente, on obtient

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 \equiv \varepsilon(ax + by)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y)^2;$$

donc $AA' - B''^2 \neq 0$. En outre, $AA' - B''^2$ a le signe du produit $\varepsilon\varepsilon'$. Donc les mineurs symétriques différents de zéro ont le même signe.

2° Il résulte de là que, *si* $\Delta = 0$ *et si les mineurs symétriques sont nuls tous les trois, il en est de même des trois autres mineurs.*

La proposition est fausse quand on suppose $\Delta \neq 0$; en effet, si les six mineurs sont nuls, $\Delta = 0$.

Ainsi, par exemple, les mineurs symétriques du discriminant de $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$ sont nuls et les autres mineurs sont égaux à $+2$.

3° *Quand on suppose* $BB'B'' \neq 0$, *si les mineurs non symétriques sont nuls, les mineurs symétriques sont aussi nuls.*

En effet, on suppose

$$AB = B'B'', \qquad A'B' = B''B, \qquad A''B'' = BB';$$

on a donc, puisque B, B' et B'' sont supposés tous les trois différents de zéro,

$$A = \frac{B'B''}{B}, \qquad A' = \frac{B''B}{B'},$$

d'où

$$AA' = B''^2 \ldots.$$

4° Si tous les mineurs de $\Delta$ sont nuls, l'un au moins des coefficients A, A′ ou A″ est différent de zéro, car $\varphi(x, y, z)$ étant alors un carré

$$\varphi(x, y, z) \equiv \varepsilon(ax + by + cz)^2,$$
$$A = \varepsilon a^2, \qquad A' = \varepsilon' b^2, \qquad A'' = \varepsilon c^2.$$

Si A, A′ et A″ étaient nuls, $\varphi(x, y, z)$ serait identiquement nul. On voit, en outre, que ceux des coefficients A, A′ et A″ qui sont différents de zéro ont le même signe; c'est d'ailleurs ce qui résulte des égalités

$$AA' = B''^2, \qquad A'A'' = B^2, \qquad A''A = B'^2.$$

5° On déduit (voir *Cours d'Algèbre*, t. II, p. 198) des propriétés du *déterminant adjoint* les identités

$$a'a'' - b^2 = A\Delta, \qquad a''a - b'^2 = A'\Delta, \qquad aa' - b''^2 = A''\Delta,$$
$$b'b'' - ab = B\Delta, \qquad b''b - a'b' = B'\Delta, \qquad bb' - a''b'' = B''\Delta.$$

Si $\Delta = 0$, on a donc par exemple $a'a'' = b^2$, ce qui prouve que ceux des mineurs principaux qui ne sont pas nuls ont le même signe, ainsi que nous l'avions établi directement (1°).

**225.** Théorème. — *Si l'on prend pour nouveaux plans de coordonnées trois plans ayant pour équations* $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, *en désignant par* X, Y, Z *les nouvelles coordonnées, on a*

$$P \equiv AX, \qquad Q \equiv BY, \qquad R \equiv CZ,$$

A, B, C *étant des constantes.*

La démonstration se fait comme en Géométrie plane (t. I, p. 270).

### CLASSIFICATION PAR LES DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES.

**226.** Soit

$$F(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2$$
$$+ 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

l'équation d'une quadrique.

Nous supposerons dans tout ce qui suit, sauf avis contraire, *tous les coefficients réels.*

Le cône des directions asymptotiques ayant pour sommet l'origine des coordonnées a pour équation

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

*Premier cas* $\Delta \neq 0$. — Ce cas se subdivise en deux :

1° $$\varphi(x, y, z) = \varepsilon(P^2 + Q^2 + R^2),$$

P, Q, R désignant des polynomes distincts, à coefficients réels.

Le cône des directions asymptotiques est imaginaire, la surface est limitée dans toutes les directions. Un plan mené par le sommet du cône la coupe suivant deux droites imaginaires; donc toute section plane de la surface est une ellipse. Cette surface est un *ellipsoïde* réel ou imaginaire ou un *cône* imaginaire.

2° $$\varphi(x, y, z) \equiv \varepsilon(P^2 + Q^2 - R^2).$$

Le cône des directions asymptotiques est réel; en effet, il peut être considéré comme engendré par la droite mobile ayant pour équations

$$P = R\cos\varphi, \qquad Q = R\sin\varphi.$$

Les sections planes peuvent donc être d'espèce quelconque. Les surfaces de cette nature sont des *hyperboloïdes* ou des cônes réels.

*Deuxième cas* $\Delta = 0$. — Un mineur symétrique différent de zéro, par exemple $AA' - B''^2 \neq 0$. Alors $\varphi(x, y, z)$ est la somme de deux carrés distincts.

1° $$\varphi(x, y, z) \equiv \varepsilon(P^2 + Q^2).$$

Une seule direction asymptotique réelle, définie par les équations $P = 0$, $Q = 0$. Le cône des directions asymptotiques se réduit à deux plans imaginaires conjugués, qu'on nomme *plans directeurs.* Toute section faite par un plan non parallèle à la direction asymptotique réelle, coupant les plans directeurs suivant deux droites imaginaires conjuguées, coupe la surface suivant une ellipse. Tout plan parallèle à la direction asymptotique réelle coupe les plans directeurs suivant deux droites parallèles; donc la surface est coupée

par un pareil plan suivant une parabole. Une surface de cette espèce se nomme une *paraboloïde elliptique*.

2° $$\varphi(x, y, z) \equiv P^2 - Q^2.$$

Le cône des directions asymptotiques se réduit à deux plans réels, appelés *plans directeurs*. Tout plan non parallèle à l'intersection des plans directeurs coupant l'ensemble de ces deux plans suivant deux droites concourantes coupe la surface suivant une hyperbole; tout plan parallèle à l'intersection des plans directeurs donnera une parabole. Une surface de cette espèce est appelée *paraboloïde hyperbolique*.

*Troisième cas.* — Les mineurs du premier degré de $\Delta$ sont nuls. Dans ce cas

$$\varphi(x, y, z) \equiv \varepsilon P^2.$$

L'équation de la surface est donc de la forme

$$P^2 + Q = 0,$$

P et Q désignant des formes linéaires; si P et Q sont des polynomes distincts, de sorte que l'intersection des plans $P = 0$, $Q = 0$ est à distance finie, la surface est un *cylindre parabolique,* car la section par un des plans coordonnés ayant une équation de la forme $P_1^2 + Q_1 = 0$ est une parabole si, ce qu'on peut toujours supposer, ce plan n'est pas parallèle à l'intersection des deux plans P, Q.

Si $Q = 2aP + b$, $a$ et $b$ étant des constantes, l'équation $f = 0$ représente deux plans parallèles.

### CLASSIFICATION PAR LA DÉCOMPOSITION DE $f(x, y, z, t)$ EN CARRÉS.

**227.** Posons

$$f(x, y, z, t) \equiv \varphi(x, y, z) + 2(Cx + C'y + C''z)t + Dt^2,$$

et soient $\Delta$ le discriminant de $\varphi(x, y, z)$ et H celui de $f(x, y, z, t)$.

*Premier cas :* $\Delta \neq 0$. — La fonction $\varphi(x, y, z)$ est alors la somme de trois carrés distincts; nous poserons

$$\varphi(x, y, z) = \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 + \varepsilon''(a''x + b''y + c''z)^2.$$

En raisonnant comme dans le cas de trois variables (t. I, p. 269), on peut trouver des constantes $d$, $d'$, $d''$, $D_1$ telles que

$$f(x,y,z,t) \equiv \varepsilon(ax+by+cz+dt)^2 + \varepsilon'(a'x+b'y+c'z+d't)^2 + \varepsilon''(a''x+b''y+c''z+d''t)^2 + D_1 t^2;$$

et, en remarquant que $f(x,y,z,t) - D_1 t^2$ est la somme de trois carrés et que par suite son discriminant est nul, on trouve

$$D_1 = \frac{H}{\Delta}.$$

Si l'on pose $\frac{H}{\Delta} = \varepsilon''' L^2$, l'équation $f(x,y,z,t) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 + \varepsilon'' R^2 + \varepsilon''' L^2 = 0,$$

et si l'on pose enfin, en supposant $H \neq 0$,

$$\frac{P}{L} = X, \qquad \frac{Q}{L} = Y, \qquad \frac{R}{L} = Z,$$

on obtient les équations suivantes :

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \qquad \Delta \neq 0, \quad H \neq 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0, \\ X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0, \\ X^2 + Y^2 - Z^2 + 1 = 0. \end{array} \right.$$

Si $H = 0$, on a les équations

$$\begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix} \qquad \Delta \neq 0, \quad H = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} X^2 + Y^2 - Z^2 = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 0. \end{array} \right.$$

*Deuxième cas :* $\Delta = 0$. — Ce cas se subdivise : supposons un mineur symétrique, par exemple, $AA' - B''^2 \neq 0$. Nous désignons ce mineur par $\delta$.

La fonction $\varphi(x,y,z)$ est la somme de deux carrés distincts

$$\varphi(x,y,z) \equiv \varepsilon(ax+by+cz)^2 + \varepsilon'(a'x+b'y+c'z)^2; \qquad ab' - ba' \neq 0.$$

Si l'on pose

$$ax + by + cz = P, \qquad a'x + b'y + c'z = Q,$$

on a

$$\tfrac{1}{2}\varphi'_x = \varepsilon a P + \varepsilon' a' Q,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'_y = \varepsilon b P + \varepsilon' b' Q;$$

il en résulte que P et Q sont des fonctions linéaires de $\frac{1}{2}\varphi'_x$ et $\frac{1}{2}\varphi'_y$.

Si l'on pose

$$Cx + C'y + C''z \equiv R,$$

on a

$$f(x, y, z, t) \equiv \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 + 2Rt + Dt^2;$$

la condition pour que les polynomes P, Q, R soient distincts est la même que la condition pour que $\frac{1}{2}\varphi'_x$, $\frac{1}{2}\varphi'_y$ et R soient distincts, puisque P et Q étant des fonctions linéaires de $\varphi'_x$, $\varphi'_y$, et réciproquement, si les trois premiers polynomes sont liés linéairement, il en est de même des trois autres et réciproquement. Or le discriminant des trois polynomes $\frac{1}{2}\varphi'_x$, $\frac{1}{2}\varphi'_y$, R est le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}.$$

Nous sommes ainsi conduits à supposer :

1° $\delta \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$. Les plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ se coupent en un seul point, et il en est de même si l'on remplace R par un plan parallèle $R_1$ ayant pour équation $2R + D = 0$; en prenant ces trois plans pour plans de coordonnées, on obtient donc

$$\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 + R_1 = 0;$$

en remarquant que $\delta$ a le signe de $\varepsilon\varepsilon'$, on a des équations de la forme suivante :

(7) $$\delta > 0, \qquad Y^2 + Z^2 - 2X = 0,$$

(8) $$\delta < 0, \qquad Y^2 - Z^2 - 2X = 0,$$

X, Y, Z étant trois polynomes distincts à coefficients réels.

2° $\Delta_1 = 0$. Alors

$$Cx + C'y + C''z \equiv \varepsilon h P + \varepsilon' h' Q,$$

donc

$$f(x, y, z, t) \equiv \varepsilon P^2 + 2\varepsilon h P + \varepsilon' Q^2 + 2\varepsilon' h' Q + Dt^2$$

ou

$$f(x, y, z, 1) \equiv \varepsilon(P + h)^2 + \varepsilon'(Q + h')^2 + D_1 t^2$$

en posant

$$D_1 = D - \varepsilon h^2 - \varepsilon' h'^2;$$

ce qui conduit aux équations suivantes, si $D_1 \neq 0$,

(9) $$\delta > 0, \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 - 1 = 0, \\ X^2 + Y^2 + 1 = 0, \end{cases}$$
(10)

(11) $$\delta < 0, \qquad X^2 - Y^2 - 1 = 0.$$

Dans chacun de ces cas, $H = 0$; mais un mineur du troisième degré de H est différent de zéro.

Si $D_1 = 0$, on a les équations suivantes :

(12) $$\delta < 0, \quad X^2 - Y^2 = 0,$$

(13) $$\delta > 0, \quad X^2 + Y^2 = 0.$$

Les mineurs du troisième degré de H sont alors tous nuls, mais au moins un mineur du second degré est différent de zéro.

*Troisième cas :* $\Delta = 0$. — Les mineurs symétriques de $\Delta$ sont nuls, mais un des coefficients, par exemple $A \neq 0$. Dans ce cas

$$\varphi(x, y, z) \equiv \varepsilon(ax + by + cz)^2, \qquad a \neq 0$$

on a ainsi

$$f(x, y, z, t) \equiv \varepsilon P^2 + 2(Cx + C'y + C''z)t + Dt^2.$$

Deux nouveaux cas se présentent, suivant que les équations

$$ax + by + cz = 0, \qquad Cx + C'y + C''z = 0$$

représentent des plans qui se coupent ou des plans parallèles. Dans le premier cas, l'équation de la surface se ramène à la forme

(14) $$X^2 - 2Y = 0,$$

$X = 0$, $Y = 0$ représentant des plans qui se coupent. Dans ce cas, un mineur du troisième degré de H est différent de zéro.

Si, au contraire,

$$Cx + C'y + C''z = \varepsilon hP + k,$$

on a

$$f(x, y, z, 1) \equiv \varepsilon(P + h)^2 + D_1,$$

et par conséquent on a les équations suivantes :

(15) $$X^2 - 1 = 0,$$

(16) $$X^2 + 1 = 0,$$

(17) $$X^2 = 0.$$

Si la fonction $\varphi(x, y, z)$ s'abaisse au premier degré, l'équation $f(x, y, z, t) = 0$ représente deux plans dont l'un au moins est le plan de l'infini. En laissant ce cas de côté, nous avons obtenu 17 formes différentes.

**228.** L'équation (15) représente deux plans parallèles réels; l'équation (16) représente deux plans imaginaires conjugués, parallèles à un plan réel; l'équation (17) représente un seul plan; mais comme son premier membre est un carré, on dit qu'elle représente un *plan double* qui est d'ailleurs réel.

L'équation (14) représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite définie par les équations $X = 0$, $Y = 0$. Supposons que cette droite ne soit pas parallèle à l'axe des $z$; dans ce cas, la trace du cylindre sur le plan $xOy$ a pour équation

$$X_1^2 - 2Y_1 = 0,$$

en désignant par $X_1$ et $Y_1$ ce que deviennent les polynomes X et Y pour $z = 0$. Cette dernière équation étant celle d'une parabole, on a affaire à un cylindre parabolique.

L'équation (12) représente deux plans concourants réels et l'équation (13) deux plans imaginaires conjugués.

L'équation (9) est celle d'un cylindre elliptique; l'équation (10) représente un cylindre elliptique imaginaire, et enfin l'équation (11) représente un cylindre hyperbolique. On vérifie ces résultats comme dans le cas du cylindre parabolique.

Enfin on voit immédiatement que l'équation (5) est celle d'un cône réel et que l'équation (6) définit un cône imaginaire; dans les deux cas, le sommet est le point défini par les équations

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Il ne nous reste donc à étudier que les équations (1), (2), (3), (4), (7) et (8).

**229.** *Ellipsoïdes.* — Prenons pour plans de coordonnées les trois plans définis par les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et désignons par $x$, $y$, $z$ les nouvelles coordonnées d'un point quelconque M; on a (225), en désignant par $a$, $b$, $c$ trois constantes, $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$, $Z = \frac{z}{c}$; l'équation (1) devient ainsi

$$(1)' \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît que $a$, $b$, $c$ désignent trois longueurs; rien n'empêche de supposer $a$, $b$, $c$ positifs.

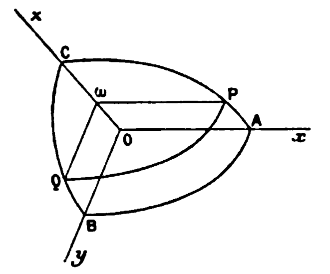
Il est facile de se rendre compte de la forme de la surface représentée par l'équation (1)'. Nous voyons d'abord que les sections par les plans de coordonnées sont les ellipses ayant respectivement pour équations, dans ces plans,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad \frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}-1=0.$$

On obtient ainsi des ellipses rapportées chacune à un système de diamètres conjugués.

Prenons sur $Ox$ (*fig.* 26) une longueur $OA=a$; sur $Oy$, $OB=b$, et sur $Oz$, $OC=c$; OA et OB forment un système de diamètres conjugués de l'ellipse située dans le plan $xOy$, etc. On voit immédiatement que la surface peut être engendrée par l'ellipse mobile définie par les deux équations

Fig. 26.




$$z=h, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

dans lesquelles $h$ désigne un paramètre variable. Cette ellipse variable a pour diamètres conjugués les deux cordes déterminées dans les deux ellipses (OC, OA), (OC, OB) ayant OC pour demi-diamètre commun, par le plan PωQ, ($z=h$) parallèle au plan $xOy$.

La section par le plan $z=h$ n'est réelle que si $-c<h<c$.

Cette surface peut être engendrée par une ellipse mobile, de la manière suivante : Considérons un trièdre OABC; OB et OC sont les deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse $E_1$; OA et OC deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse $E_2$, et enfin OA et OB deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse $E_3$. Le lieu engendré par une ellipse mobile E qui rencontre les ellipses $E_1$ et $E_2$, reste homothétique à l'ellipse $E_3$ et dont le centre se meut sur la droite CC'; C', étant le symétrique de C par rapport au point O, est la surface représentée par l'équation (1).

On n'a représenté sur la surface que les arcs d'ellipses appartenant au trièdre $Oxyz$. Cette surface a reçu le nom d'*ellipsoïde*.

Le cône des directions asymptotiques ayant pour sommet l'origine a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$$

ce cône étant imaginaire, on voit que toute section plane de l'ellipsoïde est une ellipse.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(2)' \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$$

elle représente évidemment une surface entièrement imaginaire qu'on a nommée *ellipsoïde imaginaire*.

**230.** *Hyperboloïdes*. — En adoptant les mêmes notations que dans le numéro précédent, on peut mettre les équations (3) et (4) sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \varepsilon = 0,$$

$\varepsilon$ ayant la valeur $+1$ ou $-1$; si nous admettons aussi la valeur $\varepsilon = 0$, nous comprendrons encore, sous la même forme, l'équation (5).

1° Soit $\varepsilon = +1$; l'équation est

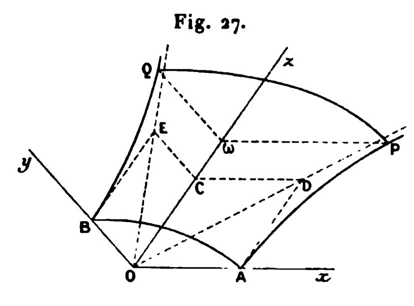
$$(3)' \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

La surface définie par cette équation est coupée par le plan $xOy$ suivant une ellipse ayant pour équation, dans ce plan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

En prenant $OA = a$, $OB = b$, on voit que OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués de cette ellipse.

Fig. 27.




La section par le plan $xOz$ (*fig.* 27) est une hyperbole ayant, dans ce plan, pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

de sorte que, si $OC = c$, la diagonale OD du parallélogramme construit sur OA et OC comme côtés est une asymptote de cette hyperbole. On obtient de même une hyperbole pour section par le plan $yOz$. Nous ne représentons qu'un arc de chacune de ces courbes.

La section par un plan parallèle au plan $xOy$ est une ellipse ayant pour diamètres conjugués les cordes déterminées par ce plan dans les deux hyperboles précédentes; les équations de cette ellipse sont

$$z = h, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2};$$

elle est donc réelle quand $h$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. La surface représentée par l'équation $(3)'$ peut être considérée comme engendrée par cette ellipse, dont nous n'avons représenté qu'un arc PQ.

Ainsi la surface considérée peut être engendrée par une ellipse qui se déplace et se déforme en restant homothétique à une ellipse fixe et en s'appuyant sur deux hyperboles fixes ayant un diamètre imaginaire commun auquel sont conjugués, dans chacune de ces hyperboles, deux diamètres conjugués de l'ellipse fixe, le centre de l'ellipse mobile se déplaçant sur le diamètre imaginaire commun aux deux hyperboles.

On peut obtenir un autre mode de génération. Effectivement, si nous coupons la surface par un plan parallèle au plan $xOz$, et ayant pour équation $y = k$, la section est une hyperbole définie par les équations

$$y = k, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}.$$

Si l'on suppose $k^2 < b^2$, cette hyperbole est homothétique à la section faite par le plan $xOz$; si $k = \pm b$, la section se compose de deux droites, et le plan $y = b$ ou $y = -b$ est un plan tangent; enfin, si l'on suppose $k^2 > b^2$, la section est homothétique à la conjuguée de la section faite par le plan $xOz$.

On peut regarder la surface comme engendrée par l'hyperbole variable définie par les deux dernières équations.

De même, on peut la regarder comme engendrée par l'hyperbole ayant pour équations

$$x = l, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{l^2}{a^2}.$$

Cette surface a reçu le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

2° Soit $\varepsilon = -1$; l'équation est alors

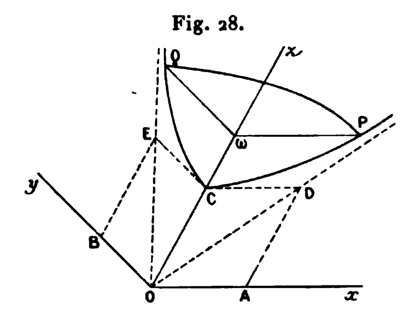
$$(4)' \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

La section par un plan parallèle au plan $xOy$ a pour équations

$$z = h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 :$$

c'est une ellipse qui n'est réelle que si l'on suppose $h^2 > c^2$. Donc si l'on prend sur l'axe des $y$ deux points C, C' symétriques par rapport à l'origine et tels que $\overline{OC} = c = -\overline{OC'}$, on voit que la surface n'a aucun point réel situé entre les plans parallèles au plan $xOy$ et menés par les deux points C, C'. On voit ainsi que la surface a deux nappes distinctes. Le plan des $x$, $y$ ne la coupe pas ou, si l'on préfère, la section par ce plan est une ellipse imaginaire. La section par le plan $xOz$ (*fig.* 28) a pour équation, dans ce plan,

Fig. 28.




$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

c'est une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués, OC étant un demi-diamètre réel. De même, la section par le plan $yOz$ est une hyperbole ayant pour équation, dans ce plan,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

La surface peut être engendrée par une ellipse ayant pour diamètres conjugués les cordes déterminées dans ces deux hyperboles par un plan mobile parallèle au plan $xOy$.

Elle peut aussi être engendrée par l'hyperbole définie par les équations

$$y = k, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)$$

ou par l'hyperbole

$$x = l, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(1 + \frac{l^2}{a^2}\right).$$

On a donné à cette surface le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*.

Dans les exemples précédents, comprenant les ellipsoïdes et les hyperboloïdes, l'origine des coordonnées est un centre; car à tout

point $M(x, y, z)$ de la surface comprend le point $M'(-x, -y, -z)$, symétrique du premier par rapport à l'origine (*voir* n° 234).

**231.** *Paraboloïdes.* — Les équations (7) et (8) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

en prenant pour plan de coordonnées les plans définis par les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Deux cas se présentent suivant que $p$ et $q$ sont de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, en modifiant, s'il le faut, le sens des $x$ positifs, on peut supposer $p$ et $q$ positifs. Dans cette hypothèse, on voit sur l'équation même, qu'on doit supposer $x > 0$ pour tous les points réels de la surface; donc tous les points de cette surface sont, par rapport au plan $yOz$ du côté des $x$ positifs.

Le plan $xOy$ (*fig.* 29) coupe la surface suivant la parabole ayant pour équation

$$y^2 - 2px = 0,$$

et le plan $xOz$, suivant la parabole ayant pour équation

$$z^2 - 2qx = 0;$$

nous n'avons représenté que les arcs OA et OB de ces courbes.

Fig. 29.



La section par le plan $yOz$ est composée de deux droites imaginaires passant par l'origine; ce plan est tangent en O à la surface.

La section par un plan parallèle au plan $yOz$ a pour équations

$$x = h, \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2h:$$

c'est une ellipse qui n'est réelle que si $h > 0$. La surface peut être considérée comme engendrée par cette ellipse.

Un plan parallèle à $xOz$ donne une parabole

$$y = k, \quad \frac{z^2}{q} = 2x - \frac{k^2}{p}.$$

Cette parabole est égale à la parabole-section par le plan $xOz$;

si $k$ varie, elle se déplace en restant parallèle à elle-même et de telle sorte qu'un de ses points décrive la parabole-section faite par le plan des $x, y$.

Pareillement, la surface peut être engendrée par la parabole ayant pour équations

$$z = l, \quad \frac{y^2}{p} = 2x - \frac{l^2}{p}.$$

Cette surface a reçu le nom de *paraboloïde elliptique*.

Supposons en second lieu $p$ et $q$ de signes contraires ou mieux, supposons l'équation mise sous la forme

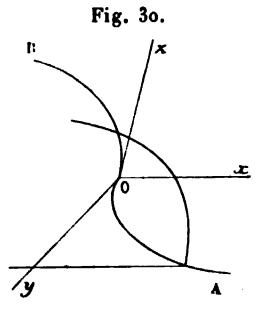
$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x,$$

$p$ et $q$ étant positifs. Les sections par le plan $xOy$ et par le plan $xOz$ sont alors des paraboles dont les concavités sont disposées en sens contraires, et dont les équations sont

$$z = 0, \quad y^2 - 2px = 0,$$
$$y = 0, \quad z^2 + 2qx = 0;$$

nous avons représenté seulement les arcs OA et OB de ces paraboles (*fig.* 30).

Fig. 30.




Les sections par des plans parallèles au plan $yOz$ sont des hyperboles, définies par des équations de la forme

$$x = h, \quad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = h.$$

Le plan $yOz$ coupe la surface suivant deux droites auxquelles les asymptotes des hyperboles considérées sont parallèles.

La surface peut être engendrée par l'hyperbole mobile définie par les équations précédentes.

Les sections par des plans parallèles au plan $xOz$ sont des paraboles égales à la parabole-section faite par le plan $xOz$. La surface peut être ainsi engendrée par le mouvement d'une parabole qui se déplace en restant égale et parallèle à une parabole fixe, de manière qu'un de ses points décrive une seconde parabole fixe, ayant avec la

première un diamètre commun, mais cette fois les concavités des deux paraboles fixes étant dirigées en sens contraires. On peut en effet obtenir l'équation de la surface en éliminant $k$ entre les équations

$$y = k, \qquad -\frac{z^2}{q} = 2x - \frac{k^2}{p};$$

on peut aussi considérer la surface comme engendrée par la parabole

$$z = l, \qquad \frac{y^2}{p} = 2x + \frac{l^2}{q}.$$

Cette surface porte le nom de *paraboloïde hyperbolique*.

**232.** Nous pouvons dresser le Tableau suivant qui résume la classification des quadriques :

- $\Delta \neq 0$...
  - $H \neq 0$........................
    - $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$, ellipsoïde réel ($H < 0$).
    - $X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$, ellipsoïde imaginaire ($H > 0$).
    - $X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0$, hyperboloïde à une nappe ($H > 0$).
    - $X^2 + Y^2 - Z^2 + 1 = 0$, hyperbol. à deux nappes ($H < 0$).
  - $H = 0$........................
    - $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$, cône réel.
    - $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, cône imaginaire.
- $\Delta = 0$...
  - Un mineur du 2$^e$ degré de $\Delta$ est différent de zéro, par exemple $\delta = AA' - B''^2 \neq 0$...
    - $\Delta_1 \neq 0$....
      - $Y^2 + Z^2 - X = 0$, paraboloïde elliptique ($H < 0$).
      - $Y^2 - Z^2 - X = 0$, paraboloïde hyperboloïde ($H > 0$).
    - $\Delta_1 = 0$.... ($H = 0$)
      - Un mineur du 3$^e$ degré de H est différent de zéro..
        - $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, cylindre elliptique réel.
        - $X^2 + Y^2 + 1 = 0$, cylindre elliptique imaginaire.
        - $X^2 - Y^2 - 1 = 0$, cylindre hyperbolique.
      - Les min. du 3$^e$ degré de H sont tous nuls, un mineur du 2$^e$ degré est différent de zéro.
        - $X^2 - Y^2 = 0$, deux plans concourants réels.
        - $X^2 + Y^2 = 0$, deux plans concourants imaginaires.
  - Les mineurs du 2$^e$ degré de $\Delta$ sont tous nuls, un coefficient est différent de zéro, par exemple $A \neq 0$............
    - $X^2 + Y = 0$, cylindre parabolique. — $H = 0$, un mineur du 3$^e$ degré de H est différent de zéro.
    - Les mineurs du 3$^e$ degré de H sont tous nuls.
      - Un mineur du 2$^e$ degré est différent de zéro.
        - $X^2 - 1 = 0$, deux plans parallèles réels..............
        - $X^2 + 1 = 0$, deux plans parallèles imaginaires.......
      - Les mineurs du 2$^e$ degré de H sont tous nuls.
        - $X^2 = 0$, un plan double......

EXERCICES.

Dire ce que représentent les équations suivantes :

$$4x^2+7y^2+9z^2+14yz+8zx+8xy+8x+2y+2z+D=0,$$
$$4x^2+7y^2+5z^2+14yz+8zx+8xy+8x+2y+2z+D=0,$$
$$4x^2+7y^2+7z^2+14yz+8zx+8xy+4x+2y+2z=0,$$
$$x^2+3y^2-z^2-4xy+2yz-8y+4z-11=0,$$
$$3x^2+5y^2+2z^2+2yz+6zx-4x+2y-2z+D=0,$$
$$x^2-3y^2-6yz+2zx-8xy-4x+2y-2z+D=0,$$
$$2x^2+y^2+z^2+1-2yz+4zx-4xy-3x-z+D=0,$$
$$2x^2+y^2+z^2+1-2yz+4zx-4xy-4x+2y-2z+D=0.$$

D étant une constante.

# CHAPITRE XIV.

## THÉORIE DU CENTRE.

233. *Définition.* — On appelle *centre d'une surface* un point fixe P tel que, M étant un point quelconque de cette surface, le point M' symétrique de M par rapport à P soit encore un point de la même surface.

234. *Conditions pour que l'origine des coordonnées soit centre d'une surface.* — Il faut et il suffit que l'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$ ne change pas quand on change $x$, $y$, $z$ en $-x$, $-y$, $-z$ respectivement; car si un point M a pour coordonnées $x$, $y$, $z$, le point M', symétrique de M par rapport à l'origine, a pour coordonnées $-x$, $-y$, $-z$.

On déduit immédiatement de cette remarque, que, si l'équation de la surface est algébrique et entière, son premier membre doit être un

polynome tel que les degrés de tous ses termes soient de même parité. On le voit en coupant la surface par une droite quelconque menée par l'origine, c'est-à-dire en posant $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, $z = \gamma\rho$ et en exprimant que les degrés des différents termes de l'équation en $\rho$ obtenue sont tous de même parité.

D'une manière plus générale, pour exprimer que le point $P(x_0, y_0, z_0)$ est un centre, il suffira d'exprimer que l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho, z_0 + \gamma\rho) = 0$$

ne change pas quand on change $\rho$ en $-\rho$, et cela quels que soient $\alpha, \beta, \gamma$.

**235.** *Recherche du centre dans les quadriques.* — On procède comme pour les coniques : on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes et l'on écrit que la nouvelle origine est un centre. On obtient ainsi, pour déterminer le centre d'une quadrique, les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0.$$

*Discussion.* — Les équations du centre sont

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' &= 0, \\ B'x + By + A''z + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations définissent trois plans qu'on nomme *les plans du centre*.

Nous poserons, comme plus haut, $AA' - B''^2 = \delta$ et nous nommerons $\Delta_1$ le caractéristique correspondant.

*Premier cas :* $\Delta \neq 0$. — Les plans du centre se coupent en un seul point, situé à distance finie. On obtient ainsi une première classe de surfaces du second degré; ce sont les *quadriques ayant un centre unique à distance finie*. Cette première classe contient les ellipsoïdes, les hyperboloïdes et les cônes.

Les coordonnées homogènes du centre sont $c$, $c'$, $c''$, $\Delta$.

*Deuxième cas :* $\Delta = 0$; un des mineurs symétriques de $\Delta$ diffère de zéro, par exemple $\delta \neq 0$ et $\Delta_1 \neq 0$. Deux des plans du centre se coupent et le troisième est parallèle à leur intersection; ces trois plans forment une surface prismatique. La quadrique n'a pas de centre. Comme les trois plans du centre ont un point commun à

l'infini, on peut dire que la quadrique a un centre unique à l'infini, dans la direction ayant pour paramètres $c, c', c''$; on obtient ainsi une seconde classe de surfaces : ce sont les paraboloïdes.

*Troisième cas :* $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$, $\Delta_1 = 0$. — Les trois plans du centre ont une ligne droite commune : on obtient ainsi une troisième classe de quadriques, ayant une ligne de centres à distance finie : ce sont les cylindres elliptiques ou hyperboliques, et les systèmes de plans concourants.

*Quatrième cas :* $\Delta = 0$; tous les mineurs du second degré de $\Delta$ nuls, un coefficient, par exemple $A \neq 0$; l'un des deux caractéristiques $AC' - B''C$ ou $AC'' - B'C \neq 0$.

Les plans du centre sont parallèles. On a une quatrième classe de quadriques : les quadriques ayant une ligne de centres à l'infini, ou cylindres paraboliques.

*Cinquième cas :* $\Delta = 0$; les mineurs du second degré de $\Delta$ tous nuls, $A \neq 0$, $AC' - B''C = 0$, $AC'' - B'C = 0$.

Les trois plans du centre sont confondus. Cinquième classe de surfaces du second degré, ayant un plan de centres. Ce sont les systèmes de deux plans parallèles.

236. Première classe : *Surfaces à centre unique (à distance finie).* — Transportons l'origine au centre et conservons la direction des axes primitifs, en posant

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y', \qquad z = z_0 + z';$$

si $x_0, y_0, z_0$ sont les coordonnées du centre, la nouvelle équation sera

$$\varphi(x', y', z') + D_1 = 0.$$

En raisonnant comme pour les coniques, on trouve

$$D_1 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D,$$

et aussi

$$D_1 = \frac{H}{\Delta}.$$

L'équation d'une quadrique à centre unique, rapportée à trois axes parallèles aux premiers axes et passant par le centre de cette

quadrique est donc, en supprimant les accents,

$$\varphi(x, y, z) + \frac{H}{\Delta} = 0.$$

Dans les Chapitres suivants nous ramènerons cette équation à une forme plus simple.

Deuxième classe : *Surfaces à centre unique rejeté à l'infini.* $\Delta$ étant nul et $\delta \neq 0$, l'ensemble des termes du second degré est la somme de deux carrés ; l'équation est donc de la forme

$$\varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

On suppose $\delta \neq 0$; donc $ab' - ba' \neq 0$; on en conclut, en suivant une méthode déjà expliquée, qu'on peut mettre l'équation sous la forme

$$\varepsilon(ax + by + cz + \lambda)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z + \mu)^2 + 2C''_1 z + D_1 = 0.$$

Si l'on pose

$$ax + by + cz + \lambda = P, \qquad a'x + b'y + c'z + \mu = Q,$$

les équations du centre sont

$$\begin{aligned} \varepsilon a P + \varepsilon' a' Q &= 0, \\ \varepsilon b P + \varepsilon' b' Q &= 0, \\ \varepsilon c P + \varepsilon' c' Q + C''_1 &= 0. \end{aligned}$$

On doit supposer $C''_1 \neq 0$, sans quoi les plans du centre auraient une droite commune.

Troisième classe : *Quadriques ayant une ligne de centres.* — Ce cas correspond à $C''_1 = 0$; l'équation de la surface est alors

$$\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 + D_1 = 0.$$

On reconnaît bien l'équation d'un cylindre, si $D_1 \neq 0$.

C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier ainsi. Transportons l'origine en un point de la ligne des centres. L'équation prendra la forme

$$\varphi(x, y, z) + D_1 = 0;$$

d'ailleurs $\Delta = 0$ : donc

$$\varphi(x, y, z) = \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2, \qquad \text{etc.}$$

Si en outre $D_1 = 0$, l'équation de la surface est alors

$$\varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 = 0;$$

elle représente deux plans concourants.

Quatrième classe. — L'équation est de la forme

$$\varepsilon(ax + by + cz)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Les plans du centre sont déterminés par les équations

$$\varepsilon a P + C = 0,$$
$$\varepsilon b P + C' = 0,$$
$$\varepsilon c P + C'' = 0,$$

où $P \equiv ax + by + cz$.

Ces plans ne sont confondus que si l'on peut trouver une constante $h$ telle que

$$C = ha, \qquad C' = hb, \qquad C'' = hc;$$

s'il n'en est pas ainsi, l'équation est

$$\varepsilon P^2 + Q = 0,$$

$P = 0$, $Q = 0$ représentant deux plans qui se coupent : la surface est un cylindre parabolique, puisque la trace sur un des plans de coordonnées a une équation de la forme

$$P_1^2 + Q_1 = 0.$$

Cinquième classe. — Les plans du centre étant confondus, l'équation de la surface est de la forme

$$P^2 + 2hP + D = 0$$

ou

$$(P + h)^2 + D_1 = 0;$$

elle définit bien deux plans parallèles.

237. *Remarque.* — On démontre, comme pour les courbes, que, si une surface a deux centres, elle en a une infinité situés régulièrement sur une droite, et si cette surface est algébrique, tous les points de cette droite sont des centres; si elle a trois centres non en ligne droite, elle en a une infinité qui sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes et, si elle est algébrique, elle a un plan de centres; enfin, si une surface a quatre centres non dans un même plan, elle en a une infinité qui sont les sommets d'un ensemble périodique de parallélépipèdes.

## Cône asymptote.

**238.** On nomme *cône asymptote* d'une quadrique de la première classe, le cône des directions asymptotiques ayant pour sommet le centre de cette quadrique.

**239.** *Équation du cône asymptote d'une quadrique à centre rapportée à des axes quelconques.* — L'équation d'une quadrique à centre unique rapportée à un système quelconque d'axes étant $f(x, y, z) = 0$, l'équation de la même surface rapportée à des axes parallèles aux premiers et passant par son centre est

$$\varphi(x', y', z') + \frac{H}{\Delta} = 0,$$

et l'on a l'identité

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x', y', z') + \frac{H}{\Delta}.$$

L'équation du cône asymptote étant, par rapport aux nouveaux axes,

$$\varphi(x', y', z') = 0,$$

est donc, par rapport aux anciens,

$$f(x, y, z) - \frac{H}{\Delta} = 0.$$

**240.** *Quadriques conjuguées.* — L'équation d'une quadrique homothétique et concentrique à la proposée, rapportée aux nouveaux axes, étant

$$\varphi(x', y', z') + \frac{1}{k^2}\frac{H}{\Delta} = 0,$$

on voit de même que l'équation de cette quadrique, rapportée aux anciens axes, sera

$$f(x, y, z) + \frac{1 - k^2}{k^2}\frac{H}{\Delta} = 0.$$

Si l'on suppose $k$ infini, on retrouve l'équation du cône asymptote; si $k^2 = -1$, on aura l'équation de la quadrique *conjuguée* à la première, c'est-à-dire

$$f(x, y, z) - \frac{2H}{\Delta} = 0.$$

Si l'équation proposée est celle d'un hyperboloïde, la seconde sera celle de l'hyperboloïde conjugué.

Ainsi les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

représentent deux hyperboloïdes conjugués. Si l'on coupe ces deux surfaces par une même droite ayant pour équations

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\rho,$$

l'une d'elles sera coupée en deux points M, M' qui correspondent à $\rho=\rho'$ et $\rho=-\rho'$; la seconde sera coupée aux points N, N' qui correspondent à $\rho=\rho' i$ et $\rho=-\rho' i$; de sorte que, si M et M' sont réels, N et N' sont imaginaires conjugués et réciproquement. On voit que deux quadriques conjuguées ont le même cône asymptote.

**241.** *Asymptotes d'une quadrique à centre.* — Rapportons la quadrique à trois axes passant par son centre et soit

$$\varphi(x, y, z)+D_1=0$$

son équation. Soient

$$x=x_0+\alpha\rho, \qquad y=y_0+\beta\rho, \qquad z=z_0+\gamma\rho$$

les équations d'une sécante. L'équation en $\rho$ étant

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta, \gamma)+\rho\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)+\varphi(x_0, y_0, z_0)+D_1=0,$$

les deux points d'intersection sont à l'infini si l'on suppose

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0, \qquad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}=0,$$

ce qui exprime que la droite considérée doit être parallèle à une génératrice du cône asymptote et située dans le plan tangent à ce cône, mené par la génératrice considérée.

Si en outre $\varphi(x_0, y_0, z_0)+D_1=0$, l'équation en $\rho$ est indéterminée et la droite est tout entière sur la quadrique. On en conclut que tout plan tangent au cône asymptote coupe la quadrique suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact. C'est ce que l'on peut d'ailleurs vérifier par un calcul direct. Supposons, en effet, que le plan des $x$, $y$ soit un plan tangent au cône asymptote, la généra-

trice de contact étant l'axe des $y$, l'équation de ce cône sera de la forme

$$Ax^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx = 0,$$

et celle de la quadrique

$$Ax^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + D = 0.$$

La section de la quadrique par le plan $xOy$ a pour équation $Ax^2 + D = 0$ et celle du cône : $Ax^2 = 0$; ce qui démontre la proposition.

**242.** Théorème. — *Tout plan passant par le centre coupe le cône asymptote suivant les asymptotes de la section faite par ce plan dans la quadrique.*

La démonstration est immédiate, si l'on prend le plan sécant pour plan des $x, y$.

### Recherche des points doubles d'une quadrique.

**243.** Soient $x_0, y_0, z_0, t_0$ et $x, y, z, t$ les coordonnées de deux points $M_0$, M. Les coordonnées homogènes d'un point quelconque P de la droite $M_0M$ sont de la forme

$$x_0 + \lambda x, \quad y_0 + \lambda y, \quad z_0 + \lambda z, \quad t_0 + \lambda t.$$

Le point P sera un point de la quadrique définie par l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

si $\lambda$ est une racine de l'équation

$$f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda z, t_0 + \lambda t) = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ & \quad + \lambda\left(x\frac{\partial f}{\partial x_0} + y\frac{\partial f}{\partial y_0} + z\frac{\partial f}{\partial z_0} + t\frac{\partial f}{\partial t_0}\right) + \lambda^2 f(x, y, z, t) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si le point $M_0$ est un point de la quadrique, cette équation a une racine nulle. Nous dirons que $M_0$ est un point double de la quadrique si, quelle que soit la direction de la sécante $M_0M$, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de $x, y, z, t$, coordonnées de M, deux points communs à la quadrique et à la sécante sont confondus avec $M_0$, ce qui revient à dire que les deux racines de l'équation précédente sont nulles. Pour qu'il en soit ainsi, quels que soient $x, y, z, t$, il faut et il suffit que $x_0, y_0, z_0, t_0$ vérifient les équations

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial t_0} = 0,$$

qui entraînent l'équation $f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$. Il résulte de là qu'*un point double d'une quadrique est un centre situé sur cette surface.*

On peut discuter les équations précédentes; mais il est préférable de suivre une méthode employée par M. Méray (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1892). Pour cela nous établirons les propositions suivantes :

1° *Une droite joignant un point quelconque d'une quadrique à un point double de cette quadrique est tout entière sur cette surface.*

En effet, si $M_0$ est un point double et M un point de la surface $f$, les coordonnées de tout point P de $M_0M$ vérifient l'équation (1).

2° *Si une quadrique a deux points doubles* $M_0$, $M_1$, *tout point de la droite* $M_0M_1$ *est encore un point double de cette quadrique.*

En effet, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_0} = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, on voit que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ quand on remplace $x$ par $x_0 + \lambda x_1$, $y$ par $y_0 + \lambda y$, ...; car on a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, et il en est de même pour les autres dérivées.

3° *Tout plan passant par un point d'une quadrique et par deux points doubles distincts appartenant à cette quadrique fait partie de cette surface.*

Effectivement, soient $x_0, y_0, z_0, t_0$; $x_1, y_1, z_1, t_1$ et $x, y, z, t$ les coordonnées de deux points doubles $M_0, M_1$ et d'un point quelconque M d'une quadrique. Les coordonnées d'un point quelconque du plan $M_0M_1M$ sont de la forme

$$x_0 + \lambda x_1 + \mu x, \quad y_0 + \lambda y_1 + \mu y, \quad z_0 + \lambda z_1 + \mu z, \quad t_0 + \lambda t_1 + \mu t,$$

et l'on vérifie aisément, en vertu de l'hypothèse, que

$$f(x_0 + \lambda x_1 + \mu x, y_0 + \lambda y_1 + \mu y, z_0 + \lambda z_1 + \mu z, t_0 + \lambda t_1 + \mu t) = 0.$$

Le premier membre est en effet identique à

$$\begin{aligned} &f(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ &\quad + \left[(\lambda x_1 + \mu x)\frac{\partial f}{\partial x_0} + (\lambda y_1 + \mu y)\frac{\partial f}{\partial y_0} + (\lambda z_1 + \mu z)\frac{\partial f}{\partial z_0} + (\lambda t_1 + \mu t)\frac{\partial f}{\partial t_0}\right] \\ &\quad + f(\lambda x_1 + \mu x, \ \lambda y_1 + \mu y, \ \lambda z_1 + \mu z, \ \lambda t_1 + \mu t). \end{aligned}$$

Chacune de ces trois parties est nulle.

D'ailleurs on peut encore raisonner ainsi : une droite du plan $M_0M_1M$ menée par M rencontre $M_0M_1$ en P; tout point P de $M_0M_1$ est un point double de la quadrique; donc MP est située tout entière sur la quadrique.

4° *Si une quadrique a trois points doubles* $M_0$, $M_1$, $M_2$ *non situés en ligne droite, tous les points du plan* $M_0M_1M_2$ *sont des points doubles.*

Car, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_0} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, on a encore $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ quand $x$ est remplacé par $x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2$, $y$ par $y_0 + \mu y_1 + \mu y_2$, ....

Cela posé, on voit d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour que le système (2) admette au moins une solution différente de zéro est $H = 0$. Ainsi les seules quadriques admettant des points doubles sont les cylindres, les cônes et les systèmes de plans.

Si $H = 0$, il y a plusieurs cas à distinguer :

1° Les équations (2) se réduisent à trois; la quadrique a un point double unique. Dans ce cas, toute droite joignant le point double à un point de la surface en fait partie; la surface est donc un cône si le point double est à distance finie, ou un cylindre, s'il est à l'infini.

2° Les équations (2) se réduisent à deux ; la quadrique a une ligne de points doubles. Dans ce cas, tout plan mené par la ligne des points doubles et un point de la quadrique fait partie de cette quadrique; donc la quadrique se compose de deux plans qui sont nécessairement distincts, sans quoi elle aurait un plan de points doubles. Si la ligne des points doubles est à distance finie, les deux plans sont concourants; si elle est à l'infini, ils sont parallèles.

3° Les équations (2) se réduisent à une seule; la quadrique a une infinité de points doubles, qui sont tous les points d'un plan. Dans ce cas, la forme $f$ est un carré parfait et la surface se compose de deux plans confondus avec le plan des points doubles.

## EXERCICES.

1. Chercher le centre de chacune des surfaces définies par les équations données en exercice au Chapitre précédent.

2. Trouver les centres de la surface ayant pour équation

$$a \cos x + b \cos y + c \cos z = 1.$$

3. Trouver les centres de la courbe ayant pour équations

$$x^2 = \cos z, \qquad y = \sin z. \qquad \text{(E. Catalan.)}$$

4. L'hélice a-t-elle un centre?

5. Si trois cordes d'une quadrique se coupent mutuellement en parties égales, leur point commun est le centre de cette quadrique.

6. Quand deux surfaces sont homothétiques, si l'une d'elles a un centre, l'autre en a aussi un et les deux surfaces sont homothétiques directes et homothétiques inverses, le rapport de similitude étant le même, au signe près; réciproque.

7. Lieu des centres des quadriques représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pzx + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0,$$

$a$, $b$, $c$ étant positifs et donnés, et $p$ et $q$ variables. Cas où $p$ et $q$ sont liés

de façon que l'équation représente un cône. Indiquer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe et celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes. (*École Polytechnique*, 1862.)

# CHAPITRE XV.

## PLANS DIAMÉTRAUX. — DIAMÈTRES.

**244.** *Définition.* — On nomme *surface diamétrale d'une surface donnée* le lieu des milieux des cordes de cette surface qui sont parallèles à une direction donnée.

Dans le cas d'une surface algébrique d'ordre $m$, la surface diamétrale conjuguée à une direction donnée sera, en général, une surface algébrique d'ordre $\frac{m(m-1)}{2}$.

Il en résulte que, dans le cas d'une quadrique, les surfaces diamétrales sont des plans. Nous allons étudier plus particulièrement ce cas particulier.

**245.** *Cas du second degré.* — Soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées d'un point M et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres d'une direction donnée, D. Les points d'intersection d'une sécante menée par M parallèlement à D et de la quadrique ayant pour équation

$$f(x, y, z) = 0$$

sont définis par les formules

$$x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 + \gamma\rho,$$

dans lesquelles $\rho$ est l'une quelconque des racines de l'équation

$$(1) \qquad \rho^2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \rho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}) + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Il convient de distinguer plusieurs cas.

*Premier cas :* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. — La direction des cordes n'est pas une direction asymptotique. Pour que le point M soit le milieu de la corde parallèle à D menée par ce point, il faut et il suffit que les racines de l'équation précédente soient égales et de signes contraires, c'est-à-dire que

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0.$$

Le lieu cherché est donc défini par l'équation

$$(2) \qquad \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Je dis que cette équation représente un plan à distance finie. En effet, on peut l'écrire ainsi :

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2C\alpha + 2C'\beta + 2C''\gamma = 0.$$

On ne peut supposer les trois coefficients des variables nuls, car les équations $\varphi'_\alpha = 0$, $\varphi'_\beta = 0$, $\varphi'_\gamma = 0$ entraîneraient $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion : dans toute quadrique, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction *non asymptotique* est un plan à distance finie, qu'on nomme le *plan diamétral conjugué à la direction donnée*.

*Deuxième cas :* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. — Toute parallèle à la direction donnée D, menée par un point quelconque M, rencontre la surface au plus en un seul point à distance finie; donc, quelle que soit la position de M, il est impossible que ce point soit le milieu d'une corde parallèle à D. Toutefois, il peut arriver que l'équation $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$ représente encore un plan à distance finie.

Les équations $\varphi'_\alpha = 0$, $\varphi'_\beta = 0$, $\varphi'_\gamma = 0$ n'ont de solution autre que zéro, que si $\Delta = 0$. Supposons donc $\Delta \neq 0$; dans ce cas, malgré l'hypothèse $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, les coefficients des variables ne sont pas tous nuls et l'équation (2) représente un plan P à distance finie, parallèle à la direction $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, puisque l'on suppose

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma = 0.$$

D'après cela, si par un point M pris dans le plan P on mène une parallèle à la direction $(\alpha, \beta, \gamma)$, cette parallèle sera dans ce plan, et, comme les coefficients de $\rho^2$ et de $\rho$ sont alors nuls, l'équation (1)

s'abaisse au degré zéro, d'où il résulte que la parallèle considérée rencontre la surface en deux points à l'infini : c'est donc une asymptote. Si l'on suppose de plus que M soit sur la surface $f$, la sécante sera tout entière sur la surface, car l'équation (1) disparaît alors identiquement. On en conclut que le plan P coupe la quadrique suivant deux droites parallèles à la direction D; ce plan est le plan asymptote parallèle à cette direction.

On peut montrer sans calcul que le plan P est parallèle à D. En effet, ce plan est le lieu des points M tels que la parallèle à $\Delta$ menée par M ne rencontre la surface qu'à l'infini; donc, si M' est un point de cette parallèle, la parallèle à D menée par M' étant la droite MM' elle-même, M' appartient au lieu et se trouve par suite dans le plan P.

On peut regarder encore ce plan comme un plan diamétral : en effet, considérons une sécante parallèle à D et non située dans le plan P.

Cette sécante rencontrant la surface en un seul point à distance finie, le milieu de la corde correspondante est à l'infini, dans la direction D; c'est donc un point du plan P. Si la sécante est dans le plan P, les deux points d'intersection étant à l'infini, le milieu de la corde est un point quelconque de la sécante, et il en est encore de même si la sécante est tout entière sur la surface. On voit ainsi que tous les points du plan P peuvent être considérés comme des milieux de cordes parallèles à D; ce plan est donc un plan diamétral singulier.

Il resterait à examiner encore le cas où $\Delta = 0$, l'un des trois coefficients $\varphi'_\alpha$, $\varphi'_\beta$ ou $\varphi'_\gamma$ étant différent de zéro; nous y reviendrons plus loin (n° **247**) :

*Troisième cas.* — Supposons $\varphi'_\alpha = 0$, $\varphi'_\beta = 0$, $\varphi'_\gamma = 0$, les paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ n'étant pas tous nuls, bien entendu; on a donc $\Delta = 0$; si en outre on suppose $C\alpha + C'\beta + C''\gamma \neq 0$, on voit qu'en supposant par exemple $\delta \neq 0$, on a $\Delta_1 \neq 0$. C'est donc le cas des paraboloïdes; le plan P est alors à l'infini. On a ainsi

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = \text{const.}$$

ce qui exprime, comme nous le savons, que les plans du centre d'une paraboloïde sont parallèles à une même droite.

*Quatrième cas.* — Supposons que dans l'équation (1) le coefficient

de $\rho$ soit identiquement nul. On a alors

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z \equiv 0,$$

ce qui exprime que les plans du centre ont une droite commune; c'est le cas des cylindres; la direction asymptotique est celle des génératrices; pour cette direction le plan P est indéterminé.

*Remarques.* — 1° Les plans du centre sont les plans diamétraux conjugués aux directions des axes des coordonnées.

2° Le terme constant de l'équation de la quadrique n'intervient pas dans l'équation du plan diamétral conjugué à une direction donnée : donc le plan diamétral conjugué à cette direction est le même pour une quadrique et pour son cône asymptote. Il en résulte que, si une droite est coupée en A et B par un hyperboloïde et en A' et B' par le cône asymptote de cet hyperboloïde, on a

$$AA' = BB'.$$

**246.** Théorème. — *Dans une surface à centre unique, tout plan diamétral passe par le centre et réciproquement.*

En effet, les équations du centre étant $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, tout plan dont l'équation est de la forme (2) passe par le centre. Réciproquement, les trois plans du centre formant un trièdre, tout plan passant par le centre peut être représenté par une équation de la forme (2) : c'est donc le plan diamétral conjugué à la direction $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Mais ce plan peut être un plan diamétral singulier.

**247.** Théorème. — *Dans une surface à centre unique à l'infini, les plans diamétraux sont parallèles à une droite fixe.*

En effet, on peut mettre l'équation d'une telle surface sous la forme

$$PQ + R = 0$$

où

$$\begin{aligned} P &\equiv ax + by + cz, \\ Q &\equiv a'x + b'y + c'z, \\ R &\equiv a''x + b''y + c''z + D, \end{aligned}$$

les coefficients de P et de Q étant d'ailleurs réels ou imaginaires.

On a

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z$$
$$\equiv \mathrm{P}(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) + \mathrm{Q}(a\alpha + b\beta + c\gamma) + a''\alpha + b''\beta + c''y;$$

tout plan diamétral est parallèle à l'intersection des plans P, Q, c'est-à-dire des plans directeurs. Les plans du centre sont donc parallèles à cette même droite.

Supposons que

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (a\alpha + b\beta + c\gamma)(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = 0;$$

soit par exemple

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Dans ce cas, le plan diamétral conjugué a pour équation

$$\mathrm{P}(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0;$$

il convient de noter que ce plan est à distance finie tant que la direction considérée n'est pas parallèle à l'intersection des plans directeurs.

Au contraire, si l'on suppose

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0,$$

on ne peut pas supposer en outre

$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0;$$

puisque P, Q, R sont trois polynomes distincts; dans ce cas, le plan diamétral est rejeté à l'infini.

**248.** Théorème. — *Tout plan diamétral d'un cylindre à centre passe par la ligne des centres.*

Car les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ représentant trois plans ayant une droite commune, l'équation $\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$ représente un plan passant par cette droite.

**249.** Théorème. — *Tous les plans diamétraux d'un cylindre parabolique sont parallèles aux plans des centres.*

En effet, les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ représentent des plans parallèles.

On peut d'ailleurs étudier ce cas directement. En effet, l'équa-

tion d'un cylindre parabolique est de la forme

$$P^2 + 2Q = 0$$

où

$$P = ax + by + cz, \qquad Q = a'x + b'y + c'z + d'.$$

Donc

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 2P(a\alpha + b\beta + c\gamma) + 2(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma).$$

Le plan diamétral est à l'infini si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, et indéterminé si en outre $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$.

**250.** *Plans diamétraux des systèmes de plans parallèles.* — En remplaçant dans l'équation précédente Q par une constante et P par un polynome linéaire complet, on voit que le plan diamétral conjugué à une direction quelconque dans un sytème de deux plans parallèles est le plan équidistant de ces deux plans. Il est indéterminé, si la direction des cordes est parallèle aux plans donnés.

*Remarque.* — On peut dire que, dans toute quadrique, un plan diamétral passe par le centre ou par le lieu des centres.

**251.** Problème. — *Un plan étant donné, ce plan peut-il être regardé comme un plan diamétral d'une quadrique donnée?*

Il faut que l'on puisse mettre l'équation de ce plan sous la forme (2). Donc ce plan doit passer par tout centre de la surface. Nous avons déjà étudié le cas d'une quadrique à centre unique. Le cas des cylindres à centres est à remarquer. Prenons la ligne des centres pour axe des $z$; l'équation du cylindre sera

$$Ax^2 + A'y^2 + D = 0.$$

Il s'agit d'identifier l'équation

$$ux + vy + wz + h = 0$$

avec

$$A\alpha x + A'\beta y = 0.$$

On a les conditions $w = 0$, $h = 0$ et pour déterminer $\alpha$ et $\beta$ :

$$\frac{A\alpha}{u} = \frac{A'\beta}{v}.$$

Il y a donc une infinité de cordes parallèles à un plan et telles que le plan diamétral conjugué à l'une quelconque de ces cordes coïncide avec un plan donné passant par la ligne des centres.

**252.** Exercice. — *Trouver une surface du second degré telle que les plans diamétraux conjugués à deux directions différentes soient parallèles.*

La surface cherchée ne peut être de la première classe.

Considérons un paraboloïde dont l'équation peut être mise, comme on l'a vu, sous la forme

$$Ay^2 + A'z^2 + 2x = 0.$$

Les plans diamétraux conjugués à deux directions $(\alpha, \beta, \gamma)$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ ont pour équations

$$A\beta y + A'\gamma z + \alpha = 0,$$
$$A\beta' y + A'\gamma' z + \alpha' = 0.$$

Ces plans sont parallèles si

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},$$

ce qui exprime que, si l'on mène par un point une parallèle à l'intersection des plans directeurs et une parallèle à chacune de ces directions, les trois droites obtenues doivent être dans un même plan.

## Diamètres.

**253.** On nomme *diamètre* l'intersection de deux plans diamétraux d'une quadrique. Tout diamètre passe par chaque centre de la quadrique. Dans une surface à centre unique, toute droite passant par le centre est un diamètre. Dans un paraboloïde, tous les diamètres sont parallèles. Dans le cas d'un cylindre, il n'y a qu'un diamètre, qui coïncide avec la ligne des centres. Si le cylindre est parabolique, le diamètre est rejeté à l'infini.

**254.** Théorème. — *Les plans diamétraux conjugués à toutes les cordes parallèles à un plan donné* P *passent par une droite qu'on nomme le* diamètre conjugué du plan P *et qui est le lieu des centres des sections faites dans la quadrique par des plans parallèles au plan* P.

Soit

$$ux + vy + wz = 0$$

l'équation du plan donné, qu'on peut supposer mené par l'origine des coordonnées. Soit

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0$$

l'équation du plan diamétral conjugué à une direction $(\alpha, \beta, \gamma)$ telle que

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Il est évident que le plan diamétral considéré contient la droite ayant pour équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w}.$$

On peut d'ailleurs remarquer que, si l'on suppose, par exemple, $w \neq 0$, on peut remplacer $\gamma$ par $-\frac{u\alpha + v\beta}{w}$; de sorte que l'équation du plan diamétral devient

$$\alpha\left(f'_x - \frac{u}{w}f'_z\right) + \beta\left(f'_y - \frac{v}{w}f'_z\right) = 0,$$

et sous cette forme on voit que, cette équation renfermant le paramètre $\frac{\alpha}{\beta}$ au premier degré, le plan qu'elle représente pivote autour de la droite ayant pour équations

$$f'_x - \frac{u}{w}f'_z = 0, \qquad f'_y - \frac{v}{w}f'_z = 0.$$

Lorsque le plan P coupe la quadrique suivant une conique à centre, le lieu des centres des sections faites par des plans parallèles au plan P est la droite précédente. Ce résultat est évident géométriquement, car si par le centre M d'une de ces coniques on mène une corde PQ parallèle au plan P (ce qui est possible), le plan diamétral conjugué à la direction PQ passe par M; le point M appartient donc à tous les plans diamétraux considérés et par suite à la droite qu'ils contiennent tous; cette droite est donc bien le lieu des centres des sections faites par des plans parallèles à P.

On établit facilement ce résultat par le calcul. Soit en effet $M(x_0, y_0, z_0)$ le centre d'une de ces coniques. Si l'on mène par M une corde de direction $(\alpha, \beta, \gamma)$ on a, le point M étant le milieu de cette corde,

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0.$$

Cette équation est vérifiée par tous les systèmes de solutions de l'équation

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Ces deux équations du premier degré devant avoir les mêmes solutions, ont leurs coefficients proportionnels; donc

$$\frac{f'_{x_0}}{u} = \frac{f'_{y_0}}{v} = \frac{f'_{z_0}}{w}.$$

255. *Remarque.* — Il peut se faire que le plan P coupe la quadrique donnée suivant une parabole et que néanmoins le diamètre conjugué à ce plan soit à distance finie. Cela est facile à expliquer : parmi les plans parallèles à P il s'en trouve un qui coupe la quadrique suivant deux droites parallèles; le lieu des centres sera la droite équidistante de ces deux droites et située dans leur plan.

Prenons le plan P pour plan des $x, y$ et rapportons la section à son axe et à sa tangente au sommet et supposons en outre que le plan $xOz$ soit le plan diamétral conjugué à la direction des $y$. L'équation de la quadrique sera de la forme

$$y^2 - 2px + A''z^2 + 2B'zx + 2C''z = 0.$$

Le diamètre conjugué au plan des $x, y$ a pour équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0,$$

c'est-à-dire

$$B'z - p = 0, \quad y = 0.$$

Or la section de la surface par le plan $B'z - p = 0$ a pour équations

$$B'z - p = 0, \quad y^2 + \frac{A''p^2}{B'^2} + 2\frac{C''p}{B'} = 0,$$

cette section se compose donc de deux droites équidistantes du diamètre trouvé. Si $B' = 0$, le diamètre est à l'infini.

256. Théorème. — *Le plan diamétral conjugué à la direction du diamètre conjugué à un plan* P *est parallèle à ce plan.*

En effet, la parallèle au diamètre trouvé, menée par l'origine, a pour équations

$$\frac{\varphi'_x}{u} = \frac{\varphi'_y}{v} = \frac{\varphi'_z}{w}.$$

Si l'on nomme $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les paramètres directeurs de cette droite, on a donc

$$\frac{\varphi'_\lambda}{u} = \frac{\varphi'_\mu}{v} = \frac{\varphi'_\nu}{w};$$

le plan diamétral conjugué à la direction $(\lambda, \mu, \nu)$ a pour équation

$$x\varphi'_\lambda + y\varphi'_\mu + z\varphi'_\nu + 2C\lambda + 2C'\mu + 2C''\nu = 0,$$

c'est-à-dire

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

$h$ étant une constante, ce qui démontre la proposition.

On peut donc définir *le diamètre conjugué à un plan* P : *un diamètre tel que le plan diamétral conjugué à sa direction soit parallèle au plan* P.

257. Problème. — *Mener par un point donné* $A(x_0, y_0, z_0)$ *un plan qui coupe une quadrique donnée suivant une conique ayant son centre en* A.

L'équation du plan demandé est de la forme

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0;$$

le point A devant être sur le diamètre conjugué à ce plan, on doit avoir

$$\frac{f'_{x_0}}{u} = \frac{f'_{y_0}}{v} = \frac{f'_{z_0}}{w}:$$

donc l'équation demandée est

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} + (z - z_0)f'_{z_0} = 0.$$

EXERCICES.

1. Trouver l'équation de la surface diamétrale conjuguée à une direction donnée et relative à une surface algébrique quelconque.

Appliquer la méthode à la surface ayant pour équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 1 = 0.$$

1° Pour une direction quelconque de cordes; 2° pour des cordes parallèles au plan $x + y + z = 0$.

2. Lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection d'une surface algébrique et d'une sécante variable parallèle à une direction donnée.

3. Trouver le lieu des cordes d'une quadrique qui ont leur milieu en un point donné.

4. Lieu des cordes d'une quadrique, telles qu'un point donné les partage toutes dans un rapport donné.

5. Démontrer les théorèmes de Newton, Mac-Laurin (*voir* t. II, p. 73, les théorèmes relatifs aux courbes) pour une surface quelconque. Appliquer ces théorèmes à une quadrique et considérer en particulier des sécantes issues du centre.

# CHAPITRE XVI.

## PLANS PRINCIPAUX. — CORDES PRINCIPALES. — AXES. ÉQUATION EN S.

---

**258.** On nomme *plan principal* tout plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales; la direction de ces cordes est alors appelée *direction principale*.

1° Supposons les axes de coordonnées rectangulaires. Le plan diamétral conjugué à la direction ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) ayant pour équation

$$(1) \qquad x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2C\alpha + 2C'\beta + 2C''\gamma = 0;$$

la direction donnée sera une direction principale si

$$(2) \qquad \frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma}.$$

En prenant comme inconnue auxiliaire la valeur commune de ces rapports, que nous appellerons 2 S, nous devrons trouver des valeurs non toutes nulles de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, vérifiant le système

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}\varphi'_\alpha = S\alpha, \qquad \tfrac{1}{2}\varphi'_\beta = S\beta, \qquad \tfrac{1}{2}\varphi'_\gamma = S\gamma,$$

ou, en développant,

$$(4) \qquad \begin{cases} (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0. \end{cases}$$

Pour que ces équations soient vérifiées par des valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ non toutes nulles, il faut et il suffit que S soit racine de l'équation suivante, dite *équation en* S,

$$(5) \qquad \Delta(S) \equiv \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$-\Delta(S) \equiv S^3 - (A + A' + A'')S^2 + (a + a' + a'')S - \Delta = 0,$$

$a, a', a''$ étant les mineurs symétriques du déterminant $\Delta$, de sorte que $a = A'A'' - B^2$, $a' = A''A - B'^2$, $a'' = AA' - B''^2$.

2° Supposons les axes obliques. Dire que le plan diamétral conjugué à la direction $\alpha, \beta, \gamma$ est perpendiculaire à cette direction revient à dire qu'il est parallèle au plan diamétral conjugué à la même direction dans une sphère. Donc, la direction considérée sera une direction principale si

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\psi'_\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\psi'_\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\psi'_\gamma}.$$

Si l'on désigne par S la valeur commune de ces rapports, on a alors

$$\varphi'_\alpha - S\psi'_\alpha = 0, \qquad \varphi'_\beta - S\psi'_\beta = 0, \qquad \varphi'_\gamma - S\psi'_\gamma = 0.$$

L'équation en S provenant de l'élimination de $\alpha, \beta, \gamma$ s'obtient donc en égalant à zéro le discriminant de la forme

$$\varphi(x, y, z) - S\psi(x, y, z).$$

## Discussion de l'équation en S.

### MÉTHODE DE MM. KRONECKER ET WALECKI.

**239.** $\Delta(S)$ est le discriminant de la forme

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2).$$

Soit $a + bi$ une racine de l'équation $\Delta(S) = 0$; pour cette valeur de S, la forme précédente est la somme de deux carrés au plus, et l'on peut poser

$$\varphi(x, y, z) - (a + bi)(x^2 + y^2 + z^2) = (P + P'i)^2 + (Q + Q'i)^2,$$

P, P', Q, Q' désignant des polynomes entiers en $x, y, z$ à coefficients réels; quelques-uns de ces polynomes pouvant d'ailleurs être identiquement nuls. Or on peut, et cela d'une infinité de manières, attribuer à $x, y, z$ des valeurs $x_0, y_0, z_0$ non toutes nulles pour lesquelles les polynomes P' et Q' (qui sont, au plus, au nombre de deux) se réduisent à zéro. On a, pour ces valeurs,

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) - (a + bi)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = P_0^2 + Q_0^2,$$

$P_0$ et $Q_0$ étant ce que deviennent P et Q après la substitution. Le second membre de cette égalité étant réel, il en est de même du premier, ce qui prouve que $b(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$, c'est-à-dire $b = 0$.

La démonstration précédente s'étend à l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - S\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$\varphi(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ désignant une forme quadratique quelconque, et

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une forme quadratique *définie*. En particulier elle s'applique à l'équation en S relative à des axes obliques (259, 2°).

*Conditions pour que l'équation* $\Delta(S) = 0$ *ait une racine multiple.* — Il s'agit de savoir si l'on peut déterminer S de façon que $\Delta(S) = 0$ et $\Delta'(S) = 0$. Or, on trouve

$$-\Delta'(S) = a_S + a'_S + a''_S,$$

en désignant par $a_S$, $a'_S$, $a''_S$ les mineurs symétriques de $\Delta(S)$. Mais, en vertu de la remarque faite plus haut (224), si $\Delta(S) = 0$, S étant dès lors réel, deux mineurs symétriques de $\Delta(S)$ qui seraient différents de zéro auraient le même signe; la somme de ces trois mineurs devant être nulle, chacun d'eux est nécessairement nul, et il en est alors de même des trois autres mineurs. Réciproquement, si tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(S)$ sont nuls, il est clair que $\Delta(S) = 0$ et $\Delta'(S) = 0$. Donc, pour que l'équation en S ait une racine multiple, il faut et il suffit qu'il y ait une valeur de S pour laquelle les mineurs du second degré de $\Delta(S)$ soient nuls, c'est-à-dire :

$$(6)\quad \begin{cases} (A'-S)(A''-S) - B^2 = 0, & B(A-S) - B'B'' = 0, \\ (A''-S)(A-S) - B'^2 = 0, & B'(A'-S) - B''B = 0, \\ (A-S)(A'-S) - B''^2 = 0, & B''(A''-S) - BB' = 0. \end{cases}$$

Pour que S soit racine triple, il faut en outre que $\Delta''(S) = 0$, c'est-à-dire :

$$A - S + A' - S + A'' - S = 0.$$

Mais, en vertu des équations (6), deux des trois différences $A - S$, $A' - S$, $A'' - S$ qui ne seraient pas nulles, devant avoir le même signe, on en conclut que, chacune de ces différences doit être nulle, et par suite, toujours en vertu des équations (6), on doit avoir

$$(7)\qquad A = A' = A'' = S, \qquad B = B' = B'' = 0.$$

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, on voit immédiatement que $\Delta(A) = 0$, $\Delta'(A) = 0$, $\Delta''(A) = 0$, et par suite, dans le cas de la sphère et seulement dans ce cas, l'équation en S a une racine triple, égale au coefficient de $x^2$. Si les équations (6) peuvent être vérifiées et si la surface n'est pas une sphère, l'équation en S a donc une racine double.

Si aucun des coefficients B, B' ou B'' n'est nul, on tire des équations (6)

$$S = A - \frac{B'B''}{B}, \qquad S = A' - \frac{B''B}{B'}, \qquad S = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

et par suite on doit avoir

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Ces conditions sont donc *nécessaires* pour que l'équation en S ait une racine double, quand B, B', B'' sont différents de zéro; elles sont *suffisantes*, car si elles sont remplies et si l'on remplace S par la valeur commune de ces expressions, on voit que les équations (6) sont vérifiées.

Supposons en second lieu $B''=0$; la dernière des équations (6) montre qu'un second coefficient des rectangles, par exemple $B'$, doit être nul : donc si un seul des coefficients des rectangles est nul, l'équation en S a ses trois racines simples.

Supposons enfin $B''=0$, $B'=0$ et $B\neq 0$; les équations (6) donnent alors

$$S=A, \qquad (A'-A)(A''-A)-B^2=0.$$

Si $B=B'=B''=0$, les équations (6) se réduisent à

$$(A'-S)(A''-S)=0, \qquad (A''-S)(A-S)=0, \qquad (A-S)(A'-S)=0$$

et il suffit alors que deux des coefficients $A$, $A'$, $A''$ soient égaux, et leur valeur commune est alors la racine double.

En résumé, si $B''=0$, les conditions sont

$$B'=0, \qquad (A'-A)(A''-A)-B^2=0 \qquad \text{et} \qquad S=A$$

ou

$$B=0, \qquad (A-A')(A''-A')-B'^2=0 \qquad \text{et} \qquad S=A'.$$

Ainsi, il faut *deux conditions* pour que l'équation en S ait une racine double, quand les coefficients sont réels.

On peut résumer ainsi la discussion :

Pour que l'équation en S ait une racine double, il faut et il suffit qu'il existe une valeur de S telle que $\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)$ soit un carré parfait; et pour qu'elle ait une racine triple, que cette forme soit identiquement nulle.

## APPLICATION DE L'ÉQUATION EN λ.

**260.** L'équation en S n'est pas autre chose que l'équation en $\lambda$ relative aux deux coniques ayant pour équations, dans le plan $xOy$,

$$Ax^2+2B''xy+A'y^2+2B'x+2By+A''=0, \qquad x^2+y^2+1=0.$$

La seconde équation représentant une conique imaginaire, les quatre points communs aux deux coniques considérées sont nécessairement imaginaires, ce qui prouve que l'équation en $\lambda$ relative à ces coniques a ses trois racines réelles.

En second lieu, pour que l'équation en $\lambda$ ait une racine double, il faut et il suffit que les deux coniques soient tangentes; le point de contact étant nécessairement imaginaire, les deux coniques sont alors tangentes en deux points imaginaires conjugués; donc si l'on remplace $\lambda$ par la racine double S, on a

$$\varphi(x,y,1)-S(x^2+y^2+1)\equiv \varepsilon P^2.$$

L'équation en $\lambda$ aura une racine triple si les deux coniques ont un contact du second ordre; mais, le point de contact étant imaginaire, il y aurait un second contact du second ordre, imaginaire conjugué du premier, ce qui est impossible à moins que les deux coniques ne coïncident; dans ce cas, la quadrique proposée est une sphère.

### MÉTHODE DE CAUCHY.

**261.** Premier cas : B, B' *et* B'' *différents de zéro.* — Si l'on développe $\Delta(S)$ suivant les éléments de la première ligne, on peut écrire

$$(A-S)[(A'-S)(A''-S)-B^2]-B'^2(A'-S)-B''^2(A''-S)+2BB'B''=0.$$

L'équation $(A'-S)(A''-S)-B^2=0$ a deux racines réelles et inégales; on le voit en substituant $-\infty$, $A'$ ou $A''$ et $+\infty$. Soit $\alpha$ la plus petite racine, qui est inférieure à $A'$ et à $A''$ et soit $\beta$ la plus grande, qui est supérieure à $A'$ et à $A''$. Substituons à S, dans $\Delta(S)$, successivement $-\infty$, $\alpha$, $\beta$, $+\infty$. On a

$$\Delta(\alpha)=-B'^2(A'-\alpha)-B''^2(A''-\alpha)+2BB'B'',$$

c'est-à-dire

$$\Delta(\alpha)=-\frac{[B'(A'-\alpha)-BB'']^2}{A'-\alpha},$$

et de même

$$\Delta(\beta)=-\frac{[B'(A'-\beta)-BB'']^2}{A'-\beta}.$$

Si les deux numérateurs des fractions précédentes sont différents de zéro, on a le tableau suivant :

| S | $-\infty$ | $\alpha$ | $\beta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta(S)$ | + | − | + | − |

Dans ce cas, les trois racines sont réelles, distinctes et séparées par les intervalles précédents. L'équation $B'(A'-S)-BB''=0$ étant du premier degré, il peut arriver que l'un des nombres $\alpha$ ou $\beta$ soit une racine de cette équation; supposons que ce soit $\alpha$. Dans ce cas, $\Delta(\alpha)=0$. L'équation en S a alors une racine égale à $\alpha$ et une racine comprise entre $\beta$ et $+\infty$; sa troisième racine est donc réelle et peut d'ailleurs être égale à $\alpha$ ou en être distincte.

Deuxième cas. — *L'un des coefficients des rectangles, par exemple* $B'' = 0$.

$$\Delta(S) \equiv (A - S)[(A' - S)(A'' - S) - B^2] - B'^2(A' - S).$$

En suivant la méthode précédente, on reconnaît que les trois racines sont réelles et toujours distinctes.

Troisième cas. — *Deux des coefficients des rectangles sont nuls.* $B' = B'' = 0$.

$$\Delta(S) \equiv (A - S)[(A' - S)(A'' - S) - B^2].$$

Les trois racines sont réelles et égales à A, $\alpha$, $\beta$.

Dans ce cas, il y aura une racine double si $A = \alpha$ ou $A = \beta$, c'est-à-dire si

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0,$$

et il ne peut y avoir de *racine triple*.

Quatrième cas. — $B = B' = B'' = 0$,

$$\Delta(S) \equiv (A - S)(A' - S)(A'' - S).$$

Les racines sont mises en évidence. Il y a une racine double si deux des coefficients A, A' ou A'' sont égaux. Si $A = A'$, la racine double est égale à A. Si $A = A' = A''$, A est racine triple.

*Conditions pour que l'équation en* S *ait une racine double.* — Nous n'avons plus à nous occuper que du cas où B, B', B'' sont différents de zéro. Il résulte de la discussion faite dans le premier cas que l'équation $\Delta(S) = 0$ ne peut avoir de racine double différente de $\alpha$ ou de $\beta$. On doit donc avoir, si S est racine double,

$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = 0, \quad B'(A' - S) - BB'' = 0 \quad \text{et} \quad \Delta'(S) = 0.$$

On tire des deux premières équations

$$A' - S = \frac{BB''}{B'}, \qquad A'' - S = \frac{BB'}{B''}.$$

Mais

$$-\Delta'(S) \equiv (A' - S)(A'' - S) - B^2 + (A'' - S)(A - S) - B'^2 + (A - S)(A' - S) - B''^2,$$

en égalant à zéro et tenant compte des valeurs trouvées pour $A' - S$ et $A'' - S$, il vient

$$(A - S)\left(\frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) = B'^2 + B''^2,$$

c'est-à-dire

$$A - S = \frac{B'B''}{B}.$$

On obtient ainsi les conditions nécessaires

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

et la valeur commune de ces expressions est précisément la racine double. Réciproquement, si ces conditions sont remplies et si l'on pose

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = C'' - \frac{BB'}{B''},$$

on vérifie immédiatement que $\Delta(S) = 0$, $\Delta'(S) = 0$.

Les conditions précédentes sont donc nécessaires et suffisantes pour que $\Delta(S) = 0$ ait une racine au moins double.

*Conditions pour que l'équation en* S *ait une racine triple.* — Il s'agit de trouver à quelles conditions il existe une valeur de S telle que

$$\Delta(S) = 0, \qquad \Delta'(S) = 0, \qquad \Delta''(S) = 0.$$

Or

$$2\Delta''(S) = A - S + A' - S + A'' - S.$$

Mais en vertu des deux premières conditions $A - S$, $A' - S$ et $A'' - S$ ont le même signe, celui de $BB'B''$; donc on doit avoir $A = A' = A'' = S$, ce qui est impossible, car $A - S$ étant égal à $\frac{B'B''}{B}$ n'est pas nul; donc, si $BB'B'' \neq 0$, l'équation n'a pas de racine triple. Supposons donc, par exemple, $B'' = 0$, $B' = 0$. Dans ce cas, l'équation ne peut avoir une racine triple que si $B = 0$ et $A = A' = A''$.

En résumé, l'équation en S ne peut avoir ses trois racines égales que si l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente une sphère.

*Remarque.* — La méthode de discussion de Cauchy s'applique à une équation $\Delta(S) = 0$, dont le premier membre est obtenu en retranchant S à chacun des éléments de la diagonale principale d'un déterminant symétrique. Les racines de l'équation obtenue en annulant le déterminant mineur formé au moyen des $p$ premières lignes et des $p$ premières colonnes séparent les racines de l'équation obtenue en annulant le mineur formé avec les $p+1$ premières lignes et les $p+1$ premières colonnes.

### MÉTHODE DE JACOBI.

**262.** Cette méthode ne s'applique qu'au cas où l'on suppose $BB'B'' \neq 0$.

Reprenons les équations (4); on peut les transformer de manière à les rendre plus symétriques. En multipliant le premier membre de la première par B, on obtient

$$B(A - S)\alpha + BB''\beta + BB'\gamma = 0,$$

et, par suite, si l'on pose

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = V,$$

cette équation s'écrit

$$B\alpha\left(A - \frac{B'B''}{B} - S\right) + V = 0.$$

On est ainsi conduit à poser

$$A - \frac{B'B''}{B} = h, \qquad A' - \frac{BB''}{B'} = h', \qquad A'' - \frac{BB'}{B''} = h'';$$

ce qui permet d'écrire les équations (4) sous la forme

$$(4)' \qquad \begin{cases} V = B\alpha(S - h), \\ V = B'\beta(S - h'), \\ V = B''\gamma(S - h''). \end{cases}$$

On reconnaît ainsi que les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, qui correspondent à une valeur donnée de S, sont proportionnelles à

$$\frac{1}{B(S-h)}, \qquad \frac{1}{B'(S-h')}, \qquad \frac{1}{B''(S-h'')},$$

résultat que nous utiliserons plus loin.

D'autre part, en écrivant les équations (4)' de cette manière :

$$\frac{B'B''}{B}\frac{V}{S-h} = B'B''\alpha,$$

$$\frac{B''B}{B'}\frac{V}{S-h'} = B''B\beta,$$

$$\frac{BB'}{B''}\frac{V}{S-h''} = BB'\gamma,$$

et en ajoutant membre à membre ces équations, puis supprimant le facteur V, on obtient l'équation en S sous la forme que Jacobi lui a donnée :

$$\frac{B'B''}{B(S-h)} + \frac{B''B}{B'(S-h')} + \frac{BB'}{B''(S-h'')} = 1.$$

On sait discuter les équations de cette forme (*voir*, par exemple, *Cours d'Algèbre*, t. II, p. 193).

On obtient d'ailleurs cette équation sous forme entière en posant, dans $\Delta(S)$,

$$A = h + \frac{B'B''}{B}, \qquad A' = h' + \frac{B''B}{B'}, \qquad A'' = h'' + \frac{BB'}{B''}$$

et simplifiant. L'équation en S prend ainsi la forme

$$(h - S)(h' - S)(h'' - S) + \frac{BB'}{B''}(h - S)(h' - S)$$
$$+ \frac{B'B''}{B}(h' - S)(h'' - S) + \frac{B''B}{B'}(h'' - S)(h - S) = 0.$$

On discute cette équation en substituant $-\infty$, $h$, $h'$, $h''$, $+\infty$; en supposant, pour fixer les idées, $h < h' < h''$. Si, par exemple, $BB'B''$ est positif, elle a une racine réelle entre $h$ et $h'$, une deuxième entre $h'$ et $h''$, et une troisième entre $h''$ et $+\infty$. Ces trois racines sont donc distinctes.

Supposons $h = h' < h''$; dans ce cas, $S - h$ est en facteur; en supprimant ce facteur, auquel correspond une première racine réelle $h$, on obtient l'équation

$$(h - S)(h'' - S) + \frac{BB'}{B''}(h - S) + \left(\frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'}\right)(h'' - S) = 0,$$

équation de même forme, qui a une racine réelle comprise entre $h$ et $h''$ et une autre racine réelle plus grande que $h''$ ou plus petite que $h$, suivant que $BB'B''$ est positif ou négatif.

Enfin, soit $h = h' = h''$. Dans ce cas $(S - h)^2$ est en facteur, ce qui prouve que l'équation $\Delta(S) = 0$ a une racine double égale à $h$ et une racine distincte de $h$. On retrouve donc un résultat déjà obtenu, à savoir que, dans le cas où les coefficients B, B', B'' sont tous trois différents de zéro, les conditions pour que l'équation $\Delta(S) = 0$ ait une racine double sont : $h = h' = h''$.

*Remarque.* — On appelle souvent $h$, $h'$, $h''$ les *nombres de Jacobi.*

### MÉTHODE DE M. LAURENT POUR EXPRIMER QUE L'ÉQUATION $\Delta(S) = 0$ A UNE RACINE DOUBLE.

**263.** On peut dire que l'équation

$$(7) \qquad (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0$$

est l'équation en S, pourvu que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ soient regardés comme définis par les équations

$$(8) \qquad \begin{cases} B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0, \end{cases}$$

en supposant, en outre, par exemple, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Je dis que, si l'équation $\Delta(S) = 0$ a une racine double, les mineurs de $\Delta(S)$ sont tous nuls. En effet, posons

$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = a, \qquad BB' - B''(A'' - S) = b'',$$
$$BB'' - B'(A' - S) = b', \qquad \ldots,$$

et supposons que l'un au moins des mineurs $a$, $b''$, $b'$ soit différent de zéro. On tire alors des équations (4),

$$\alpha = \lambda a, \qquad \beta = \lambda b'', \qquad \gamma = \lambda b',$$

d'où

$$\lambda^2(a^2 + b''^2 + b'^2) = 1.$$

Mais on doit annuler la dérivée du premier membre de l'équation (7) par rapport à S; donc on doit poser

$$\begin{aligned}(A - S)\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' &= \alpha,\\ B''\alpha' + (A' - S)\beta' + B\gamma' &= \beta,\\ B'\alpha' + B\beta' + (A'' - S)\gamma' &= \gamma,\end{aligned}$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ étant les dérivées de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ prises par rapport à S.

En ajoutant membre à membre, après multiplication par $a$, $b''$, $b'$, on trouve

$$a\alpha + b''\beta + b'\gamma = 0.$$

c'est-à-dire

$$\lambda(a^2 + b''^2 + b'^2) = 0.$$

Mais, d'après ce qui précède, les deux facteurs de cette équation sont différents de zéro; il est donc impossible de supposer un mineur différent de zéro (voir *Nouvelles Annales*, 1891, p. 503, où la méthode est généralisée).

---

264. Théorème. — *Les coefficients de l'équation en* S *sont des invariants.*

Le discriminant de la forme $\varphi(x, y, z) - S\psi(x, y, z)$ est un invariant relativement à toute substitution linéaire, quel que soit S; il en est donc de même des coefficients des différentes puissances de S.

En particulier, dans le cas d'une transformation de coordonnées rectangulaires, le module de la substitution est égal à 1, et, par suite, si l'on nomme $A_1$, $A'_1$, ... les coefficients de l'équation transformée, et $\Delta_1(S)$ le nouveau discriminant, on a

$$\Delta_1(S) = \Delta(S);$$

il en résulte que

$$\begin{gathered}A + A' + A'' = A_1 + A'_1 + A''_1,\\ a + a' + a'' = a_1 + a'_1 + a''_1,\\ \Delta = \Delta_1.\end{gathered}$$

On voit que les racines de l'équation en S ne changent pas quand on fait une transformation de coordonnées. On en conclut immédiatement que S' est une racine double si pour S = S' tous les mineurs du premier ordre du discriminant $\Delta(S)$ sont nuls, que les axes soient rectangulaires ou obliques et que l'équation en S n'a une racine triple que dans le cas de la sphère.

DÉTERMINATION DES CORDES PRINCIPALES.

**265.** Théorème. — *A une racine simple de l'équation en S correspond une direction unique de cordes principales; à une racine double correspondent une infinité de directions principales qui sont parallèles à un même plan. Quand l'équation en S a une racine triple, toutes les directions sont des directions principales.*

Supposons, en effet, que S désigne une racine simple; dans ce cas, l'un au moins des mineurs de $\Delta(S)$ est différent de zéro; donc les équations (4) se réduisent à deux. Supposons, par exemple, le mineur $(A-S)(A'-S)-B''^2 \neq 0$; les équations

$$(A-S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,$$
$$B''\alpha + (A'-S)\beta + B\gamma = 0$$

déterminent les rapports mutuels de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; à la racine S considérée ne correspond donc qu'une seule direction principale, qui est celle de l'intersection des plans définis par les deux équations précédentes, quand on y remplace $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par des coordonnées courantes. D'ailleurs, on tire de ces équations

$$\frac{\alpha}{BB''-B'(A'-S)} = \frac{\beta}{B'B''-(A-S)},$$

c'est-à-dire

$$B\alpha(S-h) = B'\beta(S-h').$$

On retrouve ainsi un résultat déjà obtenu.

Supposons que S soit une racine double; les mineurs de $\Delta(S)$ étant tous nuls, les équations (4) se réduisent à une seule; supposons que ce soit la première

$$(A-S)\beta + B''\beta + B'\gamma = 0;$$

il y a, dans ce cas, une infinité de directions principales, parallèles au plan ayant pour équation

$$(A-S)x + B''y + B'z = 0.$$

Supposons $BB'B'' \neq 0$; dans ce cas, $A - S = \frac{B'B''}{B}$, et l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

Si $B'' = B' = 0$ et $S = A$, la première des équations (4) disparaît, les deux autres

$$(A' - A)\beta + B\gamma = 0,$$
$$B\beta + (A'' - A)\gamma = 0$$

sont identiques, puisqu'on suppose $(A' - A)(A'' - A) = B^2$. Il y a donc alors une infinité de directions principales qui sont parallèles au plan défini par l'équation

$$(A' - A)y + Bz = 0.$$

Enfin, dans le cas de la sphère, les équations (4) disparaissent quand on pose $S = A$; donc, dans ce cas, toute direction est une direction principale, ce qui est évident *a priori*.

266. Théorème. — *Deux directions principales qui correspondent à deux racines distinctes de l'équation en* S, *sont rectangulaires.*

En effet, soient S et S' deux racines distinctes et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les paramètres directeurs des cordes principales correspondantes. On a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 2S\alpha, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 2S\beta, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 2S\gamma,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'} = 2S'\alpha', \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta'} = 2S'\beta', \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 2S'\gamma'.$$

On en déduit immédiatement

$$\alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \gamma'\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 2S(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'),$$
$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial\beta'} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma'} = 2S'(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'),$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$0 = (S - S')(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'),$$

ce qui prouve que

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

et aussi que

$$\alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \beta'\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \gamma'\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 0.$$

On voit ainsi que les cordes sont rectangulaires et, en outre, que

chacune d'elles est parallèle au plan diamétral conjugué à l'autre, c'est-à-dire que les deux directions sont conjuguées.

**267.** *Remarque.* — De ce qui vient d'être établi résulte une nouvelle démonstration de la réalité des racines de $\Delta(S) = 0$. En effet, si cette équation avait une racine imaginaire $p + qi$, on pourrait déduire des équations (4), pour $S = p + qi$, une solution $\alpha = a + a'i$, $\beta = b + b'i$, $\gamma = c + c'i$; mais ce système serait évidemment vérifié en posant

$$S' = p - qi, \qquad \alpha' = a - a'i, \qquad \beta' = b - b'i, \qquad \gamma' = c - c'i.$$

Or la condition $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$ donnerait

$$a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$a = a' = b = b' = c = c' = 0,$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

**268.** Théorème. — *A toute direction principale donnée par une racine, différente de zéro, de l'équation* $\Delta(S) = 0$, *correspond un plan principal à distance finie.*

En effet, l'équation du plan diamétral correspondant à une direction principale $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ est

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma + 2C\alpha + 2C'\beta + 2C''\gamma = 0,$$

c'est-à-dire

$$S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Ce plan ne peut être rejeté à l'infini, ou indéterminé, que si l'on suppose $S\alpha = 0$, $S\beta = 0$, $S\gamma = 0$, c'est-à-dire si $S = 0$, puisque l'un au moins des paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ est différent de zéro.

A une racine simple non nulle de l'équation en S correspond un plan principal unique; à une racine double non nulle correspondent une infinité de plans principaux perpendiculaires à un plan déterminé et passant par une même droite (254).

**269.** Théorème. — *L'équation en* S *ne peut avoir ses trois racines nulles.*

En effet, si les trois racines sont nulles, l'équation a une racine triple; donc

$$A = A' = A'', \qquad B = B' = B' = 0;$$

en outre, la racine triple est égale à A; donc il faudrait supposer

$$A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0.$$

**270.** Corollaire. — *Une quadrique possède au moins un plan principal à distance finie.*

En effet, une au moins des racines de l'équation en S est différente de zéro.

**271.** Théorème. — *Une quadrique à centre unique possède au moins un système de trois plans principaux formant un trièdre trirectangle.*

En effet, supposons d'abord les trois racines de l'équation en S distinctes; le terme constant de l'équation en S est égal au discriminant $\Delta$ de la fonction $\varphi(x, y, z)$; il est différent de zéro, ce qui montre que chacune des racines est différente de zéro, et, par suite, qu'à chacune d'elles correspond un plan principal à distance finie. Si l'on mène par le centre trois droites OA, OB, OC parallèles aux cordes principales, ces trois droites forment un trièdre trirectangle. Le plan diamétral conjugué à la direction OA est précisément le plan OBC; OAC est le plan diamétral conjugué à OB, et enfin OAB le plan conjugué à OC; les trois faces du trièdre sont donc les trois plans principaux.

Supposons, en second lieu, que, l'une des racines étant simple, les deux autres soient égales; appelons $S_1$ la racine simple et $S_2$ la racine double. Menons par le centre une droite OC parallèle à la direction principale correspondant à $S_1$. A la racine $S_2$ correspondent une infinité de directions principales perpendiculaires à $S_1$; pour mieux dire, toute droite perpendiculaire à OC est une direction principale; donc, si l'on prend deux droites OA, OB formant avec OC un trièdre trirectangle, les faces de ce trièdre seront des plans principaux; on obtient ainsi une infinité de systèmes de trois plans principaux rectangulaires deux à deux. Les plans principaux correspondant à la racine double passent tous par une droite qui est le diamètre conjugué au plan parallèle aux cordes principales fournies par cette racine double.

Enfin, si les racines de l'équation en S sont égales, la quadrique est une sphère et tout système de trois plans diamétraux rectangulaires deux à deux constitue un système de trois plans principaux.

**272.** Théorème. — *Un paraboloïde a au moins un système de deux plans principaux rectangulaires, parallèles à la direction des diamètres.*

L'équation en S, relative à un paraboloïde, a une racine nulle à laquelle correspond un plan principal à l'infini. Pour le prouver, il suffit de remarquer que les paramètres directeurs des cordes principales qui correspondent à la racine nulle sont déterminés par les équations

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,$$
$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma = 0,$$
$$B'\alpha + B\beta + A''\gamma = 0.$$

Or, si l'on regarde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ comme des coordonnées courantes, ces équations sont précisément celles des plans du centre; on sait que ces plans sont parallèles à une droite déterminée, et de plus on ne peut pas supposer

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

car la quadrique serait alors un cylindre; le premier membre de l'équation du plan principal conjugué à la direction $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se réduit donc à une constante différente de zéro.

Les deux autres racines de l'équation en S, si elles sont distinctes, fournissent deux directions principales distinctes; on a ainsi trois directions principales, rectangulaires deux à deux; les plans principaux qui correspondent aux racines non nulles sont donc perpendiculaires entre eux et parallèles à la direction des diamètres.

Si les racines non nulles sont égales, il correspond à la racine double une infinité de cordes principales perpendiculaires à la direction des diamètres; en choisissant deux directions quelconques, perpendiculaires entre elles et aux diamètres, on aura une infinité de systèmes de deux plans principaux rectangulaires passant par une même droite.

**273.** Théorème. — *Dans le cas des cylindres, le plan principal correspondant à la racine nulle de l'équation en* S *est indéterminé.*

Prenons pour axes des $x$ et des $y$ les axes de symétrie d'une section droite d'un cylindre à centres, l'axe des $z$ étant perpendiculaire

aux deux premiers axes; l'équation du cylindre est alors de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + D = 0.$$

L'équation en S relative à ce cylindre est

$$S(A - S)(A' - S) = 0;$$

les racines sont

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = A, \qquad S_3 = A'.$$

La direction principale correspondant à $S_1$ est définie par les équations

$$A\alpha = 0, \qquad A'\beta = 0,$$

Cette direction est celle de l'axe des $z$; le plan principal correspondant est visiblement indéterminé.

On vérifie immédiatement que les deux autres racines donnent pour plans principaux le plan $xOz$ et le plan $yOz$. Si ces racines sont égales, $A = A'$, le cylindre est de révolution et tout plan passant par son axe est un plan principal.

Considérons maintenant le cas d'un cylindre parabolique. On peut évidemment mettre l'équation d'un cylindre parabolique sous la forme

$$y^2 - 2px = 0.$$

L'équation en S se réduit alors à $S^2(1 - S) = 0$. A la racine nulle, qui est double, correspondent une infinité de cordes principales parallèles au plan $xOz$; le plan principal correspondant à chacune de ces cordes est à l'infini, sauf celui qui correspond à la direction $Oy$ et qui est indéterminé. A la racine simple correspond la direction $Oy$ et le plan principal est le plan $xOz$. Le cylindre parabolique a donc une infinité de plans principaux perpendiculaires à ses génératrices et un plan principal qui est parallèle aux plans du centre. Ces résultats se vérifient d'ailleurs sur la forme générale

$$(ax + by + cz)^2 + 2a' + 2b'y + 2c'z + d' = 0.$$

### Conditions pour que l'équation du second degré $f(x, y, z) = 0$ représente une quadrique de révolution (axes rectangulaires).

**274.** Nous savons déjà que la forme de l'équation d'une quadrique de révolution est

$$A\sigma + P^2 = 0,$$

$\sigma$ étant le premier membre de l'équation d'une sphère, A une constante et P un polynome du premier degré, qu'on peut d'ailleurs, sans inconvénients, supposer homogène.

On a donc, dans ce cas,

$$\varphi(x, y, z) \equiv A(x^2 + y^2 + z^2) + P^2$$

et, par suite,

$$\varphi(x, y, z) - A(x^2 + y^2 + z^2) \equiv P^2.$$

Ce qui prouve que A est une racine double de l'équation en S relativeà cette quadrique.

Réciproquement, si l'équation en S a une racine double *non nulle* S, on a identiquement

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv hP^2,$$

P désignant un polynome entier homogène en $x, y, z$ et $h$ une constante, l'équation de la quadrique est donc

$$S(x^2 + y^2 + z^2) + hP^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

c'est-à-dire

$$S\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{C}{S}x + 2\frac{C'}{S}y + 2\frac{C''}{S}z + \frac{D}{S}\right) + hP^2$$

ou

$$S\sigma + hP^2 = 0.$$

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quadrique soit de révolution est que l'équation en* S *relative à cette quadrique ait une racine double et différente de zéro.*

*Équations de l'axe.* — Supposons d'abord B, B', B'' différents de zéro. Par hypothèse,

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''} = S,$$

S désignant la racine double; on a donc

$$\varphi(x, y, z) \equiv S(x^2 + y^2 + z^2) + BB'B''\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right)^2$$

et, par suite,

$$P \equiv \frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}.$$

L'axe est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère $\sigma$ sur le plan P; ses équations sont donc

$$B\left(x+\frac{C}{S}\right)=B'\left(y+\frac{C'}{S}\right)=B''\left(z+\frac{C''}{S}\right).$$

Supposons, en second lieu,

$$B''=0, \quad B'=0 \quad \text{et} \quad (A-A')(A-A'')-B^2=0.$$

On a, dans ce cas,

$$\varphi(x,y,z)\equiv A(x^2+y^2+z^2)+(A'-A)y^2+(A''-A)z^2+2Byz;$$

donc

$$(A'-A)P^2\equiv[(A'-A)y+Bz]^2.$$

Les équations de l'axe sont alors

$$x+\frac{C}{A}=0, \qquad \frac{y+\frac{C'}{A}}{A'-A}=\frac{z+\frac{C''}{A}}{B}.$$

Il est facile de vérifier que l'axe est le diamètre conjugué au plan auquel les cordes principales qui correspondent à la racine double sont parallèles.

## AXES.

**275.** *On appelle* axe d'une quadrique *un diamètre perpendiculaire au plan auquel il est conjugué.* C'est donc le diamètre conjugué à un plan principal.

*Un axe* ainsi défini *est l'intersection de deux plans principaux.*

En effet, rapportons une quadrique à trois axes rectangulaires, l'axe des $x$ étant un *axe* de cette quadrique, c'est-à-dire le diamètre conjugué au plan $yOz$. Ce diamètre a pour équations

$$f'_y=0, \qquad f'_z=0$$

ou, en développant,

$$B''x+A'y+Bz+C'=0, \qquad B'x+By+A''z+C''=0.$$

Ces équations doivent se réduire aux suivantes

$$y=0, \qquad z=0;$$

donc

$$B''=B'=C'=C''=0.$$

Ces conditions sont nécessaires; si elles sont remplies, les deux équations considérées se réduisent à

$$A'y + Bz = 0, \qquad By + A''z = 0,$$

ce qui montre qu'on doit supposer

$$A'A'' - B^2 \neq 0.$$

L'équation de la surface est donc

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2Cx + D = 0.$$

La section par le plan $yOz$ est, d'après ce qui précède, une conique à centre; son centre est l'origine. On peut supposer que les axes $Oy$ et $Oz$ sont les axes de cette conique et, par conséquent, supposer $B = 0$; l'équation de la quadrique est donc enfin

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + D = 0.$$

On voit ainsi que le plan $xOy$ est conjugué à $Oz$ et le plan $xOz$ conjugué à $Oy$; donc $Ox$ est bien l'intersection de deux plans principaux.

Réciproquement, supposons que deux des plans de coordonnées soient des plans principaux et que $f'_y = 0$ se réduise à $y = 0$ et $f'_z = 0$ à $z = 0$; on voit immédiatement que l'équation de la surface est de la forme trouvée plus haut.

276. *Remarque.* — Un axe est un axe de symétrie, comme cela résulte de la forme de l'équation précédente, mais la réciproque n'est pas vraie.

Cherchons en effet les conditions pour que l'axe des $x$ soit un axe de symétrie, les axes de coordonnées étant toujours supposés rectangulaires. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les deux équations

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

et

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz - 2B'zx - 2B''xy + 2Cx - 2C'y - 2C''z + D = 0$$

soient équivalentes, ce qui peut avoir lieu de deux manières; ou bien

$$B' = B'' = C' = C'' = 0;$$

dans ce cas, l'axe des $x$ est bien un axe de symétrie; ou encore

$$A = A' = A'' = B = C = D = 0;$$

l'équation se réduit alors à

$$B'zx + B''xy + C'y + C''z = 0.$$

Or le diamètre conjugué au plan $yOz$ a pour équations

$$B''x + C' = 0, \qquad B'x + C'' = 0;$$

il est donc, en général, rejeté à l'infini.

Par exemple, si l'équation est

$$xy + z = 0,$$

on voit que l'axe des $z$ est un axe de symétrie et aussi un axe; mais l'axe des $x$ est un axe de symétrie et non un axe; cela tient à ce que la surface est engendrée par une droite mobile perpendiculaire à l'axe $Ox$.

277. Équations des axes : 1° *Quadriques à centre unique.* — Soit $S_1$ une racine de l'équation en S; les paramètres de la direction principale correspondante sont proportionnels à

$$\frac{1}{B(S_1 - h)}, \quad \frac{1}{B'(S_1 - h')}, \quad \frac{1}{B''(S_1 - h'')};$$

l'axe parallèle à cette direction étant le diamètre conjugué du plan qui lui est perpendiculaire, cet axe a pour équations

$$B(S_1 - h)f'_x = B'(S_1 - h')f'_y = B''(S_1 - h'')f'_z.$$

2° *Paraboloïdes.* — L'équation en S ayant une racine nulle s'abaisse au second degré : on pourrait donc former les équations des plans principaux qui correspondent aux deux racines non nulles $S_2$, $S_3$; on aurait ainsi les équations de l'axe unique du paraboloïde considéré. On peut procéder autrement.

Les paramètres de la direction principale répondant à la racine nulle sont fournis par les équations

$$\begin{aligned} A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= 0, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Supposons $AA' - B''^2 \neq 0$; les deux premières équations sont distinctes et la troisième en est une conséquence. On a donc

$$\frac{\alpha}{b'} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{a''}.$$

L'axe étant le diamètre conjugué du plan perpendiculaire à cette

droite a pour équations

$$\frac{f'_x}{b'} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{a''}.$$

On peut donner à ces équations une forme plus symétrique. En effet, on peut les écrire ainsi

$$bf'_x = b'f'_y = \frac{bb'}{a''} f'_z$$

ou, en tenant compte de l'identité $bb' = a''b''$,

$$bf'_x = b'f'_y = b''f'_z.$$

On peut mettre encore ces équations sous une autre forme. En effet, on en déduit

$$\frac{f'_x}{b'} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{a''} = \frac{b'f'_x + bf'_y + a''f'_z}{b^2 + b'^2 + a''^2} = \frac{2(Cb' + C'b + C''a'')}{b' + b'^2 + a''^2}.$$

et, par suite, en posant

$$\frac{Cb + C'b + C''a''}{b^2 + b'^2 + a''} = k,$$

les équations de l'axe peuvent s'écrire

$$(1) \qquad f'_x = 2kb', \qquad f'_y = 2kb, \qquad f'_z = 2ka''.$$

On en déduit facilement les coordonnées du *sommet*, c'est-à-dire du point de rencontre du paraboloïde et de son axe. En effet, en écrivant l'équation du paraboloïde sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + tf'_t = 0,$$

on voit que les coordonnées du sommet vérifient les équations (1), lesquelles se réduisent à deux, et l'équation

$$(2) \qquad k(b'x + by + a''z) + Cx + C'y + C''z + D = 0.$$

**278.** *Équations du faisceau des axes d'une quadrique.* — Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres directeurs d'un axe; cet axe est parallèle à une direction principale; donc

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma};$$

d'autre part, le diamètre conjugué à un plan perpendiculaire à cet axe a pour équations

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta} = \frac{f'_z}{\gamma}.$$

Il en résulte que, pour tout axe,

$$\frac{\varphi'_{f'_x}}{f'_x} = \frac{\varphi'_{f'_y}}{f'_y} = \frac{\varphi'_{f'_z}}{f'_z}$$

ou, sous forme explicite,

$$\frac{Af'_x + B''f'_y + B'f'_z}{f'_x} = \frac{B''f'_x + A'f'_y + Bf'_z}{f'_y} = \frac{B'f'_x + Bf'_y + A''f'_z}{f'_z},$$

ces équations, qui se réduisent à deux (*voir* Exercice 1), représentent le faisceau des axes de la quadrique $f$.

Exemples :

1°
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D = 0,$$

on trouve
$$\frac{Ax}{x} = \frac{A'y}{y} = \frac{A''z}{z}$$
ou, sous forme entière,

$$(A - A')xy = 0, \quad (A' - A'')yz = 0, \quad (A'' - A)zx = 0,$$

ce qui donne

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0, \quad x = 0.$$

2°
$$A'y^2 + A''z^2 + 2x = 0,$$
$$\frac{0}{x} = \frac{A'y}{y} = \frac{A''z}{z}$$
ou, sous forme entière,
$$y = 0, \quad z = 0.$$

**279.** Problème. — *Exprimer qu'une droite est un axe d'une quadrique.*

Soient
$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

les équations d'une droite. Cette droite est un axe si elle coïncide avec le diamètre conjugué au plan qui lui est perpendiculaire, c'est-à-dire avec le diamètre conjugué au plan défini par l'équation

(1)
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Ce diamètre a pour équations

(2)
$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta} = \frac{f'_z}{\gamma}.$$

On exprime que les deux droites représentées par les équations (1) et (2) coïncident en écrivant qu'elles ont deux points communs, par

exemple le point $(x_0, y_0, z_0)$ et le point à l'infini dans la direction $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Écrivons donc que ce diamètre passe par le premier point, ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{f'_{x_0}}{\alpha} = \frac{f'_{y_0}}{\beta} = \frac{f'_{z_0}}{\gamma}$$

et, en second lieu, exprimons qu'il est parallèle à la direction $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; donc

$$(4) \qquad \frac{\varphi'_\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma}.$$

Les conditions (3) et (4) sont nécessaires et suffisantes. Les conditions (4) étaient d'ailleurs évidentes *a priori*.

**280.** Problème. — *Exprimer qu'un plan donné est un plan principal.*

Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan. Le plan diamétral conjugué à la direction perpendiculaire à ce plan a pour équation

$$x\varphi'_u + y\varphi'_v + z\varphi'_w + 2Cu + 2C'v + 2C''w = 0.$$

Les conditions demandées sont donc

$$\frac{\varphi'_u}{u} = \frac{\varphi'_v}{v} = \frac{\varphi'_w}{w} = 2\,\frac{Cu + C'v + C''w}{h}.$$

*Remarque.* — Un plan principal est un plan de symétrie et réciproquement. Il peut cependant y avoir exception. Si l'on considère le système formé par deux plans rectangulaires P, Q, l'un de ces plans, P par exemple, peut être considéré comme un plan de symétrie, et n'est cependant pas un plan principal.

## EXERCICES.

1. Trouver les directions principales d'une quadrique sans se servir de l'équation en S.

— Il suffit de remarquer que les cordes principales sont les génératrices communes aux cônes ayant pour équations

$$y\varphi'_z - z\varphi'_y = 0, \qquad z\varphi'_x - x\varphi'_z = 0, \qquad x\varphi'_y - y\varphi'_x = 0.$$

Les deux premiers cônes ont quatre génératrices communes, mais, en général, trois de ces droites appartiennent au troisième cône, tandis que la droite $z = 0$, $\varphi'_z = 0$ ne lui appartient pas, excepté dans le cas où les deux premiers cônes sont tangents suivant cette droite.

2. Trouver directement les cordes principales de la quadrique ayant pour équation

$$z^2 + 4xy = 1.$$

— On a à résoudre le système

$$\frac{2y}{x} = \frac{2x}{y} = \frac{z}{z}.$$

Penser à la solution $z = 0$, etc.

3. Déterminer les directions principales et les plans principaux des surfaces représentées par les équations données en Exercices au Chapitre XIII.

4. Plans principaux de la quadrique représentée par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + (Bx + B'y + B''z)^2 - 1 = 0.$$

5. Équation en S relative à la quadrique ayant pour équation

$$\varepsilon(ax + a'y + a''z)^2 + \varepsilon'(bx + b'y + b''z)^2 + \varepsilon''(cx + c'y + c''z)^2 + d = 0.$$

6. Même question pour

$$\varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 + \varepsilon''(a''x + b''y + c''z)^2 + d = 0.$$

7. Plans principaux de la quadrique représentée par l'équation $xy = 0$.

8. Discuter l'équation en S en axes obliques en employant la méthode de l'équation en $\lambda$.

# CHAPITRE XVII.

## RÉDUCTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

(AXES RECTANGULAIRES.)

### PREMIÈRE MÉTHODE : TRANSFORMATION DE COORDONNÉES.

**281.** *Transformation auxiliaire.* — L'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ représente un cône si l'on suppose $\Delta \neq 0$. Dans ce cas, l'équation en S n'a pas de racine nulle; supposons ses racines distinctes :

$S_1$, $S_2$, $S_3$. A chacune de ces racines correspond une direction principale dont nous savons calculer les paramètres principaux, puisque nous connaissons des nombres auxquels ils sont proportionnels. On peut donc, sans changer l'origine, choisir trois nouveaux axes de coordonnées rectangulaires ayant pour directions les trois directions principales obtenues, et, par suite, les formules de transformation seront

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ correspondant à la racine $S_1$; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ à la racine $S_2$, et $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ à la racine $S_3$. On a ainsi

$$\varphi(x, y, z) \equiv \varphi(\alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'),$$

ou, en tenant compte des équations $\alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta + \gamma' \varphi'_\gamma = 0, \ldots,$

$$\varphi(x, y, z) \equiv \varphi(\alpha, \beta, \gamma) x'^2 + \varphi(\alpha', \beta', \gamma') y'^2 + \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') z'^2;$$

mais

$$2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta + \gamma\varphi'_\gamma \equiv 2S_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 2S_1,$$

d'où

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = S_1.$$

De même

$$\varphi(\alpha', \beta', \gamma') = S_2, \qquad \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') = S_3.$$

On obtient ainsi cette formule fondamentale

$$\varphi(x, y, z) \equiv S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + S_3 z'^2.$$

Le calcul subsiste sans aucune modification si $\Delta = 0$; dans ce cas l'une des racines, par exemple $S_3 = 0$, et l'on aura

$$\varphi(x, y, z) \equiv S_1 x'^2 + S_2 y'^2.$$

Supposons, en second lieu, que deux racines soient égales, par exemple, $S_1 = S_2$. La direction $Oz'$ est déterminée; soient $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ ses paramètres principaux. On doit poser

$$\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0;$$

ce qui exprime que $Ox'$ doit être dans le plan passant par l'origine et perpendiculaire à $Oz'$; on peut prendre pour $Ox'$ l'intersection de

ce plan avec un second plan quelconque et, par suite, poser

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

on a ainsi

$$\frac{\alpha}{n\beta'' - m\gamma''} = \frac{\beta}{l\gamma'' - n\alpha''} = \frac{\gamma}{m\alpha'' - l\beta''}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{(n\beta'' - m\gamma'')^2 + (l\gamma'' - n\alpha'')^2 + (m\alpha'' - l\beta'')^2}}.$$

On détermine ensuite $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ en posant

$$\begin{aligned} \alpha''\alpha' + \beta''\beta' + \gamma''\gamma' &= 0, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Le calcul s'achève comme plus haut et l'on a

$$\varphi(x, y, z) \equiv S_1(x'^2 + y'^2) + S_3 z'^2.$$

Si $S_1 = 0$, la formule se réduit à

$$\varphi(x, y, z) \equiv S_3 z'^2.$$

Si le cône est isotrope, il n'y a pas lieu de faire cette transformation.

*Remarque.* — Dans chacune des transformations indiquées, la direction positive de chacun des nouveaux axes est indéterminée; on pourra la choisir de façon que les deux trièdres $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ soient de même espèce.

**282.** *Application.* — Si l'on remplace S par une racine de l'équation en S, la forme

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

se change en une somme de deux carrés; si les racines sont distinctes, il y a trois formes de décomposition distinctes : en effet, on a identiquement

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv (S_1 - S)x'^2 + (S_2 - S)y'^2 + (S_3 - S)z'^2.$$

Supposons $S_1 < S_2 < S_3$. On a

$$\begin{aligned} \varphi - S_1\psi &\equiv (S_2 - S_1)y'^2 + (S_3 - S_1)z'^2 \equiv P^2 + Q^2, \\ \varphi - S_2\psi &\equiv (S_1 - S_2)x'^2 + (S_3 - S_2)z'^2 \equiv P'^2 - Q'^2, \\ \varphi - S_3\psi &\equiv (S_1 - S_3)x'^2 + (S_2 - S_3)z'^2 \equiv -P''^2 - Q''^2, \end{aligned}$$

P, Q, P′, Q′, P″, Q″ désignant des polynomes entiers en $x, y, z$, à coefficients réels.

On n'obtient *une différence de carrés* que si l'on remplace S par la racine moyenne.

On peut arriver directement à ces résultats. En effet, je dis d'abord qu'à deux racines différentes correspondent deux décompositions différentes. Supposons, en effet, qu'on puisse écrire

$$\varphi - S\,\psi \equiv \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2,$$
$$\varphi - S'\psi \equiv \varepsilon P'^2 + \varepsilon' Q'^2,$$

on en déduirait

$$(S' - S)\psi \equiv \varepsilon(P^2 - P'^2) + \varepsilon'(Q^2 - Q'^2).$$

On peut trouver une infinité de valeurs non toutes nulles de $x, y, z$ pour lesquelles $P - P' = 0$, $Q - Q' = 0$; pour un pareil système de valeurs, le premier membre s'annulerait, ce qui est impossible, puisque $\psi$ ne peut être nul que si $x = y = z = 0$.

On a donc trois formes possibles de décomposition; donc on peut poser

$$\varphi - S_1\psi \equiv \quad P^2 + Q^2,$$
$$\varphi - S_2\psi \equiv \quad P'^2 - Q'^2,$$
$$\varphi - S_3\psi \equiv - P''^2 - Q''^2;$$

de là

$$(S_2 - S_1)\psi \equiv P^2 - P'^2 + Q^2 + Q'^2.$$

On peut, pour une infinité de valeurs de $x, y, z$, supposer $P' = 0$, d'où l'on conclut $S_2 - S_1 > 0$. On verrait, par un raisonnement analogue, que $S_3 - S_2 > 0$; donc $S_1 < S_2 < S_3$.

**283.** *Réduction de l'équation d'une quadrique à centre unique.* — 1° Transportons d'abord les axes parallèlement à eux-mêmes au centre $(x_0, y_0, z_0)$ en posant

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y', \qquad z = z_0 + z';$$

ce qui donne, comme on l'a déjà établi,

$$f(x, y, z) \equiv \varphi(x', y', z') + \frac{H}{\Delta}.$$

2° On applique ensuite à $\varphi(x', y', z')$ la transformation précé-

dente, en posant

$$x' = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y' = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,$$
$$z' = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z;$$

ce qui donne

$$\varphi(x', y', z') \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2;$$

on obtient ainsi

$$f(x, y, z) \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + \frac{H}{\Delta}.$$

284. *Réduction de l'équation d'un paraboloïde.* — On suppose

$$\Delta = 0, \qquad \delta \neq 0, \qquad \Delta_1 \neq 0.$$

1° On conserve l'origine et l'on prend pour directions des nouveaux axes trois cordes principales en posant

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z';$$

ce qui donne, en supposant que la racine nulle soit $S_1$,

$$f(x, y, z) \equiv S_2 y'^2 + S_3 z'^2 + 2C_1 x' + 2C_1' y' + 2C_1'' z' + D,$$

où

$$C_1 = C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$
$$C_1' = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma',$$
$$C_1'' = C\alpha'' + C'\beta'' + C''\gamma''.$$

Je dis que $C_1$ est différent de zéro. En effet, nous supposons $S_1 = 0$; donc

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,$$
$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma = 0.$$

On suppose $AA' - B''^2 \neq 0$; si l'on posait en outre

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0,$$

on aurait $\Delta_1 = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

2° Cela posé, la section de la surface par le plan $y'Oz' = 0$ est une conique à centre; on peut la rapporter à ses axes de symétrie.

Il suffit d'écrire

$$f(x,y,z) \equiv S_2\left(y' + \frac{C_1'}{S_2}\right)^2 + S_3\left(z' + \frac{C_1''}{S_3}\right)^2$$
$$+ 2C_1\left(x' - \frac{C_1'^2}{2C_1S_2} - \frac{C_1''^2}{2C_1S_3} + \frac{D}{2C_1}\right);$$

en faisant la transformation définie par les formules

$$y' + \frac{C_1'}{S_2} = Y, \qquad z' + \frac{C_1''}{S_3} = Z, \qquad x' - \frac{C_1'^2}{2C_1S_2} - \frac{C_1''^2}{2C_1S_3} + \frac{D}{2C_1} = X,$$

on obtient

$$f(x,y,z) \equiv S_2Y^2 + S_3Z^2 + 2C_1X.$$

**285.** *Réduction de l'équation d'un cylindre à centres.* — 1° En conservant la direction des axes, prenons pour nouvelle origine un point quelconque $(x_0, y_0, z_0)$, de la ligne des centres en posant

$$x = x_0 + x', \qquad y = y_0 + y', \qquad z = z_0 + z';$$

on obtient

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x', y', z') + D_1,$$

où

$$D_1 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D.$$

2° On prend pour nouveaux axes des parallèles aux cordes principales ; une racine de l'équation en S est nulle, supposons que ce soit $S_1$. On aura, en suivant la marche indiquée au n° **280**,

$$f(x,y,z) \equiv S_2Y^2 + S_3Z^2 + D_1.$$

**286.** *Réduction de l'équation d'un cylindre parabolique.* — La fonction $\varphi(x,y,z)$ étant un carré parfait, l'équation en S a une racine double égale à zéro : posons $S_1 = S_2 = 0$. A la racine $S_3$ correspond une direction unique de cordes principales ; je prends cette direction pour nouvel axe des $z$. Pour déterminer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, je pose

$$\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0,$$
$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0$$

(de façon qu'en faisant la même transformation que pour un paraboloïde on ait $C_1 = 0$). Nous avons déterminé $Oz'$ et $Ox'$; pour $Oy'$

on prend une perpendiculaire aux deux premiers axes. On obtient ainsi

$$f(x,y,z) \equiv S_3 z'^2 + 2C'_1 y' + 2C''_1 z' + D.$$

Or

$$S_3 z'^2 + 2C'_1 y' + 2C''_1 z' + D \equiv S_3\left(z' + \frac{C''_1}{S_3}\right)^2 + 2C'_1\left(y' + \frac{D}{2C'_1} - \frac{C''^2_1}{2C'_1 S_3}\right);$$

ce qui nous conduit à faire une translation des axes en posant

$$z' + \frac{C''_1}{S_3} = Z, \qquad y' + \frac{D}{2C'_1} - \frac{C''^2_1}{2C'_1 S_3} = Y,$$

et enfin

$$f(x,y,z) \equiv S_3 Z^2 + 2C'_1 Y.$$

**287.** *Réduction de l'équation d'un système de deux plans parallèles.* — L'équation en S a encore une racine double nulle; soient $S_1 = S_2 = 0$ et $S_3 \neq 0$.

On transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, en prenant pour nouvelle origine un point quelconque du plan des centres, ce qui donne

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x' y' z') + D_1,$$
$$D_1 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D.$$

Enfin, en prenant pour nouvelles directions des axes trois cordes principales, on a immédiatement

$$f(x,y,z) \equiv S_3 Z^2 + D_1.$$

## DEUXIÈME MÉTHODE : USAGE DES INVARIANTS.

**288.** *Formes réduites.* — L'équation en S ayant toujours au moins une racine différente de zéro, une quadrique quelconque a, comme nous l'avons déjà dit, au moins un plan principal à distance finie. Faisons un changement de coordonnées et prenons ce plan pour plan des $x, y$. L'équation de la surface sera alors, évidemment, de la forme

$$A''_1 z'^2 + g(x', y') = 0,$$

$x', y', z'$ désignant les nouvelles coordonnées, et $g(x', y')$ un polynome du second degré au plus.

1° L'équation $g(x', y') = 0$ est du second degré; supposons qu'elle représente une conique à centre; on peut rapporter cette conique à ses axes de symétrie, ce qui se fait par une transformation de coordonnées dans laquelle

la coordonnée $z'$ ne change pas et, par suite la nouvelle équation sera, en posant, pour plus de symétrie, $z' = Z$,

$$A''_1 Z^2 + A_1 X^2 + A'_1 Y^2 + D_1 = 0.$$

Si la conique qu'on vient de considérer était un cercle, la surface serait de révolution, la réduction se ferait en prenant deux diamètres rectangulaires de ce cercle.

2° $g(x'y') = 0$ représente une parabole. En rapportant cette parabole à son axe et à la tangente à son sommet, l'équation de la quadrique prendra la forme réduite

$$A''_1 Z^2 + A'_1 Y^2 + 2 C_1 X = 0.$$

3° $g(x', y') = 0$ représente deux droites parallèles. En prenant pour nouvel axe des Y la droite équidistante et pour nouvel axe des X une perpendiculaire, on obtiendra l'équation de la quadrique sous la forme

$$A''_1 Z^2 + A_1 X^2 + D_1 = 0.$$

4° $g(x', y')$ est du premier degré. Si l'on prend pour axe des Y la droite représentée par l'équation $g(x', y') = 0$, l'équation de la surface devient

$$A''_1 Z^2 + 2 C_1 X = 0;$$

5° $g(x', y')$ est une constante : la réduction est toute faite et l'équation cherchée est de la forme

$$A''_1 Z^2 + D_1 = 0.$$

## Calcul des coefficients des formes réduites.

**289.** 1° *Quadriques à centre unique.* — La nouvelle origine est le centre de la quadrique; on a donc d'abord

$$f(x, y, z) = \varphi(x', y', z') + \frac{H}{\Delta};$$

d'où

$$D_1 = \frac{H}{\Delta},$$

et en second lieu

$$\varphi(x', y', z') \equiv A_1 X^2 + A'_1 Y^2 + A''_1 Z^2.$$

Donc

$$\varphi(x', y', z') - S(x'^2 + y'^2 + z'^2) \equiv (A_1 - S) X^2 + (A'_1 - S) Y^2 + (A''_1 - S) Z^2.$$

Si $S = A_1$, le second membre se réduit à une somme de deux carrés; donc $A_1$ est une racine de l'équation en S relative auxnouve aux axes : c'est donc une racine de l'équation en S relative aux premiers axes et, par suite, on peut poser $A_1 = S_1$; de même $A'_1 = S_2$, $A''_1 = S_3$; $S_1$, $S_2$, $S_3$ étant les racines de l'équation en S. On voit en outre que

$$\varphi(x', y', z') - S_1(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

représente deux plans qui se coupent suivant le nouvel axe des X, car cette équation peut s'écrire

$$(S_2 - S_1)Y^2 + (S_3 - S_1)Z^2 = 0.$$

Cet axe n'est pas autre chose que la *ligne des centres* de la quadrique dégénérée représentée par l'équation précédente; donc les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - 2S_1 x' = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} - 2S_1 y' = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z'} - 2S_1 z' = 0,$$

se réduisent à deux et représentent le nouvel axe des X.

On détermine de la même manière les deux autres axes.

L'équation réduite est

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + \frac{H}{\Delta} = 0.$$

2° *Paraboloïdes.* — On a

$$f(x, y, z) \equiv A'_1 Y^2 + A''_1 Z^2 + 2C_1 X.$$

En menant par l'origine des parallèles aux nouveaux axes, on aura

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv -Sx'^2 + (A'_1 - S)y'^2 + (A''_1 - S)Z'^2.$$

En appelant $S_1$ la racine nulle, on en conclut comme dans le premier cas, $A'_1 = S_2$, $A''_1 = S_3$. Les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2Sx = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2Sy = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2Sz = 0$$

se réduisent à deux et donnent la direction des nouveaux axes.

Nous savons calculer les coordonnées du sommet : on aura donc ainsi la nouvelle origine et, par suite, la position des nouveaux axes. Reste à calculer $C_1$. Or le discriminant H est un invariant; donc, si les axes primitifs sont rectangulaires, on a

$$-C_1^2 S_2 S_3 = H.$$

D'ailleurs $S_2$ et $S_3$ sont les racines de l'équation

$$S^2 - (A + A' + A'')S + a + a' + a'' = 0.$$

Nous poserons

$$A + A' + A'' = M, \qquad a + a' + a'' = P,$$

donc

$$C_1^2 = -\frac{H}{P}.$$

On obtient pour $C_1$ deux valeurs égales et de signes contraires, car la direction positive de l'axe des X n'est pas fixée.

On peut remarquer que le paraboloïde est elliptique si $a + a' + a'' > 0$, hyperbolique si $a + a' + a'' < 0$.

3° *Cylindre elliptique ou hyperbolique.* — En suivant la même marche

que dans les cas précédents on obtient, en supposant $S_1 = 0$, la nouvelle origine étant un point quelconque de la ligne des centres,

$$f(x, y, z) = S_2 Y^2 + S_3 Z^2 + D_1.$$

Nous savons déjà calculer $D_1$. On peut procéder autrement; en remarquant que $f(x, y, z, t) - D_1 t^2$ est une somme de deux carrés, on voit que les mineurs du premier ordre du déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D - D_1 \end{vmatrix}$$

sont nuls. On a d'après cela

$$\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D - D_1 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$D_1 a = \frac{\partial H}{\partial A}.$$

De même

$$D_1 a' = \frac{\partial H}{\partial A'},$$

$$D_1 a'' = \frac{\partial H}{\partial A''}.$$

En ajoutant ces équations membre à membre on obtient

$$D_1 = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial A} + \dfrac{\partial H}{\partial A'} + \dfrac{\partial H}{\partial A''}}{P}.$$

D'ailleurs $P \neq 0$, sans quoi l'équation en S aurait deux racines nulles, ce qui n'a pas lieu dans le cas d'un cylindre à centres.

En outre si l'on nomme $b$ et $c$ les demi-axes de la section droite du cylindre, on a

$$b^2 S_2 + D_1 = 0, \qquad c^2 S_3 + D_1 = 0;$$

d'où

$$b^2 c^2 P = D_1^2,$$

et, par suite, on peut poser

$$D_1 = bc\sqrt{P},$$

ce qui nous donne l'égalité suivante

$$\frac{\partial H}{\partial A} + \frac{\partial H}{\partial A'} + \frac{\partial H}{\partial A''} = bc . P^{\frac{3}{2}}.$$

L'expression $L = \dfrac{\partial H}{\partial A} + \dfrac{\partial H}{\partial A'} + \dfrac{\partial H}{\partial A''}$ qui reste constante quand on fait une

transformation de coordonnées en conservant des axes rectangulaires, se nomme l'*invariant des cylindres*. (Voir G. Darboux, *Notes à la fin de la Géométrie analytique de Bourdon*.)

Nous admettrons que L est encore constant quand $P = 0$, c'est-à-dire dans le cas du cylindre parabolique;

4° *Cylindre parabolique.* — L'équation réduite sera

$$S_3 Z^2 + 2 C_1 X = 0.$$

On a $S_3 = M$ et l'on peut calculer $C_1$ en se servant de l'invariant L; on trouve

$$L = -MC_1^2;$$

d'où

$$C_1 = \varepsilon\sqrt{-\frac{L}{M}}.$$

L'équation réduite est donc

$$MZ^2 + 2\varepsilon\sqrt{-\frac{L}{M}}\,X = 0.$$

*Autre calcul.* — On peut mettre l'équation du cylindre sous cette forme :

$$(ax + by + cz)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

ou

$$P^2 + 2Q = 0.$$

Si le plan P est perpendiculaire au plan Q, $P = 0$ représente le plan principal et $Q = 0$ le plan tangent perpendiculaire au plan principal. On est ainsi conduit, comme dans le cas de la parabole (I, 284), à introduire une indéterminée $\lambda$ et à écrire l'équation

$$\begin{aligned}&(ax + by + cz + \lambda)^2\\ &\quad + 2(C - a\lambda)x + 2(C' - b\lambda)y + 2(C'' - c\lambda)z + D - \lambda^2 = 0,\end{aligned}$$

puis à poser

$$a(C - a\lambda) + b(C' - b\lambda) + c(C'' - c\lambda) = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{aC + bC' + cC''}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

L'équation du plan principal est donc

$$ax + by + cz + \frac{aC + bC' + cC''}{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

Pour mettre l'équation du cylindre sous la forme $Y^2 - 2pX = 0$, posons

$$\begin{aligned}&ax + by + cz + \lambda \equiv Y\sqrt{a^2 + b^2 + c^2},\\ &2(C - a\lambda)x + 2(C' - b\lambda)y + 2(C'' - c\lambda)z\\ &\quad \equiv 2X\sqrt{(C - a\lambda)^2 + (C' - b\lambda)^2 + (C'' - c\lambda)^2};\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{\sqrt{(C - a\lambda)^2 + (C' - b\lambda)^2 + (C'' - c\lambda)^2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Or, l'identité de Lagrange donne

$$(a^2 + b^2 + c^2)[(C - a\lambda)^2 + (C' - b\lambda)^2 + (C'' - c\lambda)^2]$$
$$= (aC' - bC)^2 + (bC'' - cC')^2 + (cC - aC')^2,$$

donc

$$p^2 = \frac{(aC' - bC)^2 + (bC'' - cC')^2 + (cC - aC')^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3}.$$

5° *Système de deux plans parallèles.* — L'équation en S a encore deux racines nulles; en transportant l'origine en un point du plan des centres et prenant l'axe des Z perpendiculaire à ce plan, l'équation prend la forme

$$S_3 Z^2 + D_1 = 0.$$

On a $S_3 = M$. Pour calculer $D_1$, il suffit de remarquer que

$$f(x, y, z, t) \equiv S_3 Z^2 + D_1 t^2,$$

donc

$$f(x, y, z, t) - D_1 t^2$$

est un carré; d'où il résulte que les mineurs du second degré du discriminant de cette forme sont tous nuls; donc

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & D - D_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$AD - C^2 = AD_1,$$

de même

$$A'D - C'^2 = A'D_1,$$
$$A''D - C''^2 = A''D_1,$$

et, par conséquent,

$$D_1 = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial A' \partial A''} + \frac{\partial^2 H}{\partial A'' \partial A} + \frac{\partial^2 H}{\partial A \partial A'}}{M} = \frac{N}{M},$$

en désignant par N le numérateur.

Si l'on nomme $2d$ la distance des deux plans, on a

$$S_3 d^2 + D_1 = 0$$

ou

$$D_1 = -Md^2.$$

Donc

$$N = -M^2 d^2,$$

N se nomme l'invariant d'un système de deux plans parallèles.

L'équation réduite est alors

$$MZ^2 + \frac{N}{M} = 0.$$

La condition de réalité est par suite $N < 0$.

## SOMMETS. — LONGUEURS DES AXES D'UNE QUADRIQUE DE LA PREMIÈRE CLASSE.

**290.** 1° *Ellipsoïde.* — L'équation réduite d'une quadrique de la première classe est

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+\frac{H}{\Delta}=0.$$

Cette quadrique sera un ellipsoïde si les coefficients $S_1$, $S_2$, $S_3$ ont le même signe. L'équation en S ayant ses trois racines réelles, le signe de ces racines sera déterminé en appliquant le théorème de Descartes.

Supposons donc que $S_1$, $S_2$, $S_3$ aient le même signe; l'ellipsoïde sera réel si $\frac{H}{\Delta}$ et $S_1$ ont des signes contraires. Chacun des axes coupe la surface en deux points réels, symétriques par rapport au centre et qu'on nomme *sommets*. L'ellipsoïde a donc six sommets. La distance de deux sommets situés sur un axe se nomme la *longueur de cet axe*. Si l'on nomme $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs des trois axes, on a

$$S_1a^2+\frac{H}{\Delta}=0,\qquad S_2b^2+\frac{H}{\Delta}=0,\qquad S_3c^2+\frac{H}{\Delta}=0;$$

d'où

$$a^2=-\frac{H}{\Delta S_1},\qquad b^2=-\frac{H}{\Delta S_2},\qquad c^2=-\frac{H}{\Delta S_3};$$

l'équation de la surface peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1=0.$$

Si $S_1$, $S_2$, $S_3$ et $\frac{H}{\Delta}$ ont le même signe, nous poserons

$$a^2=\frac{H}{\Delta S_1},\qquad b^2=\frac{H}{\Delta S_2},\qquad c^2=\frac{H}{\Delta S_3},$$

et l'équation deviendra

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}+1=0.$$

Dans ce cas, l'ellipsoïde est imaginaire.

2° *Hyperboloïde.* — Supposons en second lieu que deux racines de l'équation en S, par exemple $S_1$ et $S_2$, aient le même signe et que $S_3$ ait le signe contraire. Alors, deux cas peuvent se présenter.

($a$). $S_3$ et $\frac{H}{\Delta}$ ont le même signe. L'axe des X et l'axe des Y coupent la surface en des points réels et l'axe des Z la coupe en des points imaginaires conjugués; la surface a donc quatre sommets réels et deux sommets imaginaires conjugués. Nous poserons

$$a^2 = -\frac{H}{\Delta S_1}, \qquad b^2 = -\frac{H}{\Delta S_2}, \qquad c^2 = \frac{H}{\Delta S_3},$$

de sorte que $2a$ et $2b$ seront les longueurs des axes réels et nous appellerons $2c$ la longueur de l'axe imaginaire. L'équation de la surface est alors

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

cette surface est un *hyperboloïde à une nappe*.

($b$). $S_3$ et $\frac{H}{\Delta}$ ont des signes contraires; dans ce cas l'axe des Z seul coupe la surface en des points réels. Cette surface a donc deux sommets réels seulement et deux paires de sommets imaginaires conjugués. Si nous posons

$$a^2 = \frac{H}{\Delta S_1}, \qquad b^2 = \frac{H}{\Delta S_2}, \qquad c^2 = -\frac{H}{\Delta S_3},$$

l'équation prend la forme

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

et représente un *hyperboloïde à deux nappes*.

**291.** *Équation aux carrés des longueurs des demi-axes d'une quadrique à centre.* — Si l'on pose $S\rho + \frac{H}{\Delta} = 0$ et que l'on remplace successivement $\rho$ par $S_1$, $S_2$, $S_3$, on trouvera pour les valeurs correspondantes de $\rho$ :

1° Dans le cas de l'ellipsoïde réel : $\rho_1 = a^2$, $\rho_2 = b^2$, $\rho^3 = c^2$;

2° Dans le cas de l'ellipsoïde imaginaire : $\rho_1 = -a^2$, $\rho_2 = -b^2$, $\rho_3 = -c^2$;

3° Dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe : $\rho_1 = a^2$, $\rho_2 = b^2$, $\rho_3 = -c^2$;

4° Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes : $\rho_1 = -a^2$. $\rho_2 = -b^2$, $\rho_3 = c^2$.

On suppose conservées les notations précédentes.

On peut donc dire que les valeurs de $\rho$ sont les carrés des demi-longueurs d'axe (pourvu que l'on appelle, par exemple dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, *ci* la demi-longueur de l'axe imaginaire). D'après cela, si dans l'équation en S on fait la substitution $S = -\frac{H}{\Delta\rho}$, l'équation obtenue en $\rho$ sera l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes. Dans le cas le plus général, cette équation est

$$\begin{vmatrix} A + \frac{H}{\Delta\rho} & B'' + \frac{H}{\Delta\rho}\cos\nu & B' + \frac{H}{\Delta\rho}\cos\mu \\ B'' + \frac{H}{\Delta\rho}\cos\nu & A' + \frac{H}{\Delta\rho} & B + \frac{H}{\Delta\rho}\cos\lambda \\ B' + \frac{H}{\Delta\rho}\cos\mu & B + \frac{H}{\Delta\rho}\cos\lambda & A'' + \frac{H}{\Delta\rho} \end{vmatrix} = 0.$$

**292.** On peut obtenir cette équation par une méthode géométrique, celle de Galois. Supposons l'équation de la quadrique rapportée à ses axes de symétrie

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} - 1 = 0,$$

et considérons la sphère concentrique ayant pour équation

$$\frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R^2} + \frac{Z^2}{R^2} - 1 = 0.$$

Le cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe d'intersection de ces deux surfaces a pour équation

$$X^2\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{R^2}\right) + Y^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{R^2}\right) + Z^2\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{R^2}\right) = 0.$$

Ce cône se réduit à deux plans quand on remplace $R^2$ par A, B ou C et il est évident que pour ces valeurs de $R^2$ la sphère est bitangente à la quadrique.

Rapportons la quadrique et la sphère à des axes quelconques passant par leur centre, mais pour plus de simplicité supposons ces axes rectangulaires; leurs équations seront

$$\varphi(x, y, z) + \frac{H}{\Delta} = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

le cône aura alors pour équation

$$\left(A + \frac{H}{\Delta R^2}\right)x^2 + \left(A' + \frac{H}{\Delta R^2}\right)y^2 + \left(A'' + \frac{H}{\Delta R^2}\right)z^2$$
$$+ 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Pour que ce cône se réduise à deux plans, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} A+\dfrac{H}{\Delta R^2} & B'' & B' \\ B'' & A'+\dfrac{H}{\Delta R^2} & B \\ B' & B & A''+\dfrac{H}{\Delta R^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines de cette équation en $R^2$ sont A, B, C. On retrouve bien l'équation déjà obtenue.

EXERCICES.

1. Deux quadriques homothétiques ont leurs axes parallèles et proportionnels. Examiner le cas de deux paraboloïdes homothétiques.

2. Exprimer que deux quadriques sont semblables et dans un rapport donné $k$ de similitude. En particulier exprimer que deux quadriques rapportées à un système quelconque de coordonnées rectilignes sont égales.

3. Montrer qu'un paraboloïde elliptique peut être considéré comme la limite d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde à deux nappes dont un sommet réel et le plan tangent en ce point restent fixes, les longueurs des axes grandissant indéfiniment, mais les paramètres des sections principales contenant le sommet fixe ayant des limites finies.

4. Un paraboloïde hyperbolique peut être considéré comme la limite d'un hyperboloïde à une nappe dont un sommet réel et le plan tangent en ce point restent fixes, les longueurs des axes grandissant indéfiniment, mais les paramètres des sections principales contenant le sommet fixe ayant des limites finies.

5. Un cylindre parabolique peut être considéré comme la limite d'un paraboloïde dont un des paramètres croît indéfiniment, ou encore comme la limite d'un ellipsoïde de révolution aplati, dont un sommet d'une ellipse méridienne ainsi que le plan tangent en ce point restent fixes, les axes de cette ellipse grandissant indéfiniment, mais son paramètre ayant une limite finie.

6. Trouver le volume d'un ellipsoïde rapporté à trois axes de coordonnées quelconques.

7. Appliquer la réduction aux exemples donnés en Exercice au Chapitre XIII.

8. Les équations

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1,$$
$$(a_1x+a_2y+a_3z)^2+(b_1x+b_2y+b_3z)^2+(c_1x+c_2y+c_3z)^2=1$$

représentent, si les axes sont rectangulaires, deux ellipsoïdes égaux, en supposant le déterminant des neuf coefficients différent de zéro. (JACOBI.)

# CHAPITRE XVIII.

## POLES ET PLANS POLAIRES.

---

293. *Définition.* — On dit que deux points A, B sont conjugués harmoniques par rapport à une quadrique quand ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection de cette quadrique et de la droite AB. L'équation de la quadrique étant $f(x, y, z, t) = 0$ en coordonnées homogènes ou tétraédriques, et les coordonnées de A étant $x_0, y_0, z_0, t_0$; celles de B : $x_1, y_1, z_1, t_1$; les points d'intersection de AB et de la quadrique s'obtiennent en remplaçant dans les expressions $x_0 + \lambda x_1, \ldots, \lambda$ successivement par les racines de l'équation $f(x_0 + \lambda x_1, y_0 + \lambda y_1, z_0 + \lambda z_1, t_0 + \lambda t_1) = 0$. On en conclut, comme dans le cas des coniques, que la condition pour que A et B soient conjugués est

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_0} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_0} + t_1 \frac{\partial f}{\partial t_0} = 0.$$

### PLAN POLAIRE D'UN POINT.

294. *Le lieu des conjugués d'un point* A *par rapport à une quadrique est en général un plan* P, *qu'on nomme le plan polaire de* A.

En effet, le lieu des conjugués de $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ a pour équation

$$x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial z_0} + t \frac{\partial f}{\partial t_0} = 0.$$

Le point A se nomme le *pôle du plan* P.

Rappelons que le plan de la courbe de contact d'un cône circonscrit à une quadrique est le plan polaire du sommet de ce cône par rapport à cette quadrique.

Il résulte de la forme de l'équation obtenue, que le plan polaire d'un centre est à l'infini et que le plan polaire d'un point double est indéterminé.

Le plan polaire du point à l'infini dans la direction $(\alpha, \beta, \gamma)$ est le

plan diamétral conjugué à cette direction ; c'est en effet le lieu des milieux des cordes parallèles à cette direction.

D'ailleurs, en écrivant l'équation du plan polaire de A sous la forme

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} + t_0 \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

on voit que si l'on fait $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, $z_0 = \lambda$, $t_0 = 0$ on obtient

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

**295.** Problème. — *Trouver le pôle d'un plan, par rapport à une quadrique.*

Soit, en coordonnées homogènes,

$$ux + vy + wz + rt = 0$$

l'équation d'un plan. Il s'agit d'identifier cette équation avec celle du plan polaire d'un point $(x_0, y_0, z_0, t_0)$

$$x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial t}{\partial z_0} + t \frac{\partial f}{\partial t_0} = 0.$$

On obtient ainsi, en introduisant une inconnue auxiliaire $\lambda$ :

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_0} = 2\lambda u, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 2\lambda v, \qquad \frac{\partial f}{\partial z_0} = 2\lambda w, \qquad \frac{\partial f}{\partial t_0} = 2\lambda r,$$

ou, en développant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A x_0 + B'' y_0 + B' z_0 + C t_0 - \lambda u = 0, \\ B'' x_0 + A' y_0 + B z_0 + C' t_0 - \lambda v = 0, \\ B' x_0 + B y_0 + A'' z_0 + C'' t_0 - \lambda w = 0, \\ C x_0 + C' y_0 + C'' z_0 + D t_0 - \lambda r = 0. \end{array} \right.$$

*Discussion :* 1° $H \neq 0$. — Quelle que soit la valeur attribuée à $\lambda$, ce système d'équations détermine $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ en fonction de $\lambda$. Donc, dans une quadrique proprement dite (ellipsoïde, hyperboloïde ou paraboloïde), tout plan a un pôle à distance finie ou infinie. Calculons les coordonnées de ce pôle. Si l'on nomme $a$, $a'$, ..., $b''$, $c$, $c'$, $c''$, $d$, $(d = \Delta)$ les coefficients des éléments de H, on trouve, en appliquant la règle de Cramer

$$H x_0 = \lambda(au + b''v + b'w + cr),$$

et des valeurs analogues pour $y_0$. En appelant $-F(u, v, w, r)$, comme nous l'avons déjà fait, le premier membre de l'équation tangentielle de la quadrique donnée, on obtient pour les coordonnées du pôle du plan $(u, v, w, r)$ les formules

$$x_0 = \frac{\lambda}{2H}\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad y_0 = \frac{\lambda}{2H}\frac{\partial F}{\partial v}, \qquad z_0 = \frac{\lambda}{2H}\frac{\partial F}{\partial w}, \qquad t_0 = \frac{\lambda}{2H}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

On reconnaît ainsi que si un plan passe par son pôle il est tangent à la quadrique et le point de contact est le pôle.

Le pôle est rejeté à l'infini si $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$, ou

$$cu + c'v + c''w + dr = 0,$$

c'est-à-dire quand le plan passe par le centre de la quadrique.

Pour mieux préciser ce résultat, considérons une quadrique à centre rapportée à son centre et ayant pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D = 0.$$

Il s'agit d'identifier les équations

$$Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 + D = 0,$$
$$ux + vy + wz + r = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{Ax_0}{u} = \frac{A'y_0}{v} = \frac{A''z_0}{w} = \frac{D}{r}.$$

Les coordonnées du pôle du plan $(u, v, w, r)$ sont donc $\frac{Du}{Ar}, \frac{Dv}{A'r}, \frac{Dw}{A''r}$; on voit bien que le pôle est à l'infini, dans la direction conjuguée au plan donné, quand ce plan passe par le centre. Pour exprimer que le plan est tangent, il suffit d'écrire qu'il contient son pôle, ce qui donne l'équation tangentielle de la quadrique

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{A'} + \frac{w^2}{A''} + \frac{r^2}{D} = 0.$$

S'il s'agit d'un paraboloïde

$$A'y^2 + A''z^2 + 2x = 0,$$

on identifie

$$A'yy_0 + A''zz_0 + x + x_0 = 0$$

avec l'équation du plan donné; on trouve ainsi

$$x_0 = \frac{r}{u}, \qquad y_0 = \frac{v}{A'u}, \qquad z_0 = \frac{w}{A''u}.$$

Le pôle est donc à l'infini si $u = 0$, c'est-à-dire si le plan donné est parallèle

à l'axe du paraboloïde. L'équation tangentielle est

$$\frac{u^2}{A'} + \frac{w^2}{A''} + 2ru = 0.$$

2° H = 0. — La quadrique a un ou plusieurs points doubles.

Supposons d'abord que la quadrique donnée n'ait qu'un point double et soient $x_1, y_1, z_1, t_1$ les coordonnées de ce point.

Des équations (1) on déduit

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_0} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_0} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_0} + t_1\frac{\partial f}{\partial t_0} = 2\lambda(ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1)$$

ou

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_0\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_0\frac{\partial f}{\partial z_1} + t_0\frac{\partial f}{\partial t_1} = 2\lambda(ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1).$$

Mais le premier membre est identiquement nul, puisque $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \ldots$; d'autre part on doit supposer $\lambda \neq 0$, donc

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1 = 0,$$

ce qui prouve que le plan donné doit passer par le point double. Dans ce cas les équations (2) se réduisent à trois comme on le voit en multipliant par $x_0$, $y_0, z_0, t_0$, et ajoutant membre à membre. Il y a donc alors une ligne de pôles dont on obtiendra les équations en éliminant $\lambda$.

*Exemple.* — Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0$$

l'équation d'un cône. Identifions l'équation du plan donné avec

$$Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 = 0;$$

on doit poser $r = 0$ et l'on a ensuite

$$\frac{Ax_0}{u} = \frac{A'y_0}{v} = \frac{A''z_0}{w};$$

en regardant $x_0, y_0, z_0$ comme des coordonnées courantes nous obtenons les équations de la ligne des pôles conjuguée au plan donné, ou polaire de ce plan.

*Cas du cône isotrope.* — La polaire du plan $(u, v, w, 0)$ par rapport au cône isotrope

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

a pour équations

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w},$$

c'est donc la perpendiculaire au plan donné.

On en déduit cette conséquence remarquable : la normale en un point d'une surface est la polaire du plan tangent en ce point par rapport au cône

isotrope dont le sommet est au point de contact. Cette remarque est utile dans les transformations homographiques.

*Cas du cylindre.* — Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + D = 0$$

l'équation d'un cylindre. Le plan polaire du point $(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$Axx_0 + A'yy_0 + D = 0,$$

il est parallèle à la ligne des centres; l'équation précédente ne dépend pas de $z_0$: elle représente le plan polaire d'une parallèle à l'axe; le plan $(u, v, w, r)$ ne peut avoir un pôle que si $w = 0$, c'est-à-dire si le plan est parallèle à la ligne des centres; s'il en est ainsi on trouve une ligne de pôles ou polaire du plan; ses équations sont

$$\frac{Ax}{u} = \frac{A'y}{v} = \frac{D}{r},$$

si $r = 0$, c'est-à-dire si le plan passe par la ligne des centres; sa polaire est rejetée à l'infini.

*Cylindre parabolique.* — Soit

$$y^2 - 2px = 0$$

l'équation réduite d'un cylindre parabolique. Le plan polaire du point $(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation $yy_0 - px - px_0 = 0$; il est donc parallèle aux génératrices. Réciproquement la polaire d'un plan parallèle aux génératrices et représenté par

$$ux + vy + r = 0$$

a pour équations

$$y = -\frac{pv}{u}, \qquad x = \frac{r}{u};$$

elle est donc parallèle aux génératrices et rejetée à l'infini si $u = 0$, c'est-à-dire si le plan donné est parallèle au plan principal.

En second lieu, si la surface a une ligne de points doubles, on voit, comme plus haut, que le plan polaire d'un point quelconque passe par la ligne des points doubles et réciproquement, à tout plan passant par cette ligne correspond un plan, conjugué harmonique du premier par rapport aux deux plans auxquels se réduit la quadrique. Les équations (2) se réduisent alors à deux et l'on obtient l'équation du plan conjugué au premier en éliminant $\lambda$.

Enfin, s'il y a un plan de points doubles, les quatre équations (1) se réduisent à une seule; le plan polaire d'un point donné coïncide avec le plan double et le pôle d'un plan coïncidant avec ce plan double est indéterminé.

## POSITIONS RELATIVES DU PÔLE ET DU PLAN POLAIRE.

**296.** Théorème. — *Quand un point se déplace sur un diamètre d'une quadrique à centre unique, son plan polaire par rapport*

*à cette quadrique conserve une direction fixe, conjuguée à ce diamètre.*

En effet, soient $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ les coordonnées du centre de la quadrique; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les paramètres du diamètre considéré. Un point quelconque de ce diamètre a pour coordonnées $x_0 + \lambda\alpha$, $y_0 + \lambda\beta$, $z_0 + \lambda\gamma$, $t_0$. Le plan polaire de ce point a pour équation

$$t\frac{\partial f}{\partial t_0} + \lambda\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0;$$

il est donc parallèle au plan diamétral conjugué à la direction $(\alpha, \beta, \gamma)$.

On peut préciser davantage. Prenons pour axe des $x$ un diamètre et pour axes des $y$ et des $z$ deux diamètres conjugués de la section de la quadrique par le plan diamétral conjugué à l'axe des $x$. L'équation de la quadrique sera de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + D = 0.$$

Si l'on suppose le diamètre $Ox$ réel, sa longueur $2a$ est donnée par l'équation $Aa^2 + D = 0$. Le plan polaire du point $(x_0, 0, 0)$ a donc pour équation $xx_0 - a^2 = 0$. On verrait de même que si ce diamètre est imaginaire, le plan polaire aura pour équations $xx_0 + a^2 = 0$. Ces équations se discutent comme celles relatives aux coniques.

*Cas d'un paraboloïde.* — Une sécante menée par un point M parallèlement à l'axe d'un paraboloïde coupe cette surface en un seul point A à distance finie, le second point d'intersection B étant à l'infini; il en résulte que le point A est le milieu du segment MM', M' étant la conjuguée de M. Réciproquement, si l'une des extrémités d'un diamètre mené par M est le milieu de MM', l'autre extrémité est à l'infini et la quadrique est un paraboloïde, en supposant qu'il s'agisse d'une quadrique ayant un centre unique à distance finie ou à l'infini.

Il convient de reprendre cette question par le calcul. Considérons une quadrique quelconque et prenons pour axe des $x$ un diamètre, l'origine étant l'une des extrémités, à distance finie, de ce diamètre. Le plan tangent à l'origine a une direction conjuguée au diamètre qui y passe; on peut supposer la section par le plan tangent rapportée à deux directions conjuguées; l'équation de la quadrique sera de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx = 0.$$

Le plan polaire du point $(x_0, 0, 0)$ a pour équation

$$Axx_0 + C(x + x_0) = 0.$$

Cette équation se réduit à

$$x + x_0 = 0,$$

si $A = 0$ et réciproquement. La propriété considérée est donc une propriété caractéristique des paraboloïdes et du cylindre parabolique.

### PROPRIÉTÉS DES PÔLES ET DES PLANS POLAIRES.

**297.** Théorèmes. — 1° *Si le plan polaire d'un point m passe par un point p, réciproquement le plan polaire de p passe par m, car m et p sont conjugués.*

Corollaire. — *Le pôle du plan passant par trois points a, b, c est le point commun aux plans polaires de ces trois points.*

2° *Si un point m se déplace dans un plan* P, *son plan polaire* M *pivote autour de p, pôle de* P *et réciproquement, si un plan* M *pivote autour d'un point p, son pôle m se meut dans le plan* P, *polaire de p.*

Mêmes démonstrations que pour les coniques (t. I, p. 415).

## Droites conjuguées.

**298.** 1° *Si un plan tourne autour d'une droite* D, *son pôle décrit une droite* $D_1$; 2° *si un point se meut sur* $D_1$, *son plan polaire tourne autour de* D; 3° *si un point se meut sur* D, *son plan polaire tourne autour de* $D_1$; 4° *si un plan tourne autour de* $D_1$, *son pôle décrit la droite* D.

En effet : 1° Soient $a$, $b$ deux points de D et A, B leurs plans polaires par rapport à une quadrique donnée. Si un plan passe par $a$, son pôle est dans le plan A ; s'il passe en outre par $b$, son pôle est dans le plan B ; il est donc sur la droite $D_1$, intersection des plans A, B.

2° Un point $m$ de $D_1$ est dans le plan A, donc son plan polaire passe par $a$ ; $m$ étant aussi dans le plan B, son plan polaire passe par $b$. Donc M, plan polaire de $m$, contenant $a$ et $b$ contient la droite D.

Si l'on considère deux points $a_1$, $b_1$ de $D_1$, leurs plans polaires $A_1$, $B_1$ se coupent suivant D ; cette remarque suffit pour établir les deux dernières parties.

On peut donner aux démonstrations précédentes une autre forme. Soient $x_0, y_0, z_0, t_0$ et $x, y, z, t$, les coordonnées de deux points $a$, $b$ de D. Le plan polaire d'un point quelconque $m$ de D, $m$ ayant pour coordonnées $x_0 + \lambda x_1$, $y_0 + \lambda y_1$, ..., a pour équation

$$P_0 + \lambda P_1 = 0,$$

$P_0 = 0$ et $P_1 = 0$ étant les plans polaires de $a$ et $b$; ce qui démontre la troisième partie et prouve, en outre, que, si $m$ décrit D dans un certain sens, son plan polaire M tourne autour de $D_1$ dans un sens déterminé, qui sera renversé si $m$ décrit D en sens contraire. La quatrième partie se trouve ainsi établie.

En second lieu. les plans polaires de quatre points $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ de D ayant pour équations $P_0 + \lambda_1 P_1 = 0$, $P_0 + \lambda_2 P_1 = 0$, ..., on obtient ce théorème important :

*Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal au rapport anharmonique de leurs plans polaires par rapport à une quadrique quelconque.*

Soient $u_0, v_0, w_0, r_0$ et $u_1, v_1, w_1, r_1$ les coordonnées de deux plans $M_0$, $M_1$ passant par D; un plan quelconque M, mené par cette droite, a pour coordonnées $u_0 + \lambda u_1$, $v_0 + \lambda v_1$, $w_0 + \lambda w_1$, $r_0 + \lambda r_1$. Si $F(u, v, w, r) = 0$ est l'équation tangentielle de la quadrique donnée, le pôle du plan défini donné par l'équation

$$(u_0 + \lambda u_1)x + (v_0 + \lambda v_1)y + (w_0 + \lambda w_1)z + (r_0 + \lambda r_1)t = 0$$

a pour coordonnées ponctuelles

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} + \lambda \frac{\partial F}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0} + \lambda \frac{\partial F}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial w_0} + \lambda \frac{\partial F}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial r} + \lambda \frac{\partial F}{\partial r_1},$$

c'est donc un point $m$ de la droite passant par les pôles $m_0$, $m_1$ des deux premiers plans $M_0$, $M_1$; si M tourne toujours dans le même sens autour de D, $m$ décrit $D_1$ tout entière dans un sens déterminé; les deux autres parties sont ainsi démontrées.

**299.** Théorème. — *Le lieu des pôles d'une droite* D *par rapport aux sections obtenues en coupant une quadrique* Q *par des plans menés par* D *est la droite* $D_1$ *conjuguée de* D *par rapport à* Q.

En effet, les plans polaires de tous les points de D passent par le pôle $p$ de cette droite par rapport à l'une quelconque des sections considérées, puisque ce pôle et un point quelconque de D étant conjugués par rapport à la section sont aussi conjugués par rapport à la quadrique. On voit ainsi que, si $s$ est le sommet du cône circonscrit le long de cette section, la droite $D_1$ est la droite $ps$.

**300.** *Positions des droites* D *et* $D_1$. — Menons par D un plan diamétral de la quadrique Q et prenons pour axe des $x$ le diamètre de la section qui est conjugué à la direction de D, l'axe des $y$ étant la tangente à l'une des extrémités de ce diamètre; enfin, l'axe des $z$ ayant une direction conjuguée au plan diamétral considéré. L'équation de la quadrique est alors

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx = 0;$$

et les équations de D étant

$$z = 0, \qquad x = x_0.$$

La droite conjuguée $D_1$, intersection des plans polaires de deux points de D, a pour équations

$$A x x_0 + C(x + x_0) = 0, \qquad y = 0.$$

On voit ainsi que D et $D_1$ rencontrent un diamètre, qu'elles partagent harmoniquement, et de plus elles ont des directions conjuguées par rapport aux sections faites par des plans parallèles au plan tangent mené à l'une des extrémités du diamètre considéré. C'est ce que l'on voit très simplement par la Géométrie.

En particulier, si D est tangent à la quadrique, $D_1$ passe par le point de contact de D et est aussi tangent à la quadrique.

Dans le cas d'un ellipsoïde, pour obtenir deux droites conjuguées il suffit de couper cet ellipsoïde par un plan diamétral, de tracer le diamètre conjugué et de mener par deux points divisant ce diamètre harmoniquement deux droites D, $D_1$ parallèles à deux diamètres conjugués de la section diamétrale.

Dans le cas d'une sphère, on partagera un diamètre harmoniquement, et, par les points obtenus, on mènera deux droites perpendiculaires entre elles et perpendiculaires à ce diamètre.

*Autre construction.* — La droite $D_1$, conjuguée de D, peut encore être obtenue autrement : $D_1$ *passe par les points de contact des plans tangents menés par* D *à la quadrique.*

En effet, le plan polaire de chacun des points d'intersection de $D_1$ avec la quadrique Q est tangent à cette quadrique et passe par D, et réciproquement le point de contact de tout plan tangent mené à Q mené par D est sur $D_1$.

On retrouve ainsi cette proposition : on peut mener par une droite D deux plans tangents à une quadrique. Ces deux plans peuvent être réels ou imaginaires; ils sont confondus en un seul si D est tangent à la quadrique, car $D_1$ est alors aussi tangente.

**301.** *Plans conjugués.* — On dit que *deux plans* P, P' *sont conjugués par rapport à une quadrique quand le pôle de l'un est sur l'autre.* Soit $F(u, v, w, r) = 0$ l'équation tangentielle de la quadrique (supposée non développable) et soient $u, v, w, r$ et $u', v', w', r'$ les coordonnées tangentielles des deux plans; le pôle du premier a pour coordonnées ponctuelles $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial w}$, $\frac{\partial F}{\partial r}$; ce point est dans le second plan si

$$u' \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial v} + w' \frac{\partial F}{\partial w} + r' \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

S'il en est ainsi, réciproquement, le pôle du second plan est dans le premier.

La condition précédente peut s'écrire

$$\left|\begin{array}{cccc|c} & & & & u' \\ & \text{H} & & & v' \\ & & & & w' \\ & & & & r' \\ \hline u & v & w & r & 0 \end{array}\right| = 0.$$

**302.** *Les plans tangents menés à une quadrique par l'intersection de deux plans conjugués sont conjugués harmoniques par rapport à ces deux plans et réciproquement.*

En effet, l'équation

$$F(u + \lambda u', v + \lambda v', w + \lambda w', r + \lambda r') = 0$$

détermine les plans tangents menés par l'intersection des deux plans P, P'; la condition nécessaire et suffisante pour que les plans correspondant aux deux racines $\lambda'$, $\lambda''$ de cette équation forment avec P et P' un faisceau harmonique est $\lambda' + \lambda'' = 0$; ce qui donne

$$u' \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial v} + w' \frac{\partial F}{\partial w} + r' \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

EXERCICES.

1. Étant données deux droites D, $D_1$ conjuguées par rapport à une sphère, les sections de cette sphère par un plan quelconque passant par D, et par un plan quelconque passant par $D_1$, sont des cercles orthogonaux; en faisant varier les plans, on obtient ainsi deux familles de cercles orthogonaux tracés sur la sphère.

Montrer que, réciproquement, si deux familles de cercles orthogonaux sont tracées sur une même sphère, ces cercles peuvent être obtenus par le mode de génération précédent.

2. Transformer par inversion la propriété précédente, le pôle d'inversion étant un point de la sphère.

3. On considère le cône ayant pour sommet un point A et pour directrice une section plane d'une quadrique; montrer que ce cône coupe la quadrique suivant une seconde courbe plane; connaissant l'équation du plan P de la première conique, trouver celle du plan Q de la seconde; prouver que le plan polaire de A et le plan passant par A et par l'intersection des plans P et Q forment un faisceau harmonique.

4. Dans l'exemple précédent, si le plan P enveloppe une quadrique donnée, trouver l'enveloppe du plan Q.

5. On dit qu'un tétraèdre est conjugué à une quadrique donnée ou que la quadrique est conjuguée au tétraèdre, si chaque sommet est le pôle du plan de la face opposée. Former l'équation générale des quadriques conjuguées à un tétraèdre pris pour tétraèdre de référence.

6. Former l'équation tangentielle d'une quadrique rapportée à un tétraèdre conjugué.

7. Exprimer qu'une quadrique rapportée à un tétraèdre conjugué est tangente à un plan donné. En conclure que les quadriques conjuguées à un tétraèdre donné et ayant un plan tangent commun ont sept autres plans tangents communs. Étudier les cas où certains de ces huit plans sont coïncidents.

8. Lieu des pôles d'un plan donné par rapport aux quadriques conjuguées à un tétraèdre donné et tangentes à un plan donné. Lieu des centres de ces quadriques.

9. Lieu des pôles d'un plan donné par rapport aux paraboloïdes conjugués à un tétraèdre donné.

10. Appelons : 1° *indice d'un point*, par rapport à une surface du second degré, le rapport des distances de ce point et du centre de la surface au plan polaire de ce point; 2° *indice d'un plan* le produit des distances du pôle du plan et du centre de la surface à ce plan; 3° *indice d'une droite* le rapport que l'on obtient en divisant le carré de la demi-corde déterminée par cette droite, dans la surface, par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite.

On demande de trouver d'autres expressions pour la valeur de ces indices. (FAURE.)

11. Lorsqu'une quadrique est conjuguée à un tétraèdre : 1° la somme des carrés des demi-axes est égale à la somme des inverses des indices des arêtes du tétraèdre; 2° la somme des carrés des inverses des demi-axes, prise en signe contraire, est égale à la somme des inverses des indices des faces du tétraèdre; 3° le produit des carrés des demi-axes, pris en signe contraire, est égal au produit des inverses des indices des sommets du tétraèdre, multiplié par trente-six fois le carré du volume du tétraèdre. (FAURE.)

12. On donne une quadrique et un plan. Si l'on prend dans ce plan trois points conjugués à la surface, la somme des inverses des indices de ces points est égale à l'inverse de l'indice du point où le plan est rencontré par le diamètre qui lui est conjugué. (FAURE.)

13. Une quadrique étant conjuguée à un tétraèdre, la somme des inverses des indices des centres des sections déterminées dans la surface par les faces du tétraèdre est égal à $-3$. (FAURE.)

14. On donne une quadrique et un tétraèdre $abcd$; si l'on désigne par A, B, C, D les faces de ce tétraèdre opposées aux sommets $a$, $b$, $c$, $d$ et par A' B', C', D' les plans polaires de ces sommets, la somme $\sum \frac{\cos(A, A')}{(a, A)(o, A')}$ dans

laquelle o est le centre de la quadrique est constante. On désigne par $(a, A)$ la distance de $a$ à A, .... (FAURE.)

15. On donne un tétraèdre conjugué à une quadrique. Si l'on désigne par I l'indice, par rapport à la quadrique, du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre, et par R le rayon de cette sphère, l'expression $\frac{I}{R^2}$ a la même valeur pour toutes les sphères inscrites au tétraèdre.

16. On donne une quadrique et deux droites L, M. Sur L on prend deux points arbitraires $a$, $b$ et l'on trace les plans polaires de ces points, qui coupent M en $c$ et $d$ et le diamètre parallèle à M en $e$ et $f$. L'expression $Oe.Of.\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, dans laquelle O désigne le centre de la quadrique, est constante. (FAURE.)

# CHAPITRE XIX.

## POLAIRES RÉCIPROQUES.

303. *Surfaces polaires réciproques.* — L'enveloppe des plans polaires des points d'une surface non développable S par rapport à une quadrique D est une surface non développable S', car le plan polaire d'un point de S dépend de deux paramètres; je dis que réciproquement la surface S est l'enveloppe des plans polaires des points de S' par rapport à la même quadrique directrice.

En effet, soient $a$, $b$, $c$ trois points de S et A', B', C' leurs plans polaires : le point $m'$ commun à ces trois plans est le pôle du plan $abc$. Si $b$ et $c$ viennent se confondre avec $a$, le point $m'$ a pour limite le point de contact $a'$ du plan A' et de la surface S', et, d'autre part, le plan $abc$ devient le plan tangent en $a$ à la surface S; on voit ainsi que S peut être considérée comme étant l'enveloppe des plans polaires des points de S'; il y a donc réciprocité.

La démonstration précédente suppose que S ne soit pas une surface développable; voici une nouvelle démonstration, qui fera nettement ressortir cette hypothèse.

Supposons les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque $m$ de S exprimées au moyen de deux variables indépendantes $u$, $v$; et soient

$$x = f(u, v), \qquad y = f_1(u, v), \qquad z = f_2(u, v).$$

Si l'équation de la quadrique D est $F(x, y, z, t) = 0$, les coordonnées du

point de contact $m'$ du plan polaire de $m$ avec son enveloppe sont déterminées par les équations

$$(1)\qquad f(u,v)\frac{\partial F}{\partial x_1}+f_1(u,v)\frac{\partial F}{\partial y_1}+f_2(u,v)\frac{\partial F}{\partial z_1}+\frac{\partial F}{\partial t_1}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial y_1}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial z_1}=0,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial y_1}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial z_1}=0.$$

Le plan polaire de $m'$ par rapport à D a pour équation

$$(4)\qquad x\frac{\partial F}{\partial x_1}+y\frac{\partial F}{\partial y_1}+z\frac{\partial F}{\partial z_1}+\frac{\partial F}{\partial t_1}=0.$$

Si l'on élimine $x_1, y_1, z_1, t_1$ entre les équations (1), (2), (3), (4), on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} x-f(u,v) & y-f_1(u,v) & z-f_2(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}=0,$$

qui représente le plan tangent en $m$ à la surface S.

Les deux surfaces S, S' sont dites *polaires réciproques* par rapport à la quadrique D.

304. ***Étant donnée l'équation d'une surface non développable, trouver celle de sa polaire réciproque.***

Soient $\varphi(u, v, w, r)=0$ l'équation tangentielle d'une surface non développable, et $f(x, y, z, t)=0$ l'équation ponctuelle de la quadrique D; enfin, soient $x, y, z, t$ les coordonnées d'un point quelconque $m$ de la polaire réciproque S'.

On obtiendra l'équation ponctuelle de S', en exprimant que le plan polaire de $m$ par rapport à D est tangent à S, ce qui donne immédiatement

$$\varphi(f'_x, f'_y, f'_z, f'_t)=0.$$

On voit ainsi que la polaire réciproque d'une quadrique est aussi une quadrique.

305. ***Polaire d'une surface développable.*** — Nous définirons la surface polaire d'une surface développable comme étant le *lieu des pôles des plans tangents à cette surface*. D'après cela, soient

$$\varphi(u, v, w, r)=0,\qquad \varphi_1(u, v, w, r)=0$$

*les équations tangentielles* d'une surface développable. En écrivant que le plan polaire d'un point $x, y, z, t$ par rapport à la quadrique D est tangent à

cette surface, on obtient les deux équations

$$\varphi(f'_x, f'_y, f'_z, f'_t) = 0, \qquad \varphi_1(f'_x, f'_y, f'_z, f'_t) = 0.$$

La surface polaire d'une surface développable est donc une courbe.

Dans le cas d'un cône, si l'on prend son sommet pour origine, les équations tangentielles de ce cône étant

$$r = 0, \qquad \varphi(u, v, w) = 0,$$

la polaire aura pour équations

$$f'_t = 0, \qquad \varphi(f'_x, f'_y, f'_z) = 0;$$

ce sera donc une courbe plane, ce qui est d'ailleurs évident, parce que les plans tangents au cône passant par un point fixe, leurs pôles sont dans un plan fixe. La proposition s'étend à un cylindre.

En particulier, la surface polaire d'un cône du second degré est une conique.

306. *Polaire d'une courbe.* — Nous appellerons *surface polaire d'une courbe l'enveloppe des plans polaires des points de cette courbe.* Les points d'une courbe C dépendent d'un seul paramètre, il en est de même des plans polaires des points de cette courbe et, par conséquent, l'enveloppe de ces plans est une surface développable S′.

Cette proposition peut être considérée comme étant la réciproque de la précédente.

Il convient de préciser davantage.

Soient $m$, $p$ deux points de C; l'intersection des plans polaires M′, P′ de ces deux points est la droite conjuguée de $mp$. Si $p$ s'approche indéfiniment de $m$ en restant sur C, la sécante $mp$ a pour limite la tangente en $m$ à C, et l'intersection de M′ et P′ a pour limite la tangente en un point $m$ de l'arête de rebroussement C′ de la développable S′; le plan M′ est le plan osculateur de C′ en $m'$. Je dis que, réciproquement, le plan polaire de $m'$ est le plan osculateur M de C en $m$. En effet, si l'on cherche la polaire de C′, on trouvera une surface développable S telle que les tangentes à son arête de rebroussement soient les conjuguées des tangentes à C′; l'arête de rebroussement de S est donc bien la courbe C elle-même.

On peut d'ailleurs obtenir ces résultats très simplement par le calcul. Soient, en effet,

$$x = f(u), \qquad y = f_1(u), \qquad z = f_2(u)$$

les équations définissant, au moyen d'une variable $u$, un point $m$ de la courbe C et $F(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la quadrique D. L'enveloppe du plan polaire du point $m$ est définie par les deux équations

$$(1). \qquad f(u)\frac{\partial F}{\partial x} + f_1(u)\frac{\partial F}{\partial y} + f_2(u)\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

$$(2) \qquad f'(u)\frac{\partial F}{\partial x} + f'_1(u)\frac{\partial F}{\partial y} + f'_2(u)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Si à ces équations on adjoint la suivante

$$(3) \qquad f''(u)\frac{\partial F}{\partial x} + f''_1(u)\frac{\partial F}{\partial y} + f''_2(u)\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

le système de ces trois équations définit l'arête de rebroussement de la surface développable S', représentée par les équations (1) et (2).

Les coordonnées d'un point de cette arête étant représentées par $x, y, z, t$, le plan polaire de ce point a pour équation

$$(4) \qquad X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

En éliminant $x, y, z, t$ entre les équations précédentes, on obtient aisément l'équation

$$\begin{vmatrix} X - f(u) & Y - f_1(u) & Z - f_2(u) \\ f'(u) & f'_1(u) & f'_2(u) \\ f''(u) & f''_1(u) & f''_2(u) \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente le plan osculateur au point $m$ de la courbe C.

La tangente à l'arête de rebroussement C' de la surface S' est définie par les équations (1) et (2), qui représentent : la première, le plan polaire de $m$ et, la seconde, le plan polaire du point à l'infini sur la tangente en $m$ à C ; les tangentes en des points correspondants des courbes C et C' sont donc conjuguées.

Nous dirons que la courbe C et la surface développable S' sont *polaires réciproques,* ainsi que la développable S et la courbe C'.

En résumé, aux points de C correspondent les plans osculateurs de C', et réciproquement, et aux tangentes de C correspondent les tangentes de C'. Cette dernière remarque est très importante en *Géométrie réglée.*

**307.** Théorème. — *Le degré d'une surface non développable est égal à la classe de sa polaire réciproque.*

En effet, aux points d'intersection d'une surface non développable S par une droite A correspondent les plans tangents menés à sa polaire réciproque S' par la droite A' conjuguée de A, par rapport à la quadrique directrice. En appelant $m$ et $\mu$ le degré et la classe de S, $m'$ et $\mu'$ le degré et la classe de S', on a donc $m = \mu'$, $m' = \mu$; on verra, comme en Géométrie plane, qu'on ne peut avoir $\mu = m(m-1)$ et $\mu' = m'(m'-1)$ que si $m = m' = 2$.

Aux points d'intersection d'une courbe C et d'un plan P, correspondent les plans tangents menés à la développable polaire réciproque de C par le pôle $p'$ du plan P; donc *la classe d'une surface développable est égale à l'ordre de sa courbe polaire réciproque,* l'ordre d'une courbe étant égal au nombre de points de rencontre de cette courbe et d'un plan quelconque.

Ainsi, la polaire réciproque d'une conique est un cône du second degré.

**308.** Théorème. — *Dans la transformation par polaires réciproques, à quatre points en ligne droite correspondent quatre plans passant par*

*une même droite, et dont le rapport anharmonique est le même que celui des quatre points donnés.*

Cette proposition importante, que nous croyons devoir rappeler ici, a déjà été établie au n° 298.

309. *Interprétation des équations en coordonnées tangentielles.* — Le pôle du plan ayant pour équation

$$ux + vy + wz + rt = 0,$$

par rapport à la quadrique imaginaire ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

a pour coordonnées $u$, $v$, $w$, $r$; donc la surface ayant pour équation tangentielle

$$F(u, v, w, r) = 0$$

est la polaire réciproque, par rapport à la quadrique directrice imaginaire considérée, de la surface dont l'équation ponctuelle est

$$F(x, y, z, t) = 0.$$

On peut d'ailleurs construire la polaire réciproque par rapport à la quadrique réelle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

et construire ensuite la symétrique de la figure obtenue par rapport à l'origine des coordonnées.

Cherchons par exemple ce que représente l'équation $f(u, v, w) = 0$, dont le premier membre est homogène. L'équation $f(x, y, z) = 0$ est un cône ayant son sommet à l'origine; la polaire réciproque de ce cône est donc une conique dans le plan polaire de l'origine par rapport à la quadrique directrice considérée plus haut. Si les axes sont rectangulaires, cette quadrique est une sphère imaginaire; tout plan passant par son centre a pour pôle un point à l'infini dans la direction perpendiculaire à ce plan. On nomme ***cône supplémentaire d'un cône donné*** le lieu des perpendiculaires aux plans tangents à ce cône menées par un point. On voit ainsi que l'équation $f(u, v, w) = 0$ représente, quand les axes sont rectangulaires, la conique intersection, par le plan de l'infini, du cône ayant pour sommet l'origine et supplémentaire du cône ayant pour équation $f(x, y, z) = 0$.

Supposons toujours les axes rectangulaires et considérons le cône isotrope dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

Tout plan tangent à ce cône est isotrope; la perpendiculaire à un de ces plans, menée par l'origine, se confond avec la génératrice de contact; donc le cône supplémentaire se confond avec le cône proposé. Il en résulte que

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

est, en coordonnées tangentielles rectangulaires, l'équation du *cercle de l'infini.*

Considérons encore une quadrique Q, coupée par un plan P; soient C la conique d'intersection et Γ le cône circonscrit à cette quadrique le long de C et dont le sommet est le pôle $p$ de P. Transformons, en prenant pour quadrique directrice la quadrique imaginaire $x^2+y^2+z^2+1=0$. A la conique C correspond un cône Γ' circonscrit à la polaire réciproque Q' et ayant pour sommet le point $p'$, pôle de P. Soient $u_0 x + v_0 y + w_0 z + r_0 = 0$ l'équation du plan P, et $F(u, v, w, r) = 0$ l'équation tangentielle de la quadrique Q; les coordonnées ponctuelles de $p'$ sont $u_0$, $v_0$, $w_0$, $r_0$; l'équation ponctuelle de Q' est $F(x, y, z, t) = 0$, et le cône Γ' a pour équation

$$4F(x, y, z, t)\,F(u_0, v_0, w_0, r_0) - (u_0 F'_x + v_0 F'_y + w_0 F'_z + r_0 F'_t)^2 = 0,$$

donc l'équation tangentielle de la conique C est

$$4F(u, v, w, r)\,F(u_0, v_0, w_0, r_0) - (u_0 F'_u + v_0 F'_v + w_0 F'_w + r_0 F'_r)^2 = 0,$$

équation que l'on peut obtenir directement, en exprimant que l'intersection des deux plans $(u, v, w, r)$, $(u_0, v_0, w_0, r_0)$ est tangente à la quadrique donnée (148).

L'équation obtenue exprime que le plan $(u, v, w, r)$ est tangent à la conique C; si on l'applique au plan $(u, v, 0, r)$, c'est-à-dire si l'on fait $w = 0$ dans l'équation précédente, on aura l'équation tangentielle du cylindre parallèle à l'axe de $z$ mené par C ou, ce qui revient au même, l'équation tangentielle dans le plan $xOy$ de la projection sur ce plan de la conique C, faite parallèlement à $Oz$. C'est ce qu'on peut encore expliquer ainsi : en faisant $z = 0$ dans l'équation du cône Γ', on a l'équation de la section de ce cône par le plan $xOy$; or, au plan $z = 0$ correspond le point à l'infini dans la direction $Oz$, soit $w = 0$; donc à la conique section du cône Γ par le plan $xOy$ correspond bien le cylindre parallèle à $Oz$, mené par C.

Cherchons enfin la condition pour que l'équation tangentielle

$$f(u, v, w, r) = 0$$

représente une conique. La condition pour que $f(x, y, z, t) = 0$ représente un cône est que le hessien de la forme $f(x, y, z, t)$ soit nul; donc, pour que l'équation tangentielle donnée représente une conique, il faut et il suffit que le hessien de son premier membre soit nul.

## EXERCICES.

1. Les polaires réciproques de toutes les surfaces passant par une même courbe sont inscrites à une même développable. Application aux quadriques et en particulier aux sphères.

2. Les polaires réciproques de toutes les surfaces inscrites à une même développable ont une courbe commune. Application aux quadriques.

3. Faire la discussion de la polaire réciproque d'une quadrique par rapport à une quadrique directrice D.

4. Conditions pour que la polaire réciproque d'une quadrique Q, par rapport à une quadrique donnée D, soit la quadrique Q elle-même.

5. Trouver les quadriques D telles que la polaire réciproque d'une quadrique donnée Q par rapport à D soit une quadrique donnée Q'. — On considère le tétraèdre conjugué commun à Q et Q', etc. (*voir* n° 458).

6. Étant données deux quadriques polaires réciproques par rapport à une sphère, trouver une relation entre le cône des directions asymptotiques de l'une d'elles, et le cône circonscrit à l'autre, et ayant pour sommet le centre de la sphère directrice.

7. La polaire réciproque d'une surface réglée est une surface réglée.

8. Deux tétraèdres de volumes V et V' étant polaires réciproques relativement à une surface du second degré dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$; si l'on appelle $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ les volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le centre de la surface aux sommets de V, on a

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V'\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3},$$

# CHAPITRE XX.

## PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DANS LES QUADRIQUES A CENTRE.

### Ellipsoïde.

310. *Tout ellipsoïde réel possède une infinité de systèmes de diamètres conjugués.* — En effet, soit A un point pris sur la surface d'un ellipsoïde réel de centre O; le plan diamétral conjugué à la direction OA coupe cet ellipsoïde suivant une ellipse réelle; si l'on considère deux demi-diamètres conjugués OB, OC de cette ellipse, OA, OB, OC forment trois demi-diamètres *conjugués de l'ellipsoïde*. Si l'on fait coïncider respectivement les directions positives

des axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ avec OA, OB, OC, si $a'$, $b'$, $c'$ sont les longueurs de ces trois demi-diamètres, l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} - 1 = 0.$$

On voit ainsi que, réciproquement, si OA, OB, OC sont trois demi-diamètres conjugués, OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués de la section faite par le plan diamétral conjugué à OC.

**311.** La même surface, rapportée à ses axes de symétrie, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Je dis que pour tout point de l'espace on a identiquement

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \equiv \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2}.$$

En effet, l'ellipsoïde étant supposé rapporté à ses axes de symétrie, faisons une transformation de coordonnées et prenons pour nouveaux axes trois diamètres conjugués OA, OB, OC; les formules de transformation fournissent une identité de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \equiv \varphi(x', y', z');$$

la nouvelle équation est donc

$$\varphi(x', y', z') - 1 = 0;$$

mais elle est aussi

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

donc

$$\varphi(x', y', z') \equiv \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2}.$$

**312.** Théorèmes (dits d'Apollonius). — 1° *La somme des carrés de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde est constante.*

2° *La somme des carrés des faces du parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués est constante.*

3° *Le volume du parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués est constant.*

On a, en effet, en conservant les notations précédentes,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2},$$

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda+2z'x'\cos\mu+2x'y'\cos\nu,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ désignant les angles des axes de coordonnées dirigés suivant les diamètres conjugués considérés.

On tire des identités précédentes

$$x^2+y^2+z^2+\mathrm{S}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\psi(x',y',z')+\mathrm{S}\left(\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}\right).$$

Le discriminant de la seconde forme est égal au discriminant de la première multiplié par $\omega^2$. En égalant ces discriminants à zéro on a donc des équations identiques, savoir

$$\begin{gathered}\mathrm{S}^3+\mathrm{S}^2(a'^2+b'^2+c'^2)\\ +\mathrm{S}(b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu)+a'^2b'^2c'^2\omega^2=0,\\ \mathrm{S}^3+\mathrm{S}^2(a^2+b^2+c^2)+\mathrm{S}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+a^2b^2c^2=0.\end{gathered}$$

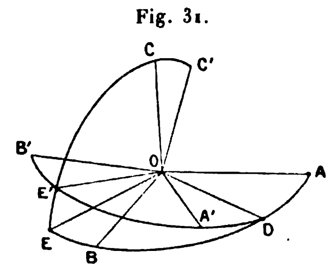
Par suite

$$\begin{gathered}a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2,\\ b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2,\\ a'b'c'\omega=abc.\end{gathered}$$

Ces équations sont la traduction analytique des théorèmes analogues à ceux qu'Apollonius a trouvés pour l'ellipse, et qui ont été démontrés pour la première fois par Livet et Binet.

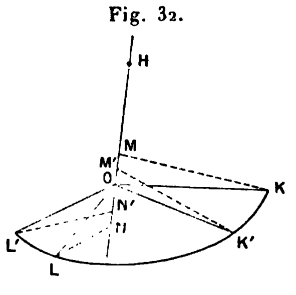
313. *Démonstration géométrique.* — On s'appuie sur la remarque suivante : Étant donnés deux systèmes de diamètres conjugués $O.A_1B_1C_1$ et $O.A_2B_2C_1$ ayant un diamètre commun $OC_1$ les diamètres $OA_1$, $OB_1$ et $OA_2$, $OB_2$ sont dans un même plan qui est le plan diamétral conjugué à $OC_1$. Cela étant, soient O.ABC et O.A′B′C′ (*fig.* 31) deux systèmes de diamètres conjugués, le premier étant, par exemple si l'on veut, formé par les axes de symétrie de l'ellipsoïde. Le plan AOB et le plan A′OB′ se coupent suivant un diamètre OD; soient OE le diamètre conjugué à OD dans le plan AOB et OE′ le diamètre conjugué à OD dans le plan A′OB′; O.DEC et O.DE′C′ sont deux systèmes de diamètres conjugués ayant un diamètre commun OD, donc les diamètres OE,

Fig. 31.



OC, OE′, OC′ sont dans un même plan. On peut ainsi passer successivement par les systèmes O.ABC, O.CDE, O.DE′C′, O.A′B′C′; deux systèmes consécutifs ont un diamètre commun, les autres forment deux couples de diamètres appartenant à une même conique. Il en résulte que dans chacun de ces systèmes la somme des carrés des diamètres est la même : le premier théorème est donc démontré. Le troisième se démontre aussi facilement, car si l'on considère les parallélépipèdes correspondant à deux systèmes consécutifs, par exemple O.C′DE′ et O.C′A′B′, ces parallélépipèdes ayant un sommet commun et des bases équivalentes, situées dans un même plan, sont équivalents.

Fig. 32.




Reste à établir le second théorème. Pour cela, considérons deux systèmes de diamètres conjugués ayant un diamètre commun, O.HKL et O.HK′L′. Les faces construites sur OK et OL d'une part, sur OK′ et OL′ (*fig.* 32) d'autre part, sont équivalentes; reste donc à considérer les faces (OH.OK), (OH.OL) et (OH.OK′), (OH,OL′). Soient OM et ON les projections de OK et de OL sur OH; nous avons à calculer la somme

$$\overline{OH}^2 \times \overline{MK}^2 + \overline{OH}^2 \times \overline{NL}^2$$

ou

$$\overline{OH}^2 \left(\overline{OK}^2 + \overline{OL}^2 - \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2\right),$$

et la somme

$$\overline{OH}^2 \left(\overline{OK'}^2 + \overline{OL'}^2 - \overline{OM'}^2 - \overline{ON'}^2\right),$$

en appelant M′ et N′ les projections de K′ et L′ sur OH. Mais

$$\overline{OK}^2 + \overline{OL}^2 = \overline{OK'}^2 + \overline{OL'}^2,$$

et, d'autre part, on a aussi

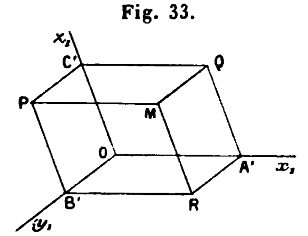
$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{ON'}^2,$$

car la somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués d'une ellipse sur un axe est constante. On voit ainsi qu'en passant d'un système de diamètres au suivant, la somme des carrés des faces des parallélépipèdes construits sur ces diamètres reste la même : le second théorème est donc établi.

**314.** *Lieu des sommets des parallélépipèdes construits sur trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.* — Soit M le sommet opposé au centre dans le parallélépipède construit sur les trois demi-diamètres conjugués OA′,

OB', OC' (*fig.* 33). Si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de symétrie, puis les diamètres considérés, en appelant $x$, $y$, $z$ et $x'$, $y'$, $z'$ les anciennes et les nouvelles coordonnées de M, on a vu que

Fig. 33.




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}.$$

Mais $x'=a'$, $y'=b'$, $z'=c'$, donc le point M est sur l'ellipsoïde homothétique et concentrique au proposé, et ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3.$$

Pour chacun des autres sommets P, Q, R, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2;$$

car pour P, par exemple, $x'=0$, $y'=b'$, $z'=c'$ et de même pour les deux autres; ces trois sommets sont donc sur un nouvel ellipsoïde homothétique et concentrique au premier.

**315.** *Variations de la longueur d'un diamètre de l'ellipsoïde.* — Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus des angles qu'un diamètre OM fait avec les axes de symétrie de l'ellipsoïde donné; en appelant $\rho$ la longueur de ce diamètre et $x$, $y$, $z$ les coordonnées de son extrémité, on a

$$x=\rho\alpha,\qquad y=\rho\beta,\qquad z=\rho\gamma,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Supposons $a>b>c$. On peut écrire ainsi la formule précédente

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{a^2}+\beta^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$
$$=\frac{1}{c^2}-\alpha^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\beta^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

On a donc

$$c\leqq\rho\leqq a.$$

Sur tout ellipsoïde d'axes $2a$, $2b$, $2c$ $(a>b>c)$, il y a une infinité de points situés à une distance du centre égale à $\rho$, si l'on suppose $c<\rho<a$.

Les points satisfaisant aux conditions données sont, en effet, dé-

terminés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad x^2+y^2+z^2-\rho^2=0.$$

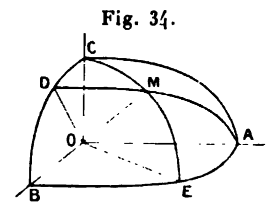
On peut remplacer l'une de ces équations par celle-ci

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)=0,$$

qui représente un cône qui n'est réel que si l'on suppose $c<\rho<a$. Les points cherchés sont à l'intersection de ce cône et de la sphère concentrique à l'ellipsoïde et de rayon $\rho$.

Il est d'ailleurs facile de se rendre compte de la nécessité des conditions précédentes. Soit en effet M un point de l'ellipsoïde ayant pour demi-axes OA, OB, OC (*fig.* 34). La section faite par le plan OAM est une ellipse ayant pour demi-axes OA et OD; OD est compris entre OB et OC et, par suite, plus petit que OA : donc OM < OA. La section par le plan MOC est une ellipse ayant pour demi-axes OC et OE; mais OE > OB > OC, donc OM > OC. On a supposé OM à l'intérieur du trièdre OABC, ce qui était évidemment permis.

Fig. 34.




**316. Problème.** — *Construire un système de trois diamètres conjugués égaux d'un ellipsoïde.*

Supposons le problème résolu et soit $x$ la longueur commune de trois demi-diamètres conjugués égaux; on aura, en vertu du premier théorème d'Apollonius,

$$x^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Or, on voit immédiatement que cette expression est comprise entre $a^2$ et $c^2$ $(a>b>c)$; donc il y a sur la sphère une infinité de points situés à une distance du centre égale à la valeur absolue de $x$ définie par l'équation précédente; ces points étant à l'intersection de l'ellipsoïde donné et du cône ayant pour équation

$$x^2\,\frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2}+y^2\,\frac{a^2+c^2-2b^2}{b^2}+z^2\,\frac{a^2+b^2-2c^2}{c^2}=0.$$

Soit M un point pris sur la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et de ce cône; il y a dans l'ellipse intersection de l'ellipsoïde par le plan diamétral con-

jugué à OM, deux diamètres conjugués égaux; si l'on appelle $2y$ leur longueur commune, on aura

$$2y^2 + x^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 3x^2,$$

donc $y = x$; il y a donc une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués égaux, dont les extrémités sont sur la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et du cône obtenu.

317. *Relations entre les longueurs et les directions de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.* — Soient OA′, OB′, OC′ trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus directeurs de ces demi-diamètres, l'ellipsoïde étant rapporté à ses axes de symétrie. Soient $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$ les coordonnées des points A′, B′, C′ respectivement, et enfin $a'$, $b'$, $c'$ les longueurs des demi-diamètres considérés. On a

$$\begin{aligned} x_1 &= a'\alpha_1, & y_1 &= a'\beta_1, & z_1 &= a'\gamma_1, \\ x_2 &= b'\alpha_2, & y_2 &= b'\beta_2, & z_2 &= b'\gamma_2, \\ x_3 &= c'\alpha_3. & y_3 &= c'\beta_3, & z_3 &= c'\gamma_3. \end{aligned}$$

En écrivant que les extrémités de chacun de ces diamètres sont sur l'ellipsoïde, puis dans le plan diamétral conjugué à chacun des deux autres, on obtient les équations suivantes :

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{a'^2\alpha_1^2}{a^2} + \dfrac{a'^2\beta_1^2}{b^2} + \dfrac{a'^2\gamma_1^2}{c^2} = 1, \\ \dfrac{b'^2\alpha_2^2}{a^2} + \dfrac{b'^2\beta_2^2}{b^2} + \dfrac{b'^2\gamma_2^2}{c^2} = 1, \\ \dfrac{c'^2\alpha_3^2}{a^2} + \dfrac{c'^2\beta_3^2}{b^2} + \dfrac{c'^2\gamma_3^2}{c^2} = 1; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \dfrac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \dfrac{\gamma_1\gamma_2}{c^2} = 0, \\ \dfrac{\alpha_2\alpha_3}{a^2} + \dfrac{\beta_2\beta_3}{b^2} + \dfrac{\gamma_2\gamma_3}{c^2} = 0, \\ \dfrac{\alpha_3\alpha_1}{a^2} + \dfrac{\beta_3\beta_1}{b^2} + \dfrac{\gamma_3\gamma_1}{c^2} = 0; \end{cases}$$

mais si l'on fait *la transformation homographique* définie par les formules

$$\frac{x}{a} = X, \qquad \frac{y}{b} = Y, \qquad \frac{z}{c} = Z,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a'\alpha_1}{a} = X_1, \qquad \frac{a'\beta_1}{b} = Y_1, \qquad \frac{a'\gamma_1}{c} = Z_1, \qquad \ldots;$$

les équations (1) et (2) deviennent

$$(1)'\ \begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1, \\ X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1, \\ X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 = 1; \end{cases} \qquad (2)'\ \begin{cases} X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0, \\ X_2X_3 + Y_2Y_3 + Z_2Z_3 = 0, \\ X_3X_1 + Y_3Y_1 + Z_3Z_1 = 0. \end{cases}$$

On aurait pu écrire immédiatement ces équations en remarquant que, si l'on pose

$$x' = aX', \quad y' = bY', \quad z' = cZ'; \quad x'' = aX'', \quad y'' = bY'', \quad z'' = cZ'',$$

on en déduit

$$\frac{x'+x''}{2} = a\,\frac{X'+X''}{2}, \qquad \frac{y'+y''}{2} = b\,\frac{Y'+Y''}{2}, \qquad \frac{z'+z''}{2} = c\,\frac{Z'+Z''}{2}$$

et, par suite, au milieu d'un segment correspond le milieu du segment transformé. A un plan correspond un plan; à deux droites parallèles correspondent deux droites parallèles. Au plan diamétral conjugué à une direction $\delta$ correspond donc le plan diamétral conjugué à la direction transformée $\Delta$. Or, à l'ellipsoïde correspond une sphère concentrique et de rayon 1, et aux trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde correspondent trois diamètres conjugués de la sphère, c'est-à-dire trois diamètres rectangulaires deux à deux.

Cela posé, les équations (1)' et (2)' forment, comme on sait, un système équivalent au suivant :

$$(3)'\quad \begin{cases} X_1^2+X_2^2+X_3^2 = 1, \\ Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2 = 1, \\ Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2 = 1; \end{cases} \qquad (4)'\quad \begin{cases} X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3 = 0, \\ Y_1Z_1+Y_2Z_2+Y_3Z_3 = 0, \\ Z_1X_1+Z_2X_2+Z_3X_3 = 0; \end{cases}$$

c'est-à-dire, en revenant aux notations primitives :

$$(3)\quad \begin{cases} a'^2\alpha_1^2+b'^2\alpha_2^2+c'^2\alpha_3^2 = a^2, \\ a'^2\beta_1^2+b'^2\beta_2^2+c'^2\beta_3^2 = b^2, \\ a'^2\gamma_1^2+b'^2\gamma_2^2+c'^2\gamma_3^2 = c^2; \end{cases} \quad \text{ou} \quad (3)''\quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2, \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2 = b^2, \\ z_1^2+z_2^2+z_3^2 = c^2; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} a'^2\alpha_1\beta_1+b'^2\alpha_2\beta_2+c'^2\alpha_3\beta_3 = 0, \\ a'^2\beta_1\gamma_1+b'^2\beta_2\gamma_2+c'^2\beta_3\gamma_3 = 0, \\ a'^2\gamma_1\alpha_1+b'^2\gamma_2\alpha_2+c'^2\gamma_3\alpha_3 = 0; \end{cases} \quad \text{ou} \quad (4)''\quad \begin{cases} x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = 0, \\ y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 = 0, \\ z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3 = 0. \end{cases}$$

**318.** Exercice. — *Application des formules précédentes à la démonstration des théorèmes d'Apollonius.* — 1° Si l'on ajoute, membre à membre, les équations (3), on obtient immédiatement

$$a'^2+b'^2+c'^2 = a^2+b^2+c^2.$$

2° Calculons la somme des carrés des faces du parallélépipède construit sur les diamètres considérés; il suffit pour cela de calculer la somme des carrés des projections de ces faces sur les trois plans de coordonnées. Relativement au plan $xOy$, on trouve pour somme

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2.$$

Or, cette somme est le carré du *Tableau rectangulaire*

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix}$$

et, en vertu des formules $(3)''$ et $(4)''$, ce carré est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix}$$

ou $a^2 b^2$. En calculant de même la somme des carrés des projections des faces sur les deux autres plans de coordonnées, on obtient $b^2 c^2$ et $c^2 a^2$; la somme des carrés des faces considérées est donc

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2.$$

3° Le volume du parallélépipède est égal, au signe près, à

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

or, en faisant le carré de ce déterminant et tenant compte des équations $(3)''$ et $(4)''$, on trouve $a^2 b^2 c^2$; ce qui démontre le troisième théorème.

4° On peut encore calculer la somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur une droite quelconque. Soient $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les cosinus directeurs de cette droite; on a

$$(\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1)^2 + (\lambda x_2 + \mu y_2 + \nu z_2)^2 + (\lambda x_3 + \mu y_3 + \nu z_3)^2$$
$$= \lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + \nu^2 c^2;$$

ce qui prouve que cette somme reste constante, quel que soit le système de diamètres conjugués que l'on projette sur la droite donnée.

**319.** *Relations entre les paramètres de trois plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde.* — On dit que trois plans diamétraux sont conjugués si chacun d'eux est conjugué à l'intersection des deux autres. On voit immédiatement que les plans formés par trois diamètres conjugués deux à deux sont conjugués et réciproquement. Cela posé, soient $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$, $(u_3, v_3, w_3)$ les coefficients des équations de trois plans passant par le centre d'un ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie. Le diamètre conjugué au premier plan a pour équation

$$\frac{x}{a^2 u_1} = \frac{y}{b^2 v_1} = \frac{z}{c^2 w_1},$$

en écrivant que ce diamètre est dans chacun des deux autres plans et procédant de la même façon à l'égard de chacun des trois plans don-

nés, on obtient les conditions

$$a^2 u_1 u_2 + b^2 v_1 v_2 + c^2 w_1 w_2 = 0,$$
$$a^2 u_2 u_3 + b^2 v_2 v_3 + c^2 w_2 w_3 = 0,$$
$$a^2 u_3 u_1 + b^2 v_3 v_1 + c^2 w_3 w_1 = 0.$$

## Hyperboloïdes.

**320.** En raisonnant comme pour l'ellipsoïde, on voit qu'un hyperboloïde admet une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués, mais les longueurs de ces diamètres ne sont pas toutes réelles.

L'équation d'un hyperboloïde rapporté à trois diamètres conjugués est de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 - 1 = 0.$$

Si deux diamètres sont réels et le troisième imaginaire, l'hyperboloïde est à une nappe; si deux diamètres sont imaginaires et le troisième réel, l'hyperboloïde est à deux nappes; ce sont les seules hypothèses possibles. L'équation d'un hyperboloïde à une nappe rapporté à trois diamètres conjugués peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

et celle d'un hyperboloïde à deux nappes sera de la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = -1.$$

**321.** Théorèmes d'Apollonius. — Dans un hyperboloïde :

1° *La somme algébrique des carrés de trois diamètres conjugués est constante;*

2° *La somme algébrique des carrés des faces du parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués est constante;*

3° *Le volume du parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués est constant;*

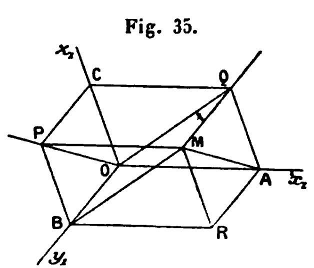
c'est-à-dire :

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$
$$a'^2 b'^2 \sin^2 \nu - b'^2 c'^2 \sin^2 \lambda - c'^2 a'^2 \sin^2 \mu = a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2,$$
$$a' b' c' \omega = abc.$$

La démonstration est la même que pour l'ellipsoïde.

**322.** *Lieu des sommets des parallélépipèdes construits sur trois diamètres conjugués d'un hyperboloïde.* — Soient $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ (*fig.* 35) les directions de trois diamètres conjugués d'un hyperboloïde à une nappe, et supposons $OA = a'$, $OB = b'$, $OC = c'$. En appelant $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point par rapport aux axes de symétrie et $x'$, $y'$, $z'$ ses coordonnées par rapport aux nouveaux axes, on a

Fig. 35.




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}.$$

Les coordonnées de M sont $x' = a'$, $y' = b'$, $z' = c'$; donc le point M est sur l'hyperboloïde à une nappe donné, car

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le point R, situé dans le plan des deux diamètres réels, a pour coordonnées $x' = a'$, $y' = b'$, $z' = 0$; donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2;$$

le point R est donc sur un hyperboloïde homothétique et concentrique au premier.

Enfin, pour Q,

$$x' = a', \qquad y' = 0, \qquad z' = c',$$

et, pour P,

$$x' = 0, \qquad y' = b', \qquad z' = c';$$

donc chacun de ces points est sur le cône asymptote, car

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

On voit d'ailleurs que AM et MB sont des droites situées tout entières sur l'hyperboloïde et que OP et OQ sont des génératrices du cône asymptote.

**323.** *Variations de la longueur d'un diamètre d'un hyperboloïde.* — Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point M appartenant à un hyperboloïde à une ou à deux nappes et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de OM, la surface étant rapportée à ses axes de symétrie; en désignant par $\rho$ la longueur de OM, on a

$$\varepsilon\frac{1}{\rho^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2},$$

$\varepsilon$ étant égal à $+1$ dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, à $-1$

dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes. On voit ainsi que pour deux hyperboloïdes conjugués, à tout diamètre réel de l'un correspond un diamètre imaginaire de l'autre. Le rapport d'homothétie des deux hyperboloïdes est égal à $\pm i$, comme nous l'avons déjà fait remarquer. Si $\varepsilon = +1$, pour que $\rho$ soit réel, il faut que l'on ait

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} > 0,$$

ce qui exprime que le diamètre doit être *extérieur* au cône asymptote. En supposant $a < b$, on voit que $\rho > a$.

Il y a sur l'hyperboloïde à une nappe une infinité de points situés à une distance du centre plus grande que $a$; ces points sont sur la sphère ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$$

et par suite, à l'intersection de cette sphère et du cône ayant pour équation

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) = 0.$$

Ce cône est réel si l'on suppose $\rho > a$.

Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, les diamètres réels sont *intérieurs* au cône asymptote; leur longueur est plus grande que $2c$. Les points à distance du centre égale à $\rho$ sont sur le cône ayant pour équation

$$x^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0.$$

Ce cône est réel si l'on suppose $\rho > c$; il y a donc une infinité de points situés à une distance du centre supérieure à $c$.

**324.** *Trouver trois diamètres conjugués égaux d'un hyperboloïde.* — Supposons $a' = b' = c'$; on doit avoir, dans ce cas,

$$a'^2 = a^2 + b^2 - c^2;$$

s'il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe, on doit avoir, en supposant $a < b$,

$$a^2 + b^2 - c^2 > a^2 \qquad \text{ou} \qquad b > c;$$

dans ce cas, le problème est possible; sur la ligne d'intersection de l'hyperboloïde et de la sphère de rayon $a'$, donné par l'équation précédente, pre-

nons un point M; le plan diamétral conjugué à OM coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole sur laquelle nous pourrons trouver au moins un point N, situé à une distance du centre égale à $a'$; soit $c'$ le demi-diamètre imaginaire conjugué; nous aurons

$$a'^2 + a'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2 = a'^2,$$

donc

$$c' = a',$$

ce qui montre que l'hyperbole obtenue est équilatère. On voit ainsi que les extrémités réelles des diamètres répondant à la question sont sur une même courbe, intersection de l'hyperboloïde et du cône ayant pour équation

$$x^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2} + y^2 \frac{a^2 - c^2}{b^2} - z^2 \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 0.$$

Dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, il faut supposer

$$a^2 + b^2 - c^2 > c^2,$$

c'est-à-dire

$$a^2 + b^2 > 2c^2.$$

Si cette condition est remplie, on prendra un point M sur la courbe d'intersection de l'hyperboloïde et du cône ayant même équation que plus haut; le plan diamétral conjugué à OM coupe la surface suivant une ellipse imaginaire et l'hyperboloïde conjugué suivant une ellipse réelle; sur cette ellipse réelle, prenons les deux demi-diamètres égaux, et soit $b'$ leur longueur ; on aura

$$2b'^2 - a'^2 = a^2 + b^2 - c^2 = a'^2;$$

d'où

$$b' = a'.$$

On doit remarquer que, si l'on suppose $a < b$ et $a^2 + b^2 > 2c^2$, on aura aussi

$$b > c.$$

325. *Relations entre les longueurs et les cosinus directeurs de trois diamètres conjugués d'un hyperboloïde.* — On obtient des formules analogues à celles qui sont relatives à l'ellipsoïde, en changeant, pour l'hyperboloïde à une nappe, $c$ en $ci$, et, pour l'hyperboloïde à deux nappes, $a$ et $b$ en $ai$ et $bi$.

En posant $\frac{x}{a} = X$, $\frac{y}{b} = Y$, $\frac{z}{c} = iZ$, l'hyperboloïde à une nappe se transforme en une sphère; il en est de même pour l'hyperboloïde à deux nappes, en posant $\frac{x}{a} = iX$, $\frac{y}{b} = iY$, $\frac{z}{c} = Z$.

Considérons, par exemple, l'hyperboloïde à une nappe, et soient $OA' = a'$, $OB' = b'$ deux demi-diamètres conjugués réels et sur le

diamètre conjugué à leur plan, nous portons une longueur OC′ égale à $c'$; si l'on appelle $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ les coordonnées des points A′, B′, C′ et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus directeurs de OA′, OB′, OC′, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a'^2\alpha_1^2}{a^2}+\frac{a'^2\beta_1^2}{b^2}-\frac{a'^2\gamma_1^2}{c^2}=\varepsilon,\\ &\frac{b'^2\alpha_2^2}{a^2}+\frac{b'^2\beta_2^2}{b^2}-\frac{b'^2\gamma_2^2}{c^2}=\varepsilon,\\ &\frac{c'^2\alpha_3^2}{a^2}+\frac{c'^2\beta_3^2}{b^2}-\frac{c'^2\gamma_3^2}{c^2}=\varepsilon,\end{aligned}\right. \qquad (2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2}+\frac{\beta_1\beta_2}{b^2}-\frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2}=0,\\ &\frac{\alpha_2\alpha_3}{a^2}+\frac{\beta_2\beta_3}{b^2}-\frac{\gamma_2\gamma_3}{c^2}=0,\\ &\frac{\alpha_3\alpha_1}{a^2}+\frac{\beta_3\beta_1}{b^2}-\frac{\gamma_3\gamma_1}{c^2}=0.\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &a'^2\alpha_1^2+b'^2\alpha_2^2-c'^2\alpha_3^2=\varepsilon a^2,\\ &a'^2\beta_1^2+b'^2\beta_2^2-c'^2\beta_3^2=\varepsilon b^2,\\ &a'^2\gamma_1^2+b'^2\gamma_2^2-c'^2\gamma_3^2=-\varepsilon c^2,\end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad (3')\quad \left\{\begin{aligned} &x_1^2+x_2^2-x_3^2=\varepsilon a^2,\\ &y_1^2+y_2^2-y_3^2=\varepsilon b^2,\\ &z_1^2+z_2^2-z_3^2=-\varepsilon c^2;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &a'^2\alpha_1\beta_1+b'^2\alpha_2\beta_2-c'^2\alpha_3\beta_3=0,\\ &a'^2\beta_1\gamma_1+b'^2\beta_2\gamma_2-c'^2\beta_3\gamma_3=0,\\ &a'^2\gamma_1\alpha_1+b'^2\gamma_2\alpha_2-c'^2\gamma_3\alpha_3=0,\end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad (4')\quad \left\{\begin{aligned} &x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3=0,\\ &y_1z_1+y_2z_2-y_3z_3=0,\\ &z_1x_1+z_2x_2-z_3x_3=0.\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, il faut faire $\varepsilon=+1$; en prenant $\varepsilon=-1$, on a les formules relatives à l'hyperboloïde à deux nappes.

326. *Relations entre trois plans diamétraux conjugués.* — En raisonnant comme pour l'ellipsoïde, on trouve

$$\begin{aligned} a^2u_1u_2+b^2v_1v_2-c^2w_1w_2=0,\\ a^2u_2u_3+b^2v_2v_3-c^2w_2w_3=0,\\ a^2u_3u_1+b^2v_3v_1-c^2w_3w_1=0.\end{aligned}$$

### EXERCICES.

1. On coupe un ellipsoïde et son cône asymptote par un plan passant par les extrémités de trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde; prouver que le rapport d'homothétie des deux sections obtenues est égal à $i\sqrt{2}$.

2. Lieu des diamètres d'un ellipsoïde qui sont conjugués aux plans tangents au cône ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0;$$

l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

3. Si l'on détermine des tétraèdres ayant pour faces trois plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde et un plan tangent à cet ellipsoïde, de façon que le produit des trois segments déterminés sur les diamètres conjugués correspondants soit minimum, les volumes de tous ces tétraèdres sont équivalents. (T.)

4. Dans un ellipsoïde, la somme des longueurs de trois diamètres conjugués est la plus grande possible quand ces diamètres sont égaux.

5. Si $P_1$, $P_2$, $P_3$ sont les pieds des perpendiculaires abaissées du centre O d'un ellipsoïde sur trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués, on a

$$\frac{1}{\overline{OP}_1^2} + \frac{1}{\overline{OP}_2^2} + \frac{1}{\overline{OP}_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

et, si $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ sont les points où ces perpendiculaires rencontrent l'ellipsoïde,

$$\frac{1}{\overline{OP}_1^2\,\overline{OQ}_1^2} + \frac{1}{\overline{OP}_2^2\,\overline{OQ}_2^2} + \frac{1}{\overline{OP}_3^2\,\overline{OQ}_3^2} = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}. \qquad \text{(T.)}$$

6. Par chaque point P d'un ellipsoïde dont on donne trois diamètres conjugués, on mène trois droites qui rencontrent chacune l'un de ces diamètres et est parallèle au plan des deux autres. Ces droites rencontrent la surface de l'ellipsoïde en $P_1$, $P_2$, $P_3$; trouver l'équation du plan passant par ces trois points et l'enveloppe de ces plans quand le point P se meut sur l'ellipsoïde. (T.)

7. OA, OB, OC sont trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Trouver le volume du cône qui a pour base la section diamétrale parallèle au plan ABC et pour sommet le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan ABC.

8. Étant donnés trois diamètres conjugués d'une quadrique, si l'on projette chacun d'eux sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres, la somme des inverses des carrés de ces projections est constante. (FAURE.)

9. Lieu des milieux des cordes d'un ellipsoïde, chaque corde étant proportionnelle au diamètre qui lui est parallèle.

Plus généralement, lieu du point qui partage chacune de ces cordes dans un rapport donné.

10. Soient OA, OB, OC trois demi-diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde et soient OA', OB', OC' les demi-diamètres perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB. Trouver entre OA', OB', OC' des relations analogues aux théorèmes d'Apollonius. (NEUBERG.)

11. La somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde est constante et le plan qui passe par les extrémités de ces diamètres enveloppe une sphère concentrique à l'ellipsoïde.

12. Chercher si deux quadriques concentriques peuvent avoir un système commun de diamètres conjugués. Discussion.

13. Lieu des diamètres conjugués aux plans diamétraux qui coupent un ellipsoïde suivant des ellipses d'aire constante. Lieu des perpendiculaires à ces plans menées par le centre de l'ellipsoïde.

14. L'œil étant en un point de la surface d'un ellipsoïde, les perspectives des sections planes de cet ellipsoïde sur le plan diamétral conjugué du rayon qui aboutit à l'œil sont des courbes homothétiques. Le centre de chacune est la perspective du sommet du cône circonscrit à la surface suivant la section plane considérée.

15. Étant donnée une quadrique de centre O et un point M : 1° si M est extérieur à la quadrique, on mène une tangente MT, le demi-diamètre conjugué OT de cette tangente et le demi-diamètre OA du plan de ces deux droites; soit V le volume du tétraèdre AMOT; 2° si M est intérieur, on mène une demi-corde MT, le demi-diamètre OB conjugué de cette corde et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites; soit V le volume du tétraèdre ABOT. Prouver que si $x, y, z$ sont les coordonnées de M et $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la quadrique, on a

$$f(x, y, z) = \varepsilon \frac{\Delta^2}{H^2} V^2,$$

$\varepsilon = +1$ si M est extérieur, $\varepsilon = -1$ si M est intérieur.

# CHAPITRE XXI.

## CÔNES DU SECOND DEGRÉ.

327. *Relations entre la théorie des cônes et celle des coniques.* — A toute propriété d'un cône du second degré correspond une propriété des coniques et réciproquement. On peut le voir aisément de la manière suivante. Rapportons un cône du second degré C à trois axes de coordonnées quelconques passant par son sommet, et soit

$$\varphi(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

l'équation de ce cône. La section S faite dans ce cône par le plan $z = 1$ se projette, parallèlement à l'axe des $z$, sur le plan $xOy$, en

vraie grandeur, suivant la conique ayant pour équation, dans ce plan,

$$\varphi(x,y,z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'z + 2B''xy = 0.$$

On voit qu'en *coordonnées homogènes* l'équation de cette conique, dans son plan, est la même que celle du cône; ainsi, la même équation, interprétée de deux manières différentes, peut représenter une conique ou un cône.

A tout point M pris dans le plan de la conique S correspond une droite OM passant par le sommet du cône; si M est sur la conique, OM est une génératrice du cône, et réciproquement. A toute droite située dans le plan de la conique S correspond un plan mené par l'origine des coordonnées. Exprimer que le plan ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangent au cône C revient à exprimer que la droite représentée par cette même équation en coordonnées homogènes est tangente à la conique ayant pour équation $\varphi(x, y, z) = 0$. La condition est donc

$$F(u, v, w) \equiv au^2 + a'v^2 + a''v^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

$a$, $a'$, ..., $b''$ étant les mineurs du discriminant de la forme $\varphi(x, y, z)$. Le système des équations tangentielles du cône C est donc

$$r = 0, \qquad F(u, v, w) = 0.$$

On établit d'ailleurs directement ces conditions en identifiant l'équation

$$ux + vy + wz + r = 0$$

avec celle d'un plan tangent au cône donné.

On peut déduire de là les équations tangentielles d'un cône du second degré dont le sommet a pour cordonnées $x_0, y_0, z_0$. On peut mettre l'équation de ce cône sous la forme

$$\varphi(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z) + \varphi_0 = 0.$$

Le plan $(u, v, w, r)$ sera tangent à ce cône s'il passe par son sommet et si le plan parallèle au premier, mené par l'origine des coordonnées, est tangent au cône transporté à l'origine, c'est-à-dire au cône ayant pour équation $\varphi(x, y, z) = 0$. Les conditions sont donc

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + r = 0, \qquad F(u, v, w) = 0.$$

Les plans polaires de tous les points d'une droite OA par rapport au cône C sont confondus en un seul plan, et si $a$, $b$ sont les coordonnées du point A de cette droite, qui se trouve dans le plan de la conique S, ce plan polaire de OA a pour équation

$$a\varphi'_x + b\varphi'_y + \varphi'_z = 0;$$

sa trace sur le plan $z = 1$ est la polaire de A par rapport à la conique S.

Un cône du second degré peut toujours être regardé comme étant le cône asymptote d'une infinité de quadriques homothétiques et concentriques, car, si l'équation de ce cône, rapporté à des axes passant par son centre, est

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

il est le cône asymptote de l'une quelconque des quadriques définies par l'équation

$$\varphi(x, y, z) + D = 0,$$

D étant une constante arbitraire.

Un système de trois diamètres conjugués de l'une quelconque de ces quadriques est aussi un système de diamètres conjugués de leur cône asymptote. De là résulte qu'un cône du second degré a une infinité de systèmes de diamètres conjugués et que, si l'on prend l'un de ces systèmes pour axes de coordonnées, l'équation du cône sera ramenée à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0.$$

C'est, d'ailleurs, ce que l'on peut vérifier directement sans aucune difficulté.

Je dis maintenant qu'un plan quelconque coupera le trièdre des nouveaux axes suivant un triangle $abc$ conjugué à la conique, intersection du cône par le même plan. Il suffit, pour le prouver, de remarquer que le plan polaire de l'axe des $x$, par exemple, par rapport au cône, est précisément le plan $yOz$.

Réciproquement, si $abc$ est un triangle conjugué à une conique, le cône qui a pour sommet un point quelconque O, pris hors du plan de la conique, et pour directrice cette conique, admet pour système de diamètres conjugués les droites $Oa$, $Ob$, $Oc$. On voit, en effet, que chacune de ces droites a pour plan polaire le plan

formé par les deux autres ; en prenant pour axes les droites $Oa$, $Ob$, $Oc$ et exprimant ces conditions, on obtient bien l'équation d'un cône rapporté à trois diamètres conjugués.

On voit ainsi que trois diamètres conjugués d'un cône forment un trièdre conjugué, c'est-à-dire tel que le plan polaire de chacune de ses arêtes est le plan formé par les deux autres arêtes, et réciproquement. Ce trièdre et le plan de l'infini forment un tétraèdre conjugué au cône.

## Cônes supplémentaires.

**328.** *Le lieu des perpendiculaires abaissées d'un même point sur les plans tangents à un cône C est un second cône C'. Réciproquement, le cône C est le lieu des perpendiculaires abaissées du sommet de ce cône sur les plans tangents au cône C'.*

Soient, en effet : SA, SB deux génératrices infiniment voisines du cône C, SM l'intersection des plans tangents à ce cône, menés le long de ces génératrices. Soient S'A', S'B' les perpendiculaires abaissées de S' sur les plans tangents suivant SA et SB au cône C. La droite SM est perpendiculaire au plan A'S'B'. Si SB vient se confondre avec SA, SM vient aussi se confondre avec SA et le plan A'S'B' a pour limite le plan tangent suivant S'A' au cône C' ; on voit donc que SA, limite de SM, est perpendiculaire au plan tangent à C' le long de S'A'. Les cônes C et C' sont appelés *cônes supplémentaires*.

**329.** *Équation du cône supplémentaire d'un cône du second degré.* — Soit (*coordonnées rectangulaires*)

$$\varphi(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

l'équation du cône C ; cherchons l'équation du cône supplémentaire ayant même sommet. Soient $x, y, z$ les coordonnées d'un point M de ce cône ; le plan perpendiculaire à OM, mené par l'origine, a pour équation

$$Xx + Yy + Zz = 0;$$

il suffit d'exprimer que ce plan est tangent au premier cône, ce qui donne l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

ou

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0.$$

On vérifie immédiatement la réciprocité, car, en appliquant la même règle, on obtient pour l'équation du cône supplémentaire du second cône

$$\Delta.\varphi(x, y, z) = 0.$$

### Cône équilatère.

330. Cherchons la condition pour qu'on puisse *placer sur un cône du second degré un trièdre trirectangle.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est, *en supposant les coordonnées rectangulaires,*

$$A + A' + A'' = 0.$$

En effet, soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

l'équation d'un cône rapporté à trois axes rectangulaires passant par son sommet; si l'on peut placer sur ce cône un trièdre trirectangle, en prenant les arêtes de ce trièdre pour axes de coordonnées, son équation deviendra

$$A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy = 0,$$

en désignant les nouvelles coordonnées par les mêmes lettres que les anciennes. Mais le nouvel axe des $x$ étant une génératrice du cône, cette équation doit être vérifiée quand on y fait $y = 0$, $z = 0$, quel que soit $x$; on en déduit $A_1 = 0$; en exprimant que les autres axes sont sur le cône, on trouve les conditions $A'_1 = 0$, $A''_1 = 0$. Or, on sait que

$$A + A' + A'' = A_1 + A'_1 + A''_1;$$

donc l'*invariant* $A + A' + A''$ *doit être nul.*

La condition est suffisante. En effet, supposons

$$A + A' + A'' = 0. \tag{1}$$

Il faut d'abord démontrer que, si cette condition est remplie, le cône proposé est réel. Or, des trois coefficients A, A′, A″, dont la somme est nulle, deux au moins ont des signes contraires. Supposons, par exemple, $AA' < 0$. Dans ce cas, le plan $xOy$ coupe le cône

suivant le système de droites défini par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0,$$

lesquelles sont réelles, puisque $AA'$ est négatif.

Si $A$, $A'$, $A''$ étaient nuls, le cône serait évidemment réel, puisqu'il contiendrait les trois axes de coordonnées.

Le cône considéré renfermant des droites réelles est réel; cela étant, prenons pour axe des $z$ une de ses génératrices, les deux autres axes formant avec le nouvel axe des $z$ un trièdre trirectangle; l'équation rapportée à ces nouveaux axes sera

$$A_1x^2 + A'_1y^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy = 0.$$

La section par le plan $xOy$ a pour équation

$$A_1x^2 + A'_1y^2 + 2B''_1xy = 0.$$

Or,

$$A_1 + A'_1 = A + A' + A'' = 0;$$

donc, les deux droites représentées par l'équation précédente sont rectangulaires.

Si la condition (1) est remplie, on peut donc placer sur le cône donné *une infinité* de trièdres trirectangles, puisque la section par le plan mené par son sommet et perpendiculaire à une quelconque de ses arêtes est composée de deux droites rectangulaires qui forment avec l'arête considérée un trièdre trirectangle placé sur le cône. Tout plan perpendiculaire à une arête et ne passant pas par le sommet coupera donc ce cône suivant une hyperbole équilatère. Un pareil cône a reçu le nom de *cône équilatère*.

331. *Remarque.* — Les conditions pour que les droites définies par les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}; \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'}; \quad \frac{x}{\alpha''} = \frac{y}{\beta''} = \frac{z}{\gamma''},$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., désignent leurs cosinus directeurs, soient sur le cône donné, sont

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \varphi(\alpha', \beta', \gamma') = 0, \quad \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 0.$$

Les conditions pour que ces droites soient rectangulaires deux à deux étant supposées remplies, si l'on ajoute membre à membre les équations (2), on obtient la condition (1). Si cette condition est remplie, on n'a plus que huit équations pour déterminer les neuf cosinus; on voit ainsi que si le pro-

blème est possible, il a une infinité de solutions. Cette méthode ne suppose pas les coefficients réels.

**332.** *Condition pour qu'on puisse mener à un cône du second degré trois plans tangents rectangulaires.* — Si l'on peut mener trois plans tangents rectangulaires à un cône du second degré, le cône supplémentaire sera équilatère et réciproquement. La condition demandée est donc (axes rectangulaires)

(3) $$a + a' + a'' = 0$$

et, si cette condition est remplie, il y aura une infinité de trièdres trirectangles circonscrits au cône proposé.

Traitons la question directement. Soient $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$, $(u_3, v_3, w_3)$ les coefficients de trois plans rectangulaires tangents au cône proposé; on a

$$F(u_1, v_1, w_1) = 0, \qquad F(u_2, v_2, w_2) = 0, \qquad F(u_3, v_3, w_3) = 0;$$

en ajoutant ces équations membre à membre et tenant compte des conditions d'orthogonalité, on obtient l'équation (3).

Si cette condition est remplie, le cône est réel. En effet, $a$, $a'$, $a''$ ayant une somme nulle ne peuvent avoir le même signe; supposons $aa' < 0$. Les plans tangents menés par l'axe des $z$ sont déterminés par l'équation

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv = 0$$

dont le premier membre est le produit de deux facteurs réels. Les plans tangents menés par l'axe des $z$ étant réels, le cône est réel. Si nous prenons pour nouveau plan des $x, y$ un plan tangent, l'équation tangentielle sera

$$a_1 u^2 + a'_1 v^2 + 2b_1 vw + 2b'_1 wu + 2b''_1 uv = 0$$

en désignant les nouvelles coordonnées par $u$, $v$, $w$. Mais la somme $a + a' + a''$, qui est un invariant, étant nulle, on a $a_1 + a'_1 = 0$; on en conclut que les plans tangents menés par l'axe des $z$ sont rectangulaires.

Il y a donc *une infinité* de trièdres trirectangles circonscrits à un cône quand la condition (3) est remplie, car les plans tangents menés à ce cône par une droite issue de son sommet et perpendiculaire à un plan tangent quelconque étant rectangulaires, forment avec le premier un trièdre trirectangle circonscrit.

**333.** *Conditions pour qu'un plan mené par le sommet d'un cône du second degré coupe ce cône suivant deux droites rectangulaires.* — Soient

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad ux + vy + wz = 0$$

les équations du cône et du plan donné, le sommet du cône étant supposé à l'origine. L'équation

$$\varphi(x, y, z) + (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z) = 0$$

est l'équation générale des cônes passant par les droites d'intersection du cône et du plan donné; il suffit, pour le prouver, d'imiter la démonstration relative à l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection d'une conique et d'une droite. Cela posé, on peut déterminer les coefficients de l'équation précédente, de façon que le cône qu'elle représente contienne la normale au plan donné, menée par le sommet, ce qui donne la condition

$$\varphi(u, v, w) + (u^2 + v^2 + w^2)(uu' + vv' + ww') = 0.$$

Il suffit alors d'écrire que le cône ainsi déterminé est équilatère; on trouve finalement

$$\varphi(u, v, w) - (u^2 + v^2 + w^2)(A + A' + A'') = 0.$$

**334.** Application. — *Trouver les plans qui coupent une quadrique suivant une hyperbole équilatère.*

Il suffira d'exprimer qu'un plan mené par le centre de la quadrique coupe son cône asymptote suivant deux droites rectangulaires; tout plan parallèle répondra à la question.

*Exemple :* la quadrique a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1;$$

la condition demandée est

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} - (u^2 + v^2 + w^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0.$$

**335.** *Conditions pour que les plans tangents menés à un cône du second degré, par une droite passant par son sommet, soient rectangulaires.*

Soit $F(u, v, w) = 0$ l'équation définissant le cône donné, ayant son sommet à l'origine; les équations de la droite donnée étant

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w},$$

il suffit d'exprimer que

$$ux + vy + wz = 0$$

représente un plan coupant le cône supplémentaire suivant deux droites rec-

tangulaires, ce qui donne la condition

$$F(u, v, w) - (u^2 + v^2 + w^2)(a + a' + a'') = 0.$$

336. *Étant donnés deux cônes du second degré, trouver la condition pour que l'un d'eux contienne trois diamètres conjugués de l'autre.*

Si deux cônes remplissent la condition demandée, en les coupant par un plan quelconque on obtiendra comme sections deux coniques dont l'une sera harmoniquement circonscrite à l'autre. Il suffit donc d'appliquer une théorie connue (I, 518, 2°).

Soient $\varphi(x, y, z) = 0$ et $\varphi_1(x, y, z) = 0$ les équations des deux cônes et

$$\Theta = A_1 a + \ldots + 2B_1 b + \ldots,$$
$$\Theta_1 = A\ a_1 + \ldots + 2B\ b_1 + \ldots;$$

$\Theta_1 = 0$ exprime que le premier cône contient une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués du second; $\Theta = 0$ exprime que le second cône contient une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués du premier.

337. Application. — Dire qu'un cône de second degré est capable d'un trièdre trirectangle revient à dire qu'il contient un système de trois diamètres conjugués du cône isotrope de même sommet. L'équation en $\lambda$ est

$$\begin{vmatrix} A+\lambda & B'' & B' \\ B'' & A'+\lambda & B \\ B' & B & A''+\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

le coefficient de $\lambda^2$ est $A + A' + A''$; la condition demandée est donc

$$A + A' + A'' = 0.$$

Pour exprimer qu'un cône est capable de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

il suffit de considérer le cône asymptote de cet ellipsoïde; l'équation en $\lambda$ est alors

$$\begin{vmatrix} A+\dfrac{\lambda}{a^2} & B'' & B' \\ B'' & A'+\dfrac{\lambda}{b^2} & B \\ B' & B & A''+\dfrac{\lambda}{c^2} \end{vmatrix} = 0;$$

le coefficient de $\lambda^2$ est $\dfrac{A}{b^2c^2} + \dfrac{A'}{c^2a^2} + \dfrac{A''}{a^2b^2}$; la condition demandée est donc

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 = 0.$$

On obtient cette condition au moyen de la transformation homographique que nous avons déjà employée (317) et définie par les formules

$$x = aX, \qquad y = bY, \qquad z = cZ.$$

La transformée de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0.$$

A trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde correspondent trois diamètres conjugués de la sphère, c'est-à-dire trois diamètres rectangulaires. Il suffira donc d'exprimer que le cône transformé du proposé, c'est-à-dire le cône ayant pour équation

$$A a^2 X^2 + A' b^2 Y^2 + A'' c^2 Z^2 + \ldots = 0,$$

est capable d'un trièdre trirectangle, ce qui donne la condition

$$A a^2 + A' b^2 + A'' c^2 = 0.$$

### Théorème de Frégier.

338. *Si un trièdre trirectangle pivote autour de son sommet situé en un point fixe d'une quadrique, le plan passant par les points d'intersection de ses arêtes et de la quadrique coupe la normale à cette quadrique au sommet du trièdre en un point fixe.*

Prenons trois axes rectangulaires, l'origine étant le point fixe donné et l'axe des $z$ la normale en ce point à la quadrique, dont l'équation aura la forme

$$\varphi(x, y, z) + z = 0.$$

Soit $ux + vy + wz - 1 = 0$ l'équation d'un plan; le cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la conique suivant laquelle ce plan coupe la quadrique, a pour équation

$$\varphi(x, y, z) + z(ux + vy + wz) = 0.$$

La condition pour que ce cône soit équilatère est

$$A + A' + A'' + w = 0.$$

Le coefficient $w$ étant constant, tous les plans qui satisfont à la condition donnée coupent l'axe des $z$ en un point fixe, ce qui démontre la proposition.

## EXERCICES.

1. Si par un point d'une quadrique on mène trois droites parallèles à trois diamètres conjugués d'une seconde quadrique, le plan qui passe par les seconds points d'intersections de ces droites et de la première quadrique passe par un point fixe (théorème de Frégier généralisé). Réciproque.

2. Lieu des points de Frégier et enveloppe des plans polaires de ces points relatifs à tous les points d'une quadrique donnée.

3. L'équation d'un cône du second degré quelconque, peut se mettre sous la forme $E + \lambda\sigma = 0$, $E = 0$ représentant un cône équilatère et $\sigma = 0$ un cône isotrope de même sommet.

4. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre d'une quadrique sur le plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués; lieu de cette perpendiculaire.

5. Former les équations tangentielles d'un cône droit du second degré, touchant trois plans donnés $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$, $(u_3, v_3, w_3)$.

6. Soient S le sommet d'un cône droit, O le point où l'axe rencontre un plan quelconque P. Démontrer qu'il existe un rapport constant entre les distances des points O et S à une tangente quelconque de la section du cône par le plan P (J. Neuberg).

7. Lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée.

8. Lieu des sommets des cônes équilatères passant par une conique et par un point donné.

9. Lieu des sommets des cônes capables d'un trièdre trirectangle circonscrit, passant par une conique donnée et tangents à un plan donné.

10. Deux systèmes de diamètres conjugués d'une quadrique à centre sont sur un cône du second degré.

11. Lieu des diamètres conjugués aux plans qui coupent un hyperboloïde suivant des hyperboles équilatères.

12. Lieu des foyers des sections d'un cône de révolution par des plans menés par une normale à ce cône.

13. On considère une section plane d'un cône quelconque, et le développement de cette section sur le plan tangent en un de ses points M. Si l'on prend pour axe des $x$ la tangente MT à la section, les équations de la section et de sa transformée, rapportées à cet axe des $x$ et chacune à un axe des $y$ perpendiculaire au premier et mené par M dans son plan respectif, soient $y = f(x)$ et $y_1 = \varphi(x)$ les équations de ces courbes et enfin $\theta$ l'angle que le

plan sécant fait avec le plan tangent au cône en M, on a

$$\cos\theta = \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

pour $x = 0$. En conclure la condition pour que M soit un point d'inflexion du développement.

14. En supposant que le cône soit de révolution, trouver l'équation du développement d'une section plane en coordonnées polaires.

# CHAPITRE XXII.

## PLANS TANGENTS (FORMES RÉDUITES). — SPHÈRE DE MONGE. — LIEU DES SOMMETS DES CÔNES DE RÉVOLUTION CIRCONSCRITS A UNE QUADRIQUE.

### ELLIPSOÏDE.

339. *Plan tangent en un point de la surface d'un ellipsoïde.* — Considérons un ellipsoïde E rapporté à ses axes et défini par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0)$ est

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

avec la condition

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0.$$

340. *Mener à un ellipsoïde un plan tangent par un point donné.* — Soient $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées du point donné P. Les coordonnées des points de contact d'un plan tangent passant par P

sont définies par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0,$$

la seconde étant celle du plan polaire du point P. Il y a donc une infinité de plans tangents issus de P, qui sont réels si la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et du plan polaire de P est réelle. Pour trouver la condition de réalité, on peut former l'équation de la projection de l'intersection sur le plan des $x$, $y$ et écrire que cette projection est réelle. Il est plus simple d'opérer ainsi : rapportons l'ellipsoïde à trois diamètres conjugués, l'axe des $x$ étant le diamètre OP; l'équation de l'ellipsoïde deviendra

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1=0.$$

Les coordonnées de P sont alors $x'=\rho$, $y'=0$, $z'=0$ et le plan polaire du point P a pour équation $\rho x'=a'^2$.

Les points de contact sont définis par l'équation précédente et celle-ci :

$$\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1-\frac{a'^2}{\rho^2}.$$

La condition de réalité est alors $\rho^2>a'^2$ ou $\frac{\rho^2}{a'^2}-1>0$;

Mais l'identité

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\equiv\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}$$

donne, pour le point P,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=\frac{\rho'^2}{a'^2}.$$

La condition demandée est donc

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1>0.$$

Cette inégalité exprime que le point P doit être *extérieur* à l'ellipsoïde. En effet, dans toute la région qui comprend le centre, la fonction $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ a le signe $-$; pour un point pris par exemple sur l'axe des $x$, à une distance du centre plus grande que $a$, ce polynome a le signe $+$.

**341.** *Plans tangents parallèles à un plan donné.* — Soit

$$ux + vy + wz = 0,$$

l'équation d'un plan; il s'agit de déterminer $r$ de façon que

$$ux + vy + wz + r = 0$$

représente un plan tangent à l'ellipsoïde donné. Pour cela, identifions cette équation avec l'équation du plan tangent en un point $(x_0, y_0, z_0)$,

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{x_0}{a^2 u} = \frac{y_0}{b^2 v} = \frac{z_0}{c^2 w} = -\frac{1}{r},$$

d'où

$$\frac{x_0}{a} = -\frac{au}{r}, \qquad \frac{y_0}{b} = -\frac{bv}{r}, \qquad \frac{z_0}{c} = -\frac{cw}{r}.$$

On obtient ainsi les coordonnées du pôle du plan $(u, v, w, r)$; pour que ce plan soit tangent, il faut et il suffit que le pôle soit sur l'ellipsoïde, ce qui détermine $r$ :

$$r^2 = a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2,$$

Cette équation est l'équation tangentielle de l'ellipsoïde.

L'équation demandée est donc

$$ux + vy + wz = \varepsilon\sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}.$$

On peut donc mener à un ellipsoïde réel deux plans tangents parallèles à un plan quelconque $(u, v, w)$ et les points de contact, qui sont diamétralement opposés, ont pour coordonnées

$$x_0 = \varepsilon \frac{a^2 u}{\sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}},$$

$$y_0 = \varepsilon \frac{b^2 v}{\sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}},$$

$$z_0 = \varepsilon \frac{c^2 w}{\sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}},$$

**342.** Sphère de Monge. — *Circonscrire à un ellipsoïde un trièdre trirectangle.*

Il s'agit de déterminer neuf cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ et les coordonnées $x, y, z$ d'un point, tels que l'on ait

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \varepsilon_1\sqrt{a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2},$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \varepsilon_2\sqrt{a^2\alpha_2^2 + b^2\beta_2^2 + c^2\gamma_2^2},$$
$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \;{}_3\sqrt{a^2\alpha_3^2 + b^2\beta_3^2 + c^2\gamma_3^2};$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \qquad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0,$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0.$$

Ces neuf équations ne sont compatibles que si

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

On obtient, en effet, cette équation en ajoutant membre à membre les trois premières équations, après élévation des deux membres au carré.

Si le point $(x, y, z)$ n'est pas sur la sphère représentée par l'équation précédente, il est impossible de mener par ce point à l'ellipsoïde donné trois plans tangents rectangulaires deux à deux. Si la condition est remplie, les équations données se réduisent à huit. On peut, d'ailleurs, se rendre compte *a priori* de l'existence d'un lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde.

En effet, considérons un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; ce cylindre est elliptique; les plans tangents à l'ellipsoïde, menés par une parallèle aux génératrices du cylindre, issue d'un quelconque des points du cercle de Monge relatif à une section droite de ce cylindre, sont rectangulaires, et il n'y a plus qu'à mener à l'ellipsoïde des plans tangents perpendiculaires aux génératrices, pour obtenir ainsi une infinité de trièdres trirectangles circonscrits dont les sommets sont sur deux cercles. Le lieu demandé est engendré par ces cercles, quand la direction des génératrices varie. Il résulte de ce qui précède que le lieu cherché est une sphère, qu'on nomme *sphère de Monge*, relative à cet ellipsoïde.

*Autre méthode.* — Proposons-nous de former l'équation du cône supplémentaire du cône circonscrit à l'ellipsoïde, ayant pour sommet un point donné $M(x_1, y_1, z_1)$. Écrivons qu'un plan tangent passe par ce point :

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = \sqrt{a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2}.$$

La perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur le plan tangent considéré a pour équations

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w};$$

on en déduit immédiatement que le cône supplémentaire du cône circonscrit de sommet M et ayant pour sommet le centre de l'ellipsoïde a pour équation

$$(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Pour que l'on puisse mener à l'ellipsoïde donné, par le point M, trois plans tangents deux à deux rectangulaires, il faut et il suffit que le premier cône soit capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, et, par suite, que le second cône soit équilatère, ce qui donne immédiatement cette condition que le point M doit être sur la sphère définie par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

On voit ainsi que chaque point de la *sphère de Monge* est le sommet d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde.

Le centre de la sphère de Monge coïncide avec le centre de l'ellipsoïde, et le carré de son rayon est égal à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipsoïde.

**343.** *Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à un ellipsoïde.* — Si un cône C est de révolution, tout cône C′ supplémentaire du premier est aussi de révolution, car les plans tangents au cône C faisant des angles égaux avec l'axe de révolution, les génératrices du cône C′ font des angles égaux avec la parallèle à l'axe de C menées par le sommet de C′ et réciproquement. D'après cela, pour exprimer que le point M $(x_1, y_1, z_1)$ est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à l'ellipsoïde E, il suffit d'exprimer que le cône supplémentaire ayant, par exemple, pour sommet le centre de E, est de révolution. Nous avons obtenu l'équation de ce cône; en la développant, on obtient

$$x^2(x_1^2 - a^2) + y^2(y_1^2 - b^2) + z^2(z_1^2 - c^2) \\ + 2y_1z_1yz + 2z_1x_1zx + 2x_1y_1xy = 0.$$

Il faut nécessairement que le coefficient d'un rectangle soit nul, sans quoi, en égalant les nombres de Jacobi, on trouverait

$$-a^2 = -b^2 = -c^2.$$

Supposons donc, par exemple, $B = B' = 0$; pour cela, il suffit de poser $z_1 = 0$, et ensuite

$$(x_1^2 - a^2 + c^2)(y_1^2 - b^2 + c^2) - x_1^2 y_1^2 = 0.$$

On obtient ainsi un premier lieu défini par les équations

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

On trouve deux autres solutions :

$$x = 0, \qquad \frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0,$$

$$y = 0, \qquad \frac{z^2}{c^2 - b^2} + \frac{x}{a^2 - b^2} - 1 = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc de trois coniques situées dans les plans principaux, concentriques et coaxiales aux coniques principales. Ces coniques ont reçu le nom de *focales;* nous en verrons plus loin la raison. Si l'on suppose $a > b > c$, la focale située dans le plan des $y, z$ est une ellipse imaginaire; celle qui est dans le plan des $x, y$ est une ellipse réelle située entièrement à l'intérieur de l'ellipsoïde, et, enfin, la troisième est une hyperbole dont la partie extérieure à l'ellipsoïde est le lieu des sommets des cônes de révolution réels circonscrits à l'ellipsoïde.

## HYPERBOLOÏDES.

**344.** *Plan tangent en un point d'un hyperboloïde.* — Considérons un hyperboloïde à une ou à deux nappes, rapporté à ses axes de symétrie. L'équation du plan tangent en un point $(x_0, y_0, z_0)$ de cette surface est

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = \varepsilon,$$

avec la condition

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \varepsilon.$$

**345.** *Mener à un hyperboloïde un plan tangent par un point donné.* — Soient $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées du point donné P. Les coordonnées des points de contact des plans tangents issus de P sont définies par les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon, \qquad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = \varepsilon.$$

Pour discuter ce système d'équations, nous distinguerons deux cas.

Premier cas : *Hyperboloïde à une nappe.* — Rapportons la surface à trois diamètres conjugués, l'axe des $x$ étant le diamètre OP. Il y a plusieurs hypothèses à faire :

1° OP *est un diamètre réel;* l'équation étant

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

les coordonnées de P sont $x' = \rho$, $y' = 0$, $z' = 0$; les équations de la courbe de contact sont :

$$\rho x' = a'^2, \qquad \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} = 1 - \frac{a'^2}{\rho^2}.$$

La seconde équation étant celle d'une hyperbole, on voit que le cône de sommet P, ayant cette hyperbole pour directrice, est toujours réel; si $\rho' = \pm a'$, le point est sur la surface et le cône se réduit au plan tangent en P, comme on le voit aisément.

2° OP *est un diamètre imaginaire;* nous pouvons poser $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$, les équations de la courbe de contact sont alors

$$\rho z' = -c'^2, \qquad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1 + \frac{c'^2}{\rho^2}.$$

On voit que le cône circonscrit de sommet P est encore réel.

3° OP *est une génératrice du cône asymptote.* Prenons pour axes des $x$ et des $y$ deux génératrices du cône asymptote, l'axe des $z$ étant l'intersection des plans tangents menés le long de ces génératrices; l'équation de la surface sera de la forme

$$z^2 + 2Bxy = 1.$$

Nous pouvons supposer le point P sur l'axe des $x$ : $x = \rho$, $y = 0$, $z = 0$. Le plan polaire de P a pour équation

$$B\rho y = 1;$$

il coupe donc l'hyperboloïde suivant une parabole; dans ce cas encore, le cône de sommet P est réel.

Deuxième cas : *Hyperboloïde à deux nappes.* — 1° OP *est un*

*diamètre réel.* L'équation de la surface étant

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=-1.$$

nous supposerons $x'=0$, $y'=0$, $z'=\rho$. La courbe de contact du cône circonscrit de sommet P, a pour équations

$$\rho z'=c'^2, \qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=\frac{c'^2}{\rho'^2}-1.$$

Cette courbe est réelle si l'on suppose $\rho'^2<c'^2$ ou $-\frac{\rho'^2}{c'^2}+1>0$; c'est-à-dire si le point P est *extérieur* à la surface. La condition trouvée équivaut d'ailleurs à

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}+1>0.$$

elle exprime que P doit être dans la même région que le centre.

2° OP *est un diamètre imaginaire.* Nous pouvons supposer, par exemple $x'=\rho$, $y'=0$, $z'=0$, alors les équations de la courbe de contact sont

$$\rho x'=a'^2, \qquad \frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=-1-\frac{a'^2}{\rho'^2}.$$

Cette courbe est une hyperbole, elle est donc réelle.

3° OP *est une génératrice du cône asymptote.* La conclusion est alors la même que pour l'hyperboloïde à une nappe.

**346.** *Plan tangent parallèle à un plan donné.* — On obtient

$$ux+vy+wz=\pm\sqrt{a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2}$$

pour l'hyperboloïde à une nappe et

$$ux+vy+wz=\pm\sqrt{c^2w^2-a^2u^2-b^2v^2}$$

pour l'hyperboloïde à deux nappes. On voit ainsi que l'on peut toujours mener, à l'un des deux hyperboloïdes conjugués seulement, deux plans tangents parallèles à un plan donné.

Proposons-nous d'interpréter l'inégalité

$$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2>0 \quad \text{ou} \quad <0.$$

Pour cela, considérons le système

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad ux+vy+wz=0$$

Si $w=0$, on a $a^2u^2+b^2v^2>0$, et le plan sécant coupe le cône suivant deux génératrices réelles. Supposons $w\neq 0$; la projection sur le plan des $x$, $y$ de l'intersection du cône et du plan $(u, v, w)$ a pour équation

$$x^2\left(\frac{w^2}{a^2}-\frac{u^2}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{w^2}{b^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{2uv}{c^2}xy=0.$$

La condition de réalité est

$$\frac{u^2v^2}{c^4}-\left(\frac{w^2}{a^2}-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\frac{w^2}{b^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)>0,$$

ou, en simplifiant,

$$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2>0.$$

Donc pour qu'on puisse mener à un hyperboloïde deux plans tangents parallèles à un plan donné, il faut et il suffit que le plan parallèle au plan donné, mené par le centre de l'hyperboloïde, coupe le cône asymptote suivant deux droites réelles, s'il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe, suivant deux droites imaginaires dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes.

Si le plan est parallèle à un plan asymptote, il n'y a plus qu'une solution limite, qui est ce plan asymptote lui-même.

**347.** *Sphère de Monge.* — L'équation de la sphère de Monge est

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$$

pour l'hyperboloïde à une nappe et

$$x^2+y^2+z^2=c^2-a^2-b^2$$

pour l'hyperboloïde à deux nappes.

Étant donné deux hyperboloïdes conjugués, l'un d'eux seulement possède une sphère de Monge; c'est l'hyperboloïde à une nappe si $a^2+b^2>c^2$.

Lorsque $a^2+b^2=c^2$, la sphère de Monge se réduit à son centre.

348. *Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits.* — On trouve encore trois coniques situées dans les plans principaux. Il suffit, pour passer du cas de l'ellipsoïde à celui de l'hyperboloïde à une nappe, de changer $c^2$ en $-c^2$ et pour l'hyperboloïde à deux nappes $a^2$ et $b^2$ en $-a^2$ et $-b^2$.

## PARABOLOÏDES.

349. *Équation du plan tangent en un point d'un paraboloïde.* — Nous supposons le paraboloïde rapporté à ses deux plans principaux et au plan tangent en son sommet; son équation étant alors

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x,$$

le plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$\frac{yy_0}{p} + \frac{zz_0}{q} = x + x_0,$$

avec la condition

$$\frac{y_0^2}{p} + \frac{z_0^2}{q} = 2x_0.$$

350. *Mener à un paraboloïde un plan tangent par un point donné.* — La courbe de contact du cône circonscrit de sommet donné $(x_1, y_1, z_1)$ a pour équations

$$\frac{yy_1}{p} + \frac{zz_1}{q} = x + x_1, \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x;$$

on peut remplacer la seconde équation par celle-ci

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\left(\frac{yy_1}{p} + \frac{zz_1}{q} - x_1\right),$$

qui représente un cylindre. Si l'on suppose $pq < 0$, c'est-à-dire si le paraboloïde est hyperbolique, ce cylindre est lui-même hyperbolique. On peut donc mener à un paraboloïde hyperbolique une infinité de plans tangents par un point donné. Si l'on suppose $pq > 0$, pour fixer les idées supposons $p > 0$, $q > 0$; dans ce cas, le cylindre obtenu est elliptique; en écrivant son équation sous la forme

$$\frac{1}{p}(y - y_1)^2 + \frac{1}{q}(z - z_1)^2 = \frac{y_1^2}{p} + \frac{z_1^2}{q} - 2x_1,$$

on voit que la condition de réalité est

$$\frac{y_1^2}{p} + \frac{z_1^2}{q} - 2x_1 > 0.$$

Cette inégalité définit la *région extérieure* au paraboloïde elliptique considéré.

351. *Plan tangent parallèle à un plan donné.* — Identifions les deux équations

$$\frac{yy_0}{p} + \frac{zz_0}{q} - x - x_0 = 0,$$
$$ux + vy + wz + r = 0,$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{u} = \frac{y_0}{pv} = \frac{z_0}{qw} = -\frac{x_0}{r},$$

d'où

$$x_0 = \frac{r}{u}, \qquad y_0 = -\frac{pv}{u}, \qquad z_0 = -\frac{qw}{u}.$$

On obtient ainsi les coordonnées du pôle du plan $(u, v, w, r)$; pour que ce plan soit tangent, il faut et il suffit que son pôle soit sur la surface ou sur le plan lui-même, ce qui donne la condition

$$r = \frac{pv^2}{2u} + \frac{qw^2}{2u},$$

on obtient aussi l'équation tangentielle

$$pv^2 + qw^2 = 2ru.$$

L'équation d'un plan tangent peut se mettre sous la forme

$$ux + vy + wz + \frac{pv^2 + qw^2}{2u} = 0.$$

On peut mener à un paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné, pourvu que ce plan ne soit pas parallèle à l'axe du paraboloïde.

352. *Plan de Monge.* — Soient $(x_1, y_1, z_1)$ les coordonnées d'un point M. Si un plan tangent au paraboloïde passe par M, on a

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + \frac{1}{2u}(pv^2 + qw^2) = 0,$$

on en déduit l'équation du cône ayant son sommet à l'origine, et supplémentaire du cône circonscrit de sommet M, savoir

$$x(xx_1 + yy_1 + zz_1) + \tfrac{1}{2}(py^2 + qz^2) = 0.$$

Ce cône est équilatère si

$$x_1 + \tfrac{1}{2}(p + q) = 0.$$

Donc chacun des points de ce plan est le sommet d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits au paraboloïde donné. Ce plan a reçu le nom de *plan de Monge*.

353. *Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits.* — Écrivons que le cône dont nous venons de former l'équation est de révolution, nous trouverons ainsi pour le lieu cherché les deux paraboles ayant pour équations

$$y = 0, \qquad z^2 = (p - q)(2x + p),$$
$$z = 0, \qquad y^2 = (q - p)(2x + q).$$

## EXERCICES.

1. Établir les équations relatives à un paraboloïde (349-353), en considérant cette surface comme limite d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde.

2. Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les fâces sont parallèles à un système de plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde A et tangentes à un second ellipsoïde B. (Concours général, 1860.)

3. Un plan tangent à un ellipsoïde détermine, avec les plans principaux, un tétraèdre dont le volume est constant; trouver le lieu du point de contact.

4. Mener par un point pris sur l'un des axes d'un ellipsoïde le plan tangent qui détermine, avec les plans principaux, le tétraèdre de volume minimum. (T.)

5. Trouver le lieu du point de concours de trois plans rectangulaires deux à deux et touchant chacun l'un des trois ellipsoïdes ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+h^2} + \frac{y^2}{b^2+h^2} + \frac{z^2}{c^2+h^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+k^2} + \frac{y^2}{b^2+k^2} + \frac{z^2}{c^2+k^2} = 1. \qquad \text{(T.)}$$

6. Si une corde d'un ellipsoïde passe par un point fixe, l'intersection des plans tangents aux extrémités de la corde décrit un plan fixe.

7. Trouver le volume d'un cylindre circonscrit à un ellipsoïde et limité aux deux plans tangents parallèles à la courbe de contact.

8. On considère un cylindre circonscrit à un ellipsoïde et l'on mène les plans tangents à l'ellipsoïde aux extrémités du diamètre parallèle à l'axe du cylindre; un diamètre quelconque de l'ellipsoïde coupe l'ellipsoïde, les plans tangents et le cylindre en des points dont les distances au centre sont $h$, $k$, $l$; prouver que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}. \qquad \text{(T.)}$$

9. On circonscrit un cône à un ellipsoïde; soient R′ la distance de son sommet au centre de l'ellipsoïde, 2R la longueur du diamètre de l'ellipsoïde qui passe par le sommet du cône. Supposons menés les plans tangents à l'ellipsoïde aux extrémités de ce diamètre. Un diamètre quelconque coupe l'ellipsoïde, les plans tangents considérés et le cône en des points dont les distances au centre sont $h$, $k$, $l$. Prouver que

$$\left(\frac{1}{Rl} - \frac{1}{R'k}\right)^2 = \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right)\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad \text{(T.)}$$

10. On mène un plan tangent à un ellipsoïde à une distance donnée du centre; trouver les projections sur les plans principaux de la courbe, lieu des points de contact. Dans quels cas l'une des projections se réduit-elle à deux droites? (T.)

11. Une tangente à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ rencontre l'axe des $z$ et une courbe tracée dans le plan des $x$, $y$. Lieu engendré par cette droite. Exemple, la courbe a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2. \qquad \text{(T.)}$$

12. Lieu des perpendiculaires aux plans tangents communs à deux ellipsoïdes ayant même centre et mêmes directions d'axes, ces perpendiculaires étant abaissées du centre commun.

13. Montrer que les deux surfaces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\gamma^2}{z^2} = 1$$

se touchent en huit points, si

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 1,$$

et que les plans tangents en ces points forment un solide ayant pour volume $\frac{4(abc)^{\frac{2}{3}}}{3(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}}}$.

14. En chacun des points d'un ellipsoïde, on mène le plan tangent. On projette sur ce plan le diamètre issu du point de contact. Démontrer que ces projections, déjà tangentes à l'ellipsoïde, sont tangentes, en outre, à une seconde surface. (MANNHEIM.)

# CHAPITRE XXIII.

## NORMALES.

### ELLIPSOÏDES.

354. *Normales menées par un point à un ellipsoïde.* — Soit

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

l'équation d'un ellipsoïde E rapporté à ses axes de symétrie. La normale en un point $(x, y, z)$ de la surface de cet ellipsoïde, a pour équations

(2) $$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z}.$$

Les coordonnées des pieds des normales issues du point P $(\alpha, \beta, \gamma)$ sont déterminées par l'équation (2) et les équations

$$\frac{a^2(\alpha-x)}{x}=\frac{b^2(\beta-y)}{y}=\frac{c^2(\gamma-z)}{z}.$$

Les points communs à l'ellipsoïde E et aux cylindres représentés par ces équations sont les pieds des normales issues du point P.

Il est intéressant de remarquer que l'équation

$$\frac{a^2(\alpha-x)}{x}=\frac{b^2(\beta-y)}{y}$$

représente, dans le plan des $x, y$, l'hyperbole d'Apollonius relative à la projection $(\alpha, \beta)$ du point P sur ce plan et à la section principale correspondante, bien que la projection d'une normale à E issue de P ne soit pas normale à la section principale.

On a l'explication de ce résultat en se rappelant la propriété de l'hyperbole d'Apollonius, énoncée t. II, p. 209, n° 4.

On tire des équations (2), en désignant par $\lambda$ la valeur commune des rapports,

$$(3) \qquad x = \frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2+\lambda}, \qquad z = \frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda}.$$

Ces équations définissent une cubique; les pieds des normales sont à l'intersection de cette cubique et de l'ellipsoïde E; ils correspondent aux valeurs de $\lambda$ qui sont racines de l'équation

$$F(\lambda) \equiv \frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2+\lambda)^2} - 1 = 0,$$

équation obtenue en écrivant que les coordonnées $(x, y, z)$ définies par les équations (3) sont celles d'un point de E.

L'équation $F(\lambda) = 0$ est du 6$^e$ degré et, à chaque racine, correspond une normale à E, issue de P. En outre, si l'on suppose $a > b > c$, on reconnaît immédiatement que cette équation a toujours une racine réelle entre $-\infty$ et $-a^2$ et une entre $-c^2$ et $+\infty$ : donc, *d'un point donné, on peut mener à un ellipsoïde six normales dont deux au moins sont réelles*. (Pour la discussion complète de l'équation $F(\lambda) = 0$, voir *Nouvelles Annales*, 1870, p. 481, Joachimsthal.)

355. *Étude de la cubique des normales.* — La courbe représentée par les équation (3) est du troisième ordre; on voit, en effet, que les points de rencontre de cette courbe et d'un plan quelconque sont déterminés par une équation de la forme

$$u\,\frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda} + v\,\frac{b^2\beta}{b^2+\lambda} + w\,\frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda} + r = 0.$$

Les équations (3) donnent pour $\lambda$ infini : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Pour $\lambda = 0$, on trouve $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$. Pour $\lambda = -a^2$, $x$ est infini, $y$ et $z$ ayant des valeurs finies; de même pour $\lambda = -b^2$, $y$ est infini et, pour $\lambda = -c^2$, $z$ est infini. On voit ainsi que la cubique passe par le centre de l'ellipsoïde et par le point P et, enfin, qu'elle a trois asymptotes parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

Nous savons déjà que le cône ayant pour sommet un point quelconque d'une cubique et, pour directrice, cette cubique même, est du second degré; en particulier, la cubique (3) passant par le centre de l'ellipsoïde, par le point P et par les pieds des normales issues de P, il en résulte que les six normales issues de P sont sur un cône du second degré et les droites joignant

le centre de l'ellipsoïde aux pieds de ces normales sont aussi sur un cône du second degré. Nous allons former les équations de ces cônes.

Écrivons ainsi les équations (3) :

$$a^2+\lambda = \frac{a^2\alpha}{x}, \qquad b^2+\lambda = \frac{b^2\beta}{y}, \qquad c^2+\lambda = \frac{c^2\gamma}{z}.$$

Multiplions les deux membres de ces équations respectivement par $b^2-c^2$, $c^2-a^2$, $a^2-b^2$ et ajoutons : il vient

$$\frac{a^2\alpha(b^2-c^2)}{x} + \frac{b^2\beta(c^2-a^2)}{y} + \frac{c^2\gamma(a^2-b^2)}{z} = 0$$

ou, sous forme entière,

$$a^2\alpha(b^2-c^2)yz + b^2\beta(c^2-a^2)zx + c^2\gamma(a^2-b^2)xy = 0.$$

On a ainsi l'équation du cône ayant pour sommet le centre de l'ellipsoïde et passant par les pieds des normales. On voit que ce cône a pour génératrices les axes de symétrie de l'ellipsoïde; par suite, il est équilatère.

Plus généralement, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en prenant pour origine un point quelconque de la cubique, celui qui correspond à une valeur déterminée $\lambda'$ du paramètre et qui a, par conséquent, pour coordonnées

$$x' = \frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda'}, \qquad y' = \frac{b^2\beta}{b^2+\lambda'}, \qquad z' = \frac{c^2+\lambda'}{c^2\gamma}.$$

En posant

$$x = x'+X, \qquad y = y'+Y, \qquad z = z'+Z,$$

on a

$$X = \frac{a^2\alpha(\lambda'-\lambda)}{(a^2+\lambda)(a^2+\lambda')}, \qquad Y = \frac{b^2\beta(\lambda'-\lambda)}{(b^2+\lambda)(b^2+\lambda')}, \qquad Z = \frac{c^2\gamma(\lambda'-\lambda)}{(c^2+\lambda)(c^2+\lambda')},$$

d'où l'on tire

$$a^2+\lambda = \frac{a^2\alpha(\lambda'-\lambda)}{(a^2+\lambda')X}, \qquad b^2+\lambda = \frac{b^2\beta(\lambda'-\lambda)}{(b^2+\lambda')Y}, \qquad c^2+\lambda = \frac{c^2\gamma(\lambda'-\lambda)}{(c^2+\lambda')Z};$$

en procédant comme plus haut, on obtient

$$\frac{a^2\alpha(b^2-c^2)}{a^2+\lambda'}YZ + \frac{b^2\beta(c^2-a^2)}{b^2+\lambda'}ZX + \frac{c^2\gamma(a^2-b^2)}{c^2+\lambda'}XY = 0;$$

c'est l'équation d'un cône équilatère. Ce résultat est évident *a priori* puisque le cône doit passer par les points à l'infini de la cubique et, par suite, doit admettre des génératrices parallèles aux axes de l'ellipsoïde. En particulier, si $\lambda' = 0$, on a l'équation du cône des normales sous la forme

$$\alpha(b^2-c^2)YZ + \beta(c^2-a^2)ZX + \gamma(a^2-b^2)XY = 0$$

ou, par rapport aux anciens axes,

$$\alpha(b^2-c^2)(y-\beta)(z-\gamma)$$
$$+\beta(c^2-a^2)(z-\gamma)(x-\alpha)+\gamma(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Ce cône passe par le centre de l'ellipsoïde, ce qui était évident *a priori* puisque la cubique des normales y passe.

*Remarque.* — La cubique représentée par les équations (3) est *unicursale;* il en est de même de toute cubique gauche. En effet, si l'on considère deux points fixes (A, B) pris sur cette cubique, la position d'un plan passant par la droite AB dépend d'un seul paramètre $\lambda$; or ce plan ne coupe la cubique qu'en un seul point M différent de A et de B; les coordonnées de M sont donc des fonctions rationnelles de $\lambda$.

## Pôle normal et pôle tangentiel d'un plan. — Surface normopolaire. Synnormale. — Formules de Desboves.

356. Le pôle du plan passant par les pieds de trois des normales issues du point P est sur une surface trouvée par Desboves et qu'il a nommée la *surface normopolaire* de l'ellipsoïde donné. Soit $M(x_1, y_1, z_1)$ le pôle du plan passant par les pieds A, B, C de trois des normales et soit $M'(x_2, y_2, z_2)$ le pôle du plan passant par les pieds A', B', C' des trois autres normales. Le plan ABC ayant pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0,$$

les valeurs de $\lambda$ qui correspondent aux trois pieds A, B, C sont les racines de l'équation

$$\frac{\alpha x_1}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y_1}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma z_1}{c^2+\lambda}-1=0.$$

Pareillement, les valeurs de $\lambda$ qui correspondent aux trois autres pieds A', B', C' sont les racines de l'équation

$$\frac{\alpha x_2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y_2}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma z_2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

En raisonnant comme dans le cas d'une ellipse (II, 154), on en conclut l'identité

$$1-\frac{a^2\alpha}{(a^2+\lambda)^2}-\frac{b^2\beta}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{c^2\gamma}{(c^2+\lambda)^2}$$
$$\equiv\left(\frac{\alpha x_1}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y_1}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma z_1}{c^2+\lambda}-1\right)\left(\frac{\alpha x_2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y_2}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma z_2}{c^2+\lambda}-1\right).$$

En décomposant le second membre en fractions simples et identifiant au

premier, et en supposant que le point P ne soit pas dans un plan principal, on obtient les relations suivantes :

$$(4)\qquad x_1 x_2 = -a^2, \qquad y_1 y_2 = -b^2, \qquad z_1 z_2 = -c^2,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + \dfrac{\beta(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{a^2 - b^2} + \dfrac{\gamma(x_1 z_2 + z_1 x_2)}{a^2 - c^2} = 0, \\ y_1 - y_2 + \dfrac{\gamma(y_1 z_2 + z_1 y_2)}{b^2 - c^2} + \dfrac{\alpha(y_1 x_2 + x_1 y_2)}{b^2 - a^2} = 0, \\ z_1 - z_2 + \dfrac{\alpha(z_1 x_2 + x_1 z_2)}{c^2 - a^2} + \dfrac{\beta(z_1 y_2 + y_1 z_2)}{c^2 - b^2} = 0. \end{cases}$$

En posant

$$\frac{y_1 z_2 + z_1 y_2}{b^2 - c^2} = \mathrm{A}, \qquad \frac{z_1 x_2 + x_1 z_2}{c^2 - a^2} = \mathrm{B}, \qquad \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{a^2 - b^2} = \mathrm{C},$$

les équations (5) peuvent s'écrire

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \beta \mathrm{C} - \gamma \mathrm{B} = 0, \\ y_1 + y_2 + \gamma \mathrm{A} - \alpha \mathrm{C} = 0, \\ z_1 + z_2 + \alpha \mathrm{B} - \beta \mathrm{A} = 0. \end{cases}$$

En général, ces équations en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne sont pas compatibles; si l'on multiplie par A, B, C et qu'on ajoute membre à membre, on obtient

$$\mathrm{A}(x_1 + x_2) + \mathrm{B}(y_1 + y_2) + \mathrm{C}(z_1 + z_2) = 0;$$

et, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs et $x_2$, $y_2$, $z_2$ par $-\dfrac{a^2}{x_1}$, $-\dfrac{b^2}{y_1}$, $-\dfrac{c^2}{z_1}$, on voit que le point M doit être sur la surface du quatrième degré ayant pour équation

$$(7)\qquad (x^2 - a^2)\frac{c^2 y^2 + b^2 z^2}{b^2 - c^2} + (y^2 - b^2)\frac{a^2 z^2 + c^2 x^2}{c^2 - a^2} + (z^2 - c^2)\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 - b^2} = 0.$$

La symétrie de la définition des points M et M′ montre que le point M′ doit être sur la même surface, qui est précisément la *surface normopolaire* de Desboves.

Si le point M est sur cette surface, les équations (6), dans lesquelles on tient compte des équations (4), se réduisent à deux et, dans ce cas, il y a une infinité de points P, situés sur une droite nommée *synnormale relative à* M ou encore *synnormale du plan polaire de* M.

Ainsi, *étant donné un point* M *sur la surface normopolaire, on peut trouver sur la conique, intersection de l'ellipsoïde* E *par le plan polaire de* M, *une infinité de systèmes de trois points* A, B, C, *tels que les normales à* E *en ces points aillent concourir en un même point* P, *et le*

*lieu de ces points* P, *correspondant à tous les systèmes de points* A, B, C, *est la synnormale relative au point* M.

Si l'on se donne le point M, le plan polaire de M' a pour équation

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}+1=0;$$

il passe donc par les projections sur les axes du symétrique de M par rapport au centre de l'ellipsoïde (Joachimsthal).

### HYPERBOLOÏDES.

**357.** On obtient des résultats analogues à ceux de l'ellipsoïde; il suffit de changer dans les calculs précédents $c^2$ en $-c^2$ ou $a^2$ et $b^2$ en $-a^2$ et $-b^2$.

### PARABOLOÏDES.

**358.** *Normales menées par un point à un paraboloïde.* — Les équations de la normale en un point du paraboloïde défini par l'équation

(1) $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$$

étant

$$\frac{X-x}{-1}=p\frac{Y-y}{y}=q\frac{Z-z}{z},$$

les pieds des normales à ce paraboloïde, issues d'un point P($\alpha$, $\beta$, $\gamma$), sont déterminés par l'équation (1) et les équations

(2) $$\frac{\alpha-x}{-1}=p\frac{\beta-y}{y}=q\frac{\gamma-z}{z}.$$

En appelant $\lambda$ la valeur commune de ces rapports, on en déduit

$$x=\alpha+\lambda,\qquad y=\frac{p\beta}{p+\lambda},\qquad z=\frac{q\gamma}{q+\lambda}.$$

Ces équations définissent une cubique.

On déduit facilement des équations précédentes l'équation du cône des normales. En effet, si l'on pose

$$x=\alpha+X,\qquad y=\beta+Y,\qquad z=\gamma+Z,$$

on obtient

$$X = \lambda, \qquad Y = \frac{-\lambda\beta}{p+\lambda}, \qquad Z = \frac{-\lambda\gamma}{q+\lambda};$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\lambda}{X} = 1, \qquad \frac{\lambda\beta}{Y} = -(p+\lambda), \qquad \frac{\lambda\gamma}{Z} = -(q+\lambda).$$

En multipliant les deux membres de ces équations respectivement par $p-q$, $1$, $-1$ et ajoutant ensuite, membre à membre, on obtient

$$\frac{p-q}{X} + \frac{\beta}{Y} - \frac{\gamma}{Z} = 0,$$

ou, en revenant aux axes primitifs,

$$(p-q)(y-\beta)(z-\gamma) + \beta(z-\gamma)(x-\alpha) - \gamma(x-\alpha)(y-\beta) = 0.$$

Les pieds des normales issues de P sont les points communs à cette cubique et au paraboloïde; les valeurs de $\lambda$ correspondantes sont les racines de l'équation

$$(3) \qquad \frac{p\beta^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{q\gamma^2}{(q+\gamma)^2} - 2(\alpha+\lambda) = 0.$$

Cette équation étant du cinquième degré, on voit qu'on ne peut mener d'un point donné que cinq normales à un paraboloïde. La sixième est la parallèle à l'axe, si l'on regarde le paraboloïde comme limite d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes.

359. *Quadrique de révolution passant par les pieds des normales issues de* P. — En écrivant ainsi les équations (2)

$$\frac{\alpha - x}{-1} = \frac{\beta - y}{\left(\frac{y}{p}\right)} = \frac{\gamma - z}{\left(\frac{z}{q}\right)}$$

et multipliant les deux termes de ces rapports respectivement par $2x$, $y$, $z$, on voit que la somme des dénominateurs est nulle; il en est donc de même de celle des numérateurs, ce qui prouve que les pieds des normales issues de P sont sur la quadrique de révolution, ayant pour équation

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - \beta y - \gamma z = 0,$$

dont l'axe est la parallèle à l'axe du paraboloïde menée par le point ayant pour coordonnées $\alpha$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, c'est-à-dire par le milieu de la perpendiculaire abaissée du point P sur l'axe du paraboloïde.

360. *Pôle normal et pôle tangentiel d'un plan. — Surface normopolaire. — Synnormale. — Formules de Desboves.* — En regardant le paraboloïde elliptique comme limite d'un ellipsoïde et le paraboloïde hyperbolique comme limite d'un hyperboloïde à deux nappes, on peut déduire des formules de Desboves, relatives aux quadriques à centre, des formules analogues relatives aux paraboloïdes.

En partant de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et posant $x = X - a$, puis $\frac{b^2}{a} = p$, $\frac{c^2}{a} = q$, et faisant grandir $a$ indéfiniment, on obtient, à la limite,

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2X=0.$$

Dans les formules (5), (6) et (7) relatives à l'ellipsoïde (page 339), remplaçons $x_2, y_2, z_2$ par $-\frac{a^2}{x_1}$, $-\frac{b^2}{y_1}$, $-\frac{c^2}{z_1}$, puis $x_1$ par $x_1 - a$ et $\alpha$ par $\alpha - a$, et posons $b^2 = pa$, $c^2 = qa$ et enfin faisons croître indéfiniment $a$, nous obtiendrons, à la limite, les équations

$$\begin{gathered}2(pz^2+qy^2)x+(p-q)[2qy^2-2pz^2+pq(p-q)]=0,\\ 2pxz\alpha+(2pz^2-2qy^2+qp^2-pq^2)\gamma=2xz(2y^2-px+p^2),\\ 2qxy\alpha+(2qy^2-2pz^2+pq^2-qp^2)\beta=2xy(2z^2-qx+q^2),\\ p\beta z_1+q\gamma y_1=-2x_1y_1z_1.\end{gathered}$$

La première est l'équation de la surface normopolaire et les trois autres représentent la synnormale relative à un point $(x, y, z)$ de la surface normopolaire; ces équations en $\alpha, \beta, \gamma$ se réduisent en effet à deux, si $x, y, z$ sont les coordonnées d'un point de cette surface.

*Calcul direct.* — On peut obtenir ces formules par un calcul direct, que nous allons indiquer rapidement.

Si $x_1, y_1, z_1$ sont les coordonnées du pôle du plan mené par les pieds de trois des normales issues du point P $(\alpha, \beta, \gamma)$, ce plan a pour équation

$$\frac{yy_1}{p}+\frac{zz_1}{q}-x-x_1=0$$

et, par suite, trois des racines de l'équation (3) vérifient l'équation

$$(4)\qquad \frac{y_1\beta}{p+\lambda}+\frac{z_1\gamma}{q+\lambda}-\alpha-x_1-\lambda=0.$$

Si l'on représente par

$$vy+wz+1=0$$

l'équation du plan mené par les pieds des deux autres normales, parallèle-

ment à l'axe du paraboloïde (c'est-à-dire du plan mené par les pieds des trois autres normales), les deux autres racines de l'équation (3) sont les racines de l'équation

$$\frac{vp\beta}{p+\lambda}+\frac{wq\gamma}{q+\lambda}+1=0;$$

on doit donc avoir identiquement

$$\frac{p\beta^2}{(p+\lambda)^2}+\frac{q\gamma^2}{(q+\lambda)^2}-2(\alpha+\lambda)$$
$$\equiv 2\left(\frac{\beta y_1}{p+\lambda}+\frac{z_1}{q+\lambda}-\alpha-x_1-\lambda\right)\left(\frac{pv\beta}{p+\lambda}+\frac{qw\gamma}{q+\lambda}+1\right).$$

En faisant l'identification, on trouve immédiatement

$$v=\frac{1}{2y_1},\qquad w=\frac{1}{2z_1},$$

et, par suite, quand on connaît le pôle $(x_1, y_1, z_1)$ du plan passant par trois des pieds des normales issues du point $(\alpha, \beta, \gamma)$, l'équation du plan mené parallèlement à l'axe, par les pieds des deux autres normales, issues du même point, est

$$\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}+2=0.$$

Nous laisserons au lecteur le soin d'achever le calcul.

## EXERCICES.

1. En deux points M, M' d'un ellipsoïde, on mène les normales. Le plan, mené par le milieu de la corde MM' et perpendiculairement à cette corde, passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans principaux. (Laguerre.)

2. Quelle est, parmi les normales à un ellipsoïde, celle qui est la plus éloignée du centre. (Mannheim.)

3. On donne un ellipsoïde de centre O, dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que la normale, en un point M de cet ellipsoïde, fait avec les axes de symétrie. On demande de déterminer en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ :

1° La distance $d$ de O au plan tangent en M;

2° La distance $\delta$ de O à la normale en M;

3° La longueur OM;

4° Les angles de $O\overline{m}$ avec les axes;

5° La longueur $\overline{mp}$ de la portion de la normale en M comprise entre ce point et l'un des plans principaux. (Svéchnicoff.)

4. D'un point P, pris sur une normale en un point A d'un paraboloïde

(elliptique), on peut mener à la surface quatre autres normales, ayant pour pieds les points B, C, D, E :

1° Trouver l'équation de la sphère S passant par les quatre points B, C, D, E;

2° Trouver le lieu des centres I des sphères S, quand ce point P se déplace sur la normale en A, ainsi que la surface engendrée par la droite PI.

(CONCOURS GÉNÉRAL, 1883.)

5. Un ellipsoïde est coupé par un plan parallèle à l'un des plans principaux; montrer que les normales à cet ellipsoïde aux points de la section rencontrent deux lignes droites fixes, situées dans les deux autres plans principaux.

6. Les pieds des normales à une quadrique, qui rencontrent une normale donnée, sont sur un cône du second degré ayant pour sommet le pied de la normale fixe.

7. Trouver l'équation de la surface engendrée par les parallèles, menées par l'origine, aux normales à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

aux points où cette surface est coupée par la surface homofocale ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}=1. \qquad \text{(T.)}$$

8. On mène des normales à un ellipsoïde aux points où cet ellipsoïde est coupé par une sphère concentrique : lieu de leurs traces sur un plan fixe et, en particulier, sur l'un des plans principaux de l'ellipsoïde.

9. Si l'on fait mouvoir le point de départ des normales à un ellipsoïde successivement sur les parallèles aux axes, menées par un point donné $P(\alpha, \beta, \gamma)$, les traces des normales sur les plans principaux conjugués à chaque parallèle seront sur les sections du cône des normales issues de P par ces mêmes plans.

10. Quand le point P est dans un plan principal, le cône des normales issues de P se réduit à deux plans, dont l'un est le plan principal et le second un plan perpendiculaire.

Pour avoir les pieds des normales, issues du point $(\alpha, \beta, 0)$, par exemple, qui ne sont pas dans le plan principal $z=0$, on considère la droite ayant pour équations

$$y-\beta=\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}\,\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha), \qquad z=0;$$

du pôle de cette droite, pris par rapport à l'ellipse principale, on abaisse une perpendiculaire sur cette droite elle-même, et du pied de cette perpendiculaire on mène des tangentes à l'ellipse qui se projette sur le plan prin-

cipal, suivant la droite considérée; les points de contact sont les pieds des deux normales cherchées.

11. Le lieu géométrique des points, auxquels correspond un cône des normales qui soit de révolution, se compose de quatre droites.

12. Les axes principaux d'un cône circonscrit à un ellipsoïde sont des génératrices du cône des normales issues du sommet de ce cône.

(CHASLES.)

13. Quand plusieurs surfaces du second degré sont homothétiques et concentriques, les normales à ces surfaces, menées par un point donné, sont sur un même cône du second degré. (CHASLES.)

14. Les normales, menées d'un point à toutes les quadriques passant par l'intersection d'une quadrique donnée et d'une sphère ayant pour centre le point donné, sont sur un même cône du second degré. (CHASLES.)

15. Par un point donné, passent toujours dix synnormales réelles ou imaginaires; à un point donné, d'où l'on abaisse six normales à un ellipsoïde, correspondent toujours vingt pôles conjugués (pôles de plan passant par les pieds de trois des normales) dont deux au moins sont réels. Parmi les dix synnormales, il y en a toujours au moins deux de réelles.

16. Un plan perpendiculaire à un plan principal d'un ellipsoïde a toujours une synnormale.

17. Quand un plan a une synnormale par rapport à un ellipsoïde donné, cette droite passe par les pôles normaux conjugués aux projections du pôle du plan considéré sur les plans principaux, par rapport à chacune des ellipses principales.

18. Si l'on considère les normales dont les pieds sont sur une section plane d'un ellipsoïde, chaque normale est coupée par deux autres normales, et le lieu des points d'intersection se projette sur le plan sécant, en général, suivant une cubique.

19. La condition nécessaire et suffisante pour que trois normales, dont les pieds sont sur une section plane d'un ellipsoïde, se coupent en un même point, est que le pôle du plan sécant se projette sur un plan en un point d'une certaine ellipse, et alors le plan sécant a une synnormale.

20. Quand un plan non parallèle à l'un des axes d'un ellipsoïde a une synnormale, cette droite jouit des propriétés suivantes : 1° elle se projette sur le plan, suivant une normale à l'ellipse de section ; 2° elle perce l'ellipsoïde en un point de cette même ellipse; 3° elle passe par le pôle normal conjugué, par rapport à l'ellipse de section, de la projection du pôle du plan sécant sur ce plan lui-même; 4° la synnormale d'un plan non parallèle aux axes n'est jamais normale à l'ellipsoïde.

21. Étant donné un plan dont le pôle est sur la surface normopolaire, trouver le nombre des normales réelles, passant par un point de la synnor-

male du plan et dont les pieds sont sur la section correspondante. Construire ces normales.

22. Déterminer le nombre des normales réelles passant par un point de la synnormale commune à deux plans et dont les pieds soient sur les sections déterminées par ces plans. Construire ces normales.

23. Lieu des points d'où l'on peut mener des normales doubles à un ellipsoïde.

24. Lieu des points d'où l'on peut mener des normales triples à un ellipsoïde.

25. Les pieds des normales à un ellipsoïde, issues d'un même point, ne sont jamais sur une même sphère.

26. Démontrer que la synnormale d'un plan de pôle $(\alpha, \beta, \gamma)$ est perpendiculaire à la droite qui joint le point $(\alpha, \beta, \gamma)$ au point $\left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right)$.

27. Démontrer que la synnormale d'un plan mené par trois sommets d'un ellipsoïde (non situés dans un même plan) passe par le centre et que le pôle du plan se projette sur ce plan, à l'intérieur de l'ellipse de section, quand la plus grande des trois quantités $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ est plus petite que la somme des deux autres et à l'extérieur, dans le cas contraire.

28. Démontrer que si le point de départ des normales à un ellipsoïde se déplace sur l'un des axes, le lieu des pôles des plans qui passent par les pieds des normales prises trois à trois est formé de deux courbes.

29. La surface normopolaire d'un ellipsoïde de révolution se réduit à deux couples de plans.

30. Étendre les résultats précédents aux hyperboloïdes. Les plans sécants peuvent donner des sections paraboliques; on propose de démontrer qu'alors la condition nécessaire et suffisante pour que ce plan ait une synnormale est que son pôle se projette sur lui, sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole de section, menée à une distance du sommet égale au paramètre de cette courbe, et du même côté que le foyer.

31. Faire voir que sur chaque normale il existe toujours deux points de départ de normales doubles dont les pieds se confondent avec celui de la normale donnée (ce sont les centres de courbure de la surface au pied de la normale donnée.)

32. Étendre aux paraboloïdes les questions précédentes.

33. Trouver la condition pour qu'un plan ait une synnormale par rapport à un cône du second degré.

34. Par deux droites passant par le sommet d'un cône du second degré on mène des plans tangents à ce cône et par les génératrices de contact des plans normaux. Conditions pour que les quatre plans normaux se coupent suivant une même droite.

35. Si l'on coupe un cône par un plan parallèle à celui des plans principaux qu'il faut choisir pour que la section soit une ellipse et qu'on détermine les quatre points où la section coupe quatre génératrices correspondant à quatre plans normaux passant par une même droite, les quatre points obtenus seront les pieds de quatre normales à l'ellipse issues d'un même point, et réciproquement.

36. Discuter la réalité des normales menées d'un point à un cône du second degré.

[*Voir* pour toutes ces questions : *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre,* par DESBOVES (Paris, Mallet-Bachelier).]

37. On coupe une surface du second degré par un plan; aux différents points de l'intersection, on mène les normales à la surface; par un point de l'espace on mène des droites égales parallèles aux longueurs interceptées sur ces normales entre leur pied sur la surface et le plan de symétrie; les extrémités de toutes ces droites sont sur une conique. (LAGUERRE.)

38. Soit K la courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'une sphère ayant pour centre un point d'un plan principal de la surface; désignons par C la projection orthogonale de K sur ce plan de symétrie, et par C' le lieu des points où ce même plan est coupé par les normales élevées aux différents points de K, C et C' sont deux coniques ayant leurs axes parallèles, et, si l'on désigne respectivement par $a^2$ et $a'^2$, $b^2$ et $b'^2$ les carrés des axes parallèles, on a $a^2 a'^2 = b^2 b'^2$. (LAGUERRE.)

# CHAPITRE XXIV.

## GÉNÉRATRICES RECTILIGNES.

### Propriétés des génératrices rectilignes d'une quadrique.

**361**. *Quadriques admettant des génératrices rectilignes réelles.* — Cherchons quelles sont les quadriques autres que les cônes, les cylindres ou les systèmes de deux plans, sur lesquelles on peut tracer des droites *réelles*. Soit une droite réelle D tracée sur une quadrique; un plan sécant, mené par D, coupe la quadrique suivant deux droites réelles qui sont : la droite D et une seconde droite D'.

La section par le plan tangent en un point quelconque M pris sur D étant par suite du genre hyperbole, il ne peut y avoir de droites réelles sur un ellipsoïde ni sur un paraboloïde elliptique. Il ne peut pas non plus y en avoir sur un hyperboloïde à deux nappes, car le plan tangent en un point M de cette surface la coupe suivant deux droites imaginaires conjuguées; comme on le voit, par exemple, en rapportant la surface à trois diamètres conjugués, le demi-diamètre réel étant OM. L'équation de la surface étant alors

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=-1,$$

le plan tangent au point $x=0$, $y=0$, $z=c'$ a pour équation $z=c'$ et la section par ce plan est définie par les deux équations

$$z=c', \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=0.$$

Il ne reste plus à considérer que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique.

L'équation d'un hyperboloïde à une nappe peut se mettre sous la forme

$$X^2+Y^2-Z^2=T^2,$$

et celle d'un paraboloïde hyperbolique,

$$X^2-Y^2=Z,$$

X, Y, Z, T étant des polynomes linéaires distincts. En écrivant ainsi ces équations

$$(Y-Z)(Y+Z)=(T-X)(T+X)$$

et

$$(X-Y)(X+Y)=Z,$$

on voit que l'une et l'autre peuvent se mettre sous la forme

$$PQ=RS,$$

$P=0$, $Q=0$, $R=0$, $S=0$ représentant quatre plans formant un tétraèdre (dont l'une des faces est à l'infini, dans le cas du paraboloïde).

Cela étant, je dis qu'on peut tracer une infinité de droites réelles sur les quadriques représentées par une équation de la forme précédente.

En effet, les équations

$$(\lambda) \qquad P = \lambda R, \qquad Q = \frac{1}{\lambda} S,$$

dans lesquelles le paramètre $\lambda$ est variable, représentent une droite mobile située sur la surface H considérée, car on obtient l'équation de cette surface en éliminant $\lambda$ entre ces équations.

Il en est de même pour la droite mobile représentée par

$$(\mu) \qquad P = \mu S, \qquad Q = \frac{1}{\mu} R.$$

Je dis maintenant que si $\lambda$ et $\mu$ varient de $-\infty$ à $+\infty$, chacune de ces droites engendre la quadrique H *tout entière*. C'est ce que démontre le théorème suivant.

**362.** Théorème. — *Par chaque point de la quadrique* H, *il passe une droite* ($\lambda$) *et une droite* ($\mu$).

En effet, soient $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ les coordonnées d'un point M appartenant à la quadrique H; pour que la droite ($\lambda$) passe par M, il faut et il suffit que le paramètre $\lambda$ vérifie les deux équations

$$P_0 = \lambda R_0, \qquad Q_0 = \frac{1}{\lambda} S_0,$$

$P_0$, $Q_0$, $R_0$, $S_0$ désignant les résultats de la substitution de $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ aux coordonnées courantes dans les polynomes P, Q, R, S. Or, les équations précédentes sont compatibles, car, en éliminant $\lambda$, on obtient $P_0 Q_0 = R_0 S_0$, et cette équation est vérifiée, puisque le point M est sur la quadrique H. On verrait de même qu'il passe par M une droite ($\mu$).

Les droites ($\lambda$) et les droites ($\mu$) pouvant décrire la quadrique H tout entière, on voit que tout hyperboloïde à une nappe et tout paraboloïde hyperbolique peuvent être engendrés de deux manières différentes par une droite; en d'autres termes, ces surfaces sont des surfaces réglées qui admettent deux systèmes de génératrices rectilignes. Il reste à prouver que ces systèmes sont différents et qu'il n'y en a pas d'autres. Ce qui suit le démontre.

**363.** Théorème. — *Une droite* ($\lambda$) *et une droite* ($\mu$) *ont un seul point commun.*

En effet, le système des quatre équations

$$P = \lambda R, \qquad Q = \frac{1}{\lambda} S, \qquad P = \mu S, \qquad Q = \frac{1}{\mu} R$$

peut s'écrire

$$\frac{P}{\lambda\mu} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{\mu} = \frac{S}{\lambda},$$

ce qui prouve que la droite ($\lambda$) et la droite ($\mu$) ont un point commun, et un seul, dont les coordonnées tétraédriques P, Q, R, S sont respectivement proportionnelles à $\lambda\mu$, 1, $\mu$, $\lambda$, On peut toujours résoudre le système linéaire en $x$, $y$, $z$, $t$ :

$$P = \lambda\mu, \qquad Q = 1, \qquad R = \mu, \qquad S = \lambda;$$

on en déduira

$$\begin{aligned} x &= a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d, \\ y &= a'\lambda\mu + b'\lambda + c'\mu + d', \\ z &= a''\lambda\mu + b''\lambda + c''\mu + d'', \\ t &= a'''\lambda\mu + b'''\lambda + c'''\mu + d'''. \end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes du point commun à la droite ($\lambda$) et à la droite ($\mu$) sont donc

$$\frac{x}{t} = \frac{a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d}{a'''\lambda\mu + b'''\lambda + c'''\mu + d'''}, \qquad \frac{y}{t} = \frac{a'\lambda\mu + \ldots}{a'''\lambda\mu + \ldots}, \qquad \frac{z}{t} = \frac{a''\lambda\mu + \ldots}{a'''\lambda\mu + \ldots}.$$

On voit que si l'on donne à $\lambda$ une valeur déterminée, $\mu$ variant de $-\infty$ à $+\infty$, le point défini par les formules précédentes décrit une droite tout entière, la droite ($\lambda$). Ainsi une droite ($\lambda$) est rencontrée par toutes les droites ($\mu$).

On voit en outre par ces formules que le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de la droite ($\lambda$) par les droites ($\mu_1$), ($\mu_2$), ($\mu_3$), ($\mu_4$) est indépendant de la valeur de $\lambda$. D'où ce théorème : les droites d'un système déterminent sur deux droites de l'autre système des divisions homographiques.

**364.** *Équation du plan passant par une génératrice* ($\lambda$) *et une génératrice* ($\mu$). — Un plan passant par la droite ($\lambda$) a pour équation

$$P - \lambda R + h(\lambda Q - S) = 0;$$

de même l'équation d'un plan passant par la droite ($\mu$) est

$$P - \mu S + k(\mu Q - R) = 0.$$

Ces plans sont identiques si

$$h = \mu, \qquad k = \lambda.$$

L'équation cherchée est donc

$$P - \lambda R - \mu S + \lambda\mu Q = 0.$$

Cette équation représente le plan tangent au point de rencontre des deux génératrices considérées; en cherchant son enveloppe, on retrouve l'équation de la surface.

On verrait ainsi que les quadriques ne sont pas des surfaces développables si on ne le savait déjà par leurs équations tangentielles.

365. Théorème. — *Deux génératrices d'un même système n'ont aucun point commun.*

Pour qu'un système de valeurs de $x$, $y$, $z$, $t$ vérifient le système

$$P = \lambda R, \qquad Q = \frac{1}{\lambda} S, \qquad P = \lambda' R, \qquad Q = \frac{1}{\lambda'} S,$$

il faudrait supposer

$$(\lambda - \lambda')R = 0, \qquad \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) S = 0,$$

et, comme on suppose $\lambda \neq \lambda'$, on devrait poser

$$R = 0, \qquad S = 0, \qquad \text{d'où} \quad P = 0, \qquad Q = 0,$$

ce qui est impossible puisque les quatre polynomes P, Q, R, S sont distincts.

366. Théorème. — *Les systèmes* ($\lambda$) *et* ($\mu$) *sont les seuls.*

En effet, soit D une droite située sur la quadrique H; prenons deux points A, B sur la droite D et supposons que D n'appartienne ni au système ($\lambda$) ni au système ($\mu$). Par A on peut faire passer une droite ($\lambda$) et par B une droite ($\mu$). Ces droites se coupent en un point C; le plan ABC couperait la quadrique H suivant trois droites, ce qui est impossible.

En résumé, une droite ($\lambda$) diffère toujours d'une droite ($\mu$), puisque ces deux droites ont un seul point commun; les droites ($\lambda$) et les droites ($\mu$) sont les seules droites tracées sur la quadrique H.

Nous allons maintenant étudier en particulier l'hyperboloïde à une nappe et ensuite le paraboloïde hyperbolique.

## Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

**367**. L'équation d'un hyperboloïde à une nappe rapporté à ses axes de symétrie étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

écrivons cette équation sous la forme

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

On obtient ainsi les deux systèmes de génératrices rectilignes au moyen des équations

$$(\lambda)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right),\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$$(\mu)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{x}{a}\right),\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

**368**. *Coordonnées du point de rencontre d'une génératrice* ($\lambda$) *et d'une génératrice* ($\mu$). — On tire des équations précédentes, regardées comme formant un système,

$$\frac{1+\frac{x}{a}}{\mu}=\frac{1-\frac{x}{a}}{\lambda}=\frac{2\frac{x}{a}}{\mu-\lambda}=\frac{2}{\mu+\lambda},$$

d'où

$$\frac{x}{a}=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda};$$

ensuite,

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{2\mu\lambda}{\mu+\lambda},$$

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{2}{\mu+\lambda}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperboloïde peuvent ainsi s'exprimer au moyen des paramètres $\lambda$, $\mu$ par les formules

$$\frac{x}{a}=\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda},\qquad \frac{y}{b}=\frac{\lambda\mu+1}{\mu+\lambda},\qquad \frac{z}{c}=\frac{\lambda\mu-1}{\mu+\lambda}.$$

**369**. *Condition de parallélisme d'une génératrice* ($\lambda$) *et d'une génératrice* ($\mu$). — Les formules précédentes montrent que, à

toute génératrice ($\lambda$), correspond une génératrice ($\mu$) qui lui est parallèle; la condition de parallélisme est $\mu + \lambda = 0$.

370. *Équation du plan contenant une génératrice* ($\lambda$) *et une génératrice* ($\mu$). — En procédant comme dans le cas général (364), on trouve

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \lambda\left(1 + \frac{x}{a}\right) - \mu\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \lambda\mu\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0$$

ou

$$(\mu - \lambda)\frac{x}{a} + (1 + \lambda\mu)\frac{y}{b} + (1 - \lambda\mu)\frac{z}{c} - (\lambda + \mu) = 0.$$

Telle est l'équation du plan tangent au point ($\lambda$, $\mu$).

En particulier, si l'on pose $\mu = -\lambda$, on obtiendra l'équation

$$\frac{y}{b}(1 - \lambda^2) + \frac{z}{c}(1 + \lambda^2) - 2\lambda\frac{x}{a} = 0,$$

qui représente un plan asymptote. L'enveloppe de ce plan, quand $\lambda$ varie, est le cône asymptote.

371. Théorème. — *Toute génératrice rectiligne d'un hyperboloïde à une nappe rencontre l'ellipse de gorge.*

L'ellipse de gorge est la section par le plan principal contenant les deux axes réels; c'est donc, dans le cas présent, la section faite par le plan des $x$, $y$. Or, si l'on considère le point de la surface ayant pour paramètres $\lambda$, $\frac{1}{\lambda}$, ses coordonnées sont

$$x = a\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}, \qquad y = b\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}, \qquad z = 0.$$

On voit ainsi que par tout point de l'ellipse de gorge passe une génératrice ($\lambda$) et une génératrice ($\mu$), celle-ci définie par l'équation $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Plus généralement, une génératrice rectiligne rencontre toute section plane de la quadrique au point commun à cette génératrice et au plan de la section.

372. *Variation de l'angle d'une génératrice avec le plan de l'ellipse de gorge.* — Soit M un point de l'ellipse de gorge; prenons pour axes le

diamètre OM, le diamètre conjugué ON et conservons l'axe des $z$; l'équation de l'hyperboloïde sera ainsi

$$\frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

Le plan tangent en M a pour équation $X=a'$; il en résulte que les deux génératrices passant par M sont définies par les équations

$$X=a',\qquad \frac{Y^2}{b'^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0.$$

Si l'on nomme $\varphi$ l'inclinaison de l'une ou de l'autre de ces génératrices sur le plan de l'ellipse de gorge, on a donc

$$\tang\varphi=\frac{c}{b'}.$$

Si le point M décrit le quart de l'ellipse, depuis le sommet A jusqu'au sommet B, $\varphi$ va en croissant de $\varphi_0$ à $\varphi_1$, ces angles étant définis par les équations

$$\tang\varphi_0=\frac{c}{b},\qquad \tang\varphi_1=\frac{c}{a}.$$

373. Théorème. — *Les génératrices rectilignes sont parallèles aux génératrices du cône asymptote.*

Les équations de la parallèle à une génératrice ($\lambda$) menée par le centre sont

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda\frac{x}{a},\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\lambda}\frac{x}{a}.$$

En éliminant $\lambda$, on obtient l'équation du cône asymptote; il en est de même pour une génératrice ($\mu$), et l'on voit que, si $\lambda$ ou $\mu$ varient, chacune des parallèles à ces génératrices, menées par le centre, décrit le cône asymptote tout entier.

On voit ainsi qu'à toute génératrice du cône asymptote correspondent une génératrice ($\lambda$) et une génératrice parallèle ($\mu$).

374. Théorème. — *Trois génératrices d'un même système ne sont pas parallèles à un même plan.*

En effet, s'il en était ainsi, les parallèles à ces génératrices menées par le centre seraient dans un même plan, ce qui est impossible, car ce plan devrait couper le cône asymptote suivant trois droites.

On peut encore raisonner ainsi : soit

$$A\frac{x}{a}+B\frac{y}{b}+C\frac{z}{c}=0$$

l'équation d'un plan passant par l'origine; pour que ce plan contienne la parallèle à une génératrice ($\lambda$), menée par le centre de l'hyperboloïde, il faut et il suffit que

$$2A+B\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)+C\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=0.$$

Cette équation étant du second degré en $\lambda$, il ne peut y avoir que deux génératrices au plus qui soient parallèles au plan donné.

375. Théorème. — *Les projections d'une génératrice sur le plan principal sont tangentes à la section principale correspondante.*

Soit M un point appartenant à une section principale; les génératrices passant par M sont dans le plan tangent en M; ce plan étant perpendiculaire au plan principal, les projections de ces génératrices sur ce plan principal sont tangentes à la section principale.

La démonstration analytique est aussi simple. Considérons, par exemple, la projection d'une génératrice ($\lambda$) sur le plan $xOy$ ; son équation, dans ce plan, est

$$\lambda^2\left(1+\frac{x}{a}\right)-2\lambda\frac{y}{b}+1-\frac{x}{a}=0;$$

l'enveloppe de cette droite est l'ellipse de gorge.

376. *Génération rectiligne de l'hyperboloïde à une nappe.* — Considérons, par exemple, trois génératrices rectilignes A, B, C d'un hyperboloïde à une nappe, appartenant à un même système; une droite mobile, assujettie à rencontrer ces trois droites, coïncidera successivement avec toutes les génératrices du second système. En effet, soit M un point quelconque de la droite A; il n'y a qu'une droite qui passe par M et rencontre B et C. Cette droite coïncide donc avec la génératrice du second système passant par M, et il n'y a plus qu'à supposer que M parcoure la droite A tout entière, pour que la droite mobile coïncide successivement avec toutes les génératrices du second système

*Réciproquement, étant données trois droites quelconques* A, B, C NON PARALLÈLES A UN MÊME PLAN, *une droite mobile assujettie à rencontrer ces trois droites engendre un hyperboloïde à une nappe.*

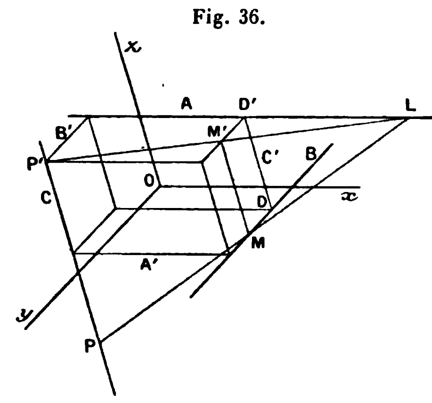


Fig. 36.

En effet, on peut construire un parallélépipède (que l'on nomme le *parallélépipède de Binet*) en menant par chacune de ces droites deux plans respectivement parallèles aux deux autres (*fig.* 36); si l'on prend pour axes de coordonnées les parallèles aux droites données, menées par le centre de ce parallélépipède, en appelant $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs des arêtes, les équations des droites A, B, C sont respectivement

$$(A)\left\{\begin{array}{l} y=-b, \\ z=c; \end{array}\right. \qquad (B)\left\{\begin{array}{l} z=-c, \\ x=a; \end{array}\right. \qquad (C)\left\{\begin{array}{l} x=-a, \\ y=b. \end{array}\right.$$

Pour définir une droite LMP s'appuyant sur A et sur B, écrivons l'équation d'un plan mené par A et celle d'un plan mené par B :

$$(1) \qquad z-c+\lambda(y+b)=0,$$

$$(2) \qquad z+c+\mu(x-a)=0;$$

exprimons que cette droite rencontre C, ce qui donne la condition

$$(3) \qquad \lambda b+\mu a=c.$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre les équations (1), (2), (3). On trouve ainsi, tous calculs faits,

$$ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

La surface représentée par cette équation a un centre unique, qui est l'origine des coordonnées; son cône asymptote est réel, car il contient les axes. Enfin, c'est une surface réglée; c'est donc un hyperboloïde à une nappe. D'ailleurs, on peut écrire l'équation obtenue sous la forme

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{2z}{c}\right)^2-\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2-\frac{4z^2}{c^2}+4=0.$$

Les droites A′, B′, C′, symétriques des premières par rapport au centre, font évidemment partie de la surface de l'hyperboloïde; on a ainsi un hexagone gauche y inscrit.

377. Si l'on rapporte la surface précédente à ses axes de symétrie, en nommant $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$ les longueurs des axes, on aura

$$2(ayz + bzx + cxy + abc) \equiv k\left(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{Z^2}{\gamma^2} - 1\right),$$

et l'on voit que $k = -2abc$.

Le module de la substitution qu'il faut faire pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées obliques est égal à $\omega^2$, $\omega$ ayant la signification habituelle. Le discriminant de la forme du second degré du second membre est égal à $\frac{8a^3b^3c^3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, et celui du premier est égal à $2abc$; on a donc

$$2abc = \frac{8a^3b^3c^3}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\,\omega^2,$$

c'est-à-dire

$$4\alpha\beta\gamma = 2abc\omega.$$

Or, $8abc\omega$ est le volume du parallélépipède construit sur A, B, C; on peut donc énoncer ce théorème, dû à M. Genty:

*Le volume du parallélépipède de Binet construit avec trois génératrices quelconques, d'un même système, d'un hyperboloïde à une nappe est constant et équivalent à la moitié du volume du parallélépipède construit sur les longueurs des axes* ($2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$).

378. *Relations homographiques.* — Nous savons déjà que les génératrices d'un système tracent sur les génératrices de l'autre système des divisions homographiques. On peut retrouver aisément cette propriété sur la figure précédente; il suffit, en effet, de remarquer que la projection de la génératrice LMP, faite parallèlement à l'axe des $z$ sur le plan des droites A et B′, passe par un point fixe P′ et trace, par suite, des divisions homographiques sur A et sur l'arête D′M′ parallèle à B; on a en effet

$$\frac{2b}{\overline{D'M'}} - \frac{2a}{\overline{D'L}} = 1$$

et, par suite,

$$\frac{2b}{\overline{DM}} - \frac{2a}{\overline{D'L}} = 1.$$

On peut d'ailleurs démontrer encore cette proposition en remarquant que les projections de quatre génératrices d'un même système et la projection d'une génératrice du second système sur l'ellipse de gorge étant des tangentes à cette ellipse, le rapport anharmonique des points d'intersection de ces gé-

nératrices est égal au rapport anharmonique des points d'intersection de ces tangentes à l'ellipse de gorge.

Considérons deux génératrices fixes d'un même système A, B, et soient $a_1, a_2, a_3, a_4$ et $b_1, b_2, b_3, b_4$ les points où ces deux génératrices sont rencontrées respectivement par quatre génératrices de l'autre système. Le rapport anharmonique des quatre plans menés par B et les droites $a_1b_1$, $a_2b_2$, $a_3b_3$, $a_4b_4$ est égal au rapport anharmonique des quatre points $a_1, a_2, a_3, a_4$, et de même le rapport des quatre plans menés par A et les mêmes génératrices du second système est égal à celui des points $b_1, b_2, b_3, b_4$. On peut donc dire qu'une génératrice du second système est l'intersection de deux plans correspondants de deux faisceaux homographiques ayant A et B pour arêtes. La réciproque est vraie; nous l'avons déjà démontrée (160).

## Génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique.

379. Les génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique possèdent, outre les propriétés établies plus haut, quelques propriétés caractéristiques que nous allons établir.

L'équation d'un paraboloïde hyperbolique pouvant se mettre sous la forme

$$PQ = R,$$

les deux systèmes de génératrices sont définies par les équations

$$(\lambda) \qquad P = \lambda R, \qquad Q = \frac{1}{\lambda},$$

$$(\mu) \qquad Q = \mu R, \qquad P = \frac{1}{\mu}.$$

On obtient ainsi cette proposition :

Théorème. — *Les génératrices de l'un des systèmes sont parallèles à l'un des plans directeurs et les génératrices du second système sont parallèles à l'autre plan directeur.*

380. Théorème. — *Deux génératrices d'un paraboloïde hyperbolique ne sont jamais parallèles.*

En effet, il suffit évidemment de considérer deux génératrices de systèmes différents, car deux génératrices d'un même système sont les intersections de deux plans parallèles par des plans non parallèles; or une génératrice ($\lambda$) étant parallèle au plan Q, et une génératrice ($\mu$) parallèle au plan P, les deux droites ne peuvent être

parallèles que si elles sont parallèles à l'intersection des plans P et Q, c'est-à-dire à l'axe du paraboloïde. Mais, toute parallèle à l'axe ne rencontrant la surface qu'en un seul point, il n'y a pas de génératrice parallèle à l'axe.

*On vérifie* d'ailleurs très simplement cette proposition avec les équations écrites plus bas.

**381.** Supposons maintenant le paraboloïde rapporté à ses plans principaux et au plan tangent en son sommet; son équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x,$$

en supposant $p > 0$, $q > 0$.

Les systèmes de génératrices seront alors définis par les équations

$$(\lambda) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda},$$

$$(\mu) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}.$$

**382.** Théorème. — *Les projections des génératrices sur un plan principal sont tangentes à la section principale correspondante.*

En effet, la projection d'une génératrice ($\lambda$), par exemple, sur le plan $xOy$ a pour équation, dans ce plan,

$$\frac{2y}{\sqrt{p}} = 2\lambda x + \frac{1}{\lambda}$$

ou

$$2\lambda^2 x - 2\lambda\frac{y}{\sqrt{p}} + 1 = 0.$$

L'enveloppe de cette droite, quand $\lambda$ varie, a pour équation

$$\frac{y^2}{p} - 2x = 0.$$

**383.** *Projections des génératrices sur le plan tangent au sommet.*

La projection d'une génératrice ($\lambda$) sur le plan tangent au som-

met a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda};$$

ce qui montre, comme on devait s'y attendre, que cette projection a une direction fixe.

Le point de rencontre de cette génératrice avec le plan tangent a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} = -\frac{z}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2\lambda};$$

ce point décrit la génératrice du système ($\mu$) situé dans le plan tangent.

**384.** Il est facile de construire les génératrices passant par un point donné de l'une des paraboles principales. Soit, en effet, M (*fig.* 37) un point de la parabole située dans le plan $xOy$. La tangente en M à cette parabole s'obtient en abaissant MA perpendiculaire sur l'axe, et prenant $\overline{BO} = \overline{OA}$; la tangente cherchée est la droite MB. Au point B correspondent deux points N, N' de la seconde parabole principale et NA, N'A sont les tangentes en ces points. Les génératrices cherchées sont les droites MN, MN'; on obtient facilement leurs projections sur le plan tangent au sommet : ce sont les droites PQ, P'Q; leurs traces sur ce plan tangent sont les points I, K et les droites OI, OK sont les génératrices situées dans le plan tangent au sommet.

Fig. 37.

**385.** *Variations de l'inclinaison d'une génératrice sur le plan des $x, y$.* — En appelant $\alpha$ l'angle NMB, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{NB}{BM}.$$

Soit $x$ l'abscisse du point M; on a

$$NB = \sqrt{2qx}, \qquad BM = \sqrt{2px + 4x^2},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{q}{p + 2x}} = \sqrt{\frac{q}{2\rho}},$$

$\rho$ désignant le rayon vecteur MF relatif au foyer F. On voit ainsi que si $x$

varie de o à $+\infty$, $\rho$ varie de $\frac{p}{2}$ à $+\infty$ et, par suite, $\alpha$ va en diminuant de $\alpha_1$ à o, $\alpha_1$ étant l'angle aigu défini par l'équation

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

386. Problème. — *Trouver une génératrice parallèle à une direction donnée.*

Cherchons s'il y a une génératrice ($\lambda$) parallèle à la direction définie par les paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. La parallèle à une génératrice ($\lambda$) menée par l'origine a pour équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda x;$$

on doit donc déterminer $\lambda$ de façon que

$$\lambda\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{p}} = \frac{\gamma}{\sqrt{q}}.$$

Le problème n'est donc pas possible, en général; il faut, en effet, que

$$\frac{\beta}{\sqrt{p}} = \frac{\gamma}{\sqrt{q}};$$

c'est-à-dire que la direction donnée soit parallèle au plan directeur qui est parallèle aux génératrices du système considéré.

Si cette condition, qui était évidemment nécessaire, est remplie, le problème est possible et n'a qu'une solution.

Si, en effet, l'on suppose $\beta = k\sqrt{p}$, $\gamma = k\sqrt{q}$, on prendra $\lambda = \frac{k}{\alpha}$.

De même, si $\beta = k\sqrt{p}$, $\gamma = -k\sqrt{q}$, il faudra prendre $\mu = \frac{k}{\alpha}$.

387. *Application.* — Soit M un plan perpendiculaire au plan directeur P; il y a une génératrice G du système ($\mu$) perpendiculaire au plan M, pourvu que M ne soit pas parallèle à l'axe. Les génératrices ($\lambda$) rencontrent toutes la génératrice G; donc leurs projections orthogonales sur le plan M ont un point commun, qui est le pied de la génératrice G sur le plan M.

## GÉNÉRATION RECTILIGNE DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

388. Soient $G_1$, $G_2$ deux génératrices du même système d'un paraboloïde hyperbolique; les génératrices du second système rencontrent $G_1$ et $G_2$ et sont parallèles à un plan directeur, non paral-

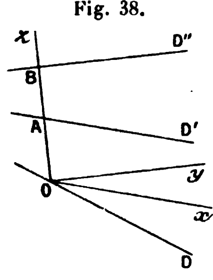
lèle aux deux premières droites. Donc la surface peut être engendrée par une droite mobile assujettie à rencontrer les deux droites $G_1, G_2$ et à rester parallèle à un plan fixe.

La réciproque est vraie; nous l'avons déjà établie (**172**).

**389.** *Second mode.* — Considérons trois génératrices $G_1, G_2, G_3$ du même système et, par suite, parallèles à un même plan directeur; les génératrices du second système rencontrent $G_1$, $G_2$, $G_3$; donc le paraboloïde donné peut être engendré par une droite mobile s'appuyant sur les trois droites données.

Réciproque. — *La surface engendrée par une droite mobile, assujettie à s'appuyer sur trois droites* parallèles a un même plan, *est un paraboloïde hyperbolique.*

Fig. 38.




Soient D, D', D'' (*fig.* 38) les trois droites données parallèles à un même plan. Prenons pour axe des $z$ une droite s'appuyant sur les trois droites données, l'origine étant sur D; puis prenons $Ox$ parallèle à D' et $Oy$ parallèle à D''.

Les équations des droites données seront

(D) $\qquad z = 0, \quad y = mx,$

(D') $\qquad y = 0, \quad z = a,$

(D'') $\qquad x = 0, \quad z = b.$

Une droite $\Delta$ s'appuyant sur D' et D'' a pour équations

$$z - a + \lambda y = 0, \tag{1}$$

$$z - b + \mu x = 0. \tag{2}$$

La condition pour que cette droite rencontre D est

$$b\lambda m - a\mu = 0. \tag{3}$$

L'équation du lieu engendré par $\Delta$ s'obtiendra donc en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre les équations (1), (2), (3); ce qui donne, en posant $m = \frac{p}{q}$,

$$z(bpx - aqy) - ab(px - qy) = 0.$$

Cette équation représente un paraboloïde hyperbolique, pourvu qu'on suppose

$$abpq(a-b) \neq 0.$$

Si l'un des facteurs de ce produit est nul, l'équation représente deux plans; ce qu'il est facile d'expliquer.

## Hyperboloïde et paraboloïde de raccordement.

390. *Déterminer le plan tangent en un point de la surface réglée engendrée par une droite qui se déplace en s'appuyant sur trois courbes données.* — Les tangentes en A, B, C aux courbes directrices, définissent un hyperboloïde à une nappe dont la génératrice ABC fait partie; cet hyperboloïde et la surface considérée ont mêmes plans tangents en A, B et C; donc elles ont même plan tangent en tout point M de leur génératrice commune ABC (*fig.* 39). Pour avoir le plan tangent en M à la surface considérée, il suffira donc de construire le plan tangent en M à l'hyperboloïde; pour cela il n'y aura qu'à tracer deux droites A'B'C', A"B"C", s'appuyant sur les tangentes AA', BB', CC' et à mener par M une droite MM'M", qui rencontre A'B'C' et A"B"C"; le plan AMM' est le plan tangent demandé.

Fig. 39.

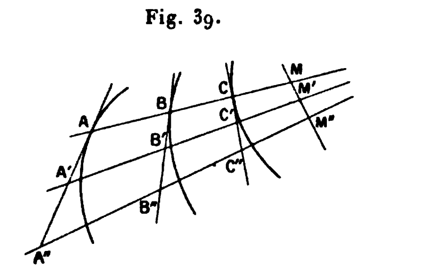
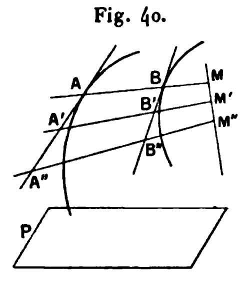



Fig. 40.




On aura une solution analogue pour la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur deux courbes données, et à rester parallèle à un plan donné P. On considérera le paraboloïde ayant pour plan directeur le plan donné et dont les tangentes en A et B aux directrices données seront deux génératrices. Il suffira de couper ces tangentes par deux plans parallèles au plan directeur et de mener par M une droite MM' qui s'appuie sur les génératrices obtenues A'B', A"B" (*fig.* 40). Le plan AMM' est le plan tangent en M au paraboloïde et à la surface engendrée par AB.

L'hyperboloïde et le paraboloïde considérés ont reçu les noms de *paraboloïde* et d'*hyperboloïde de raccordement*.

## Méthode générale pour trouver les droites tracées sur une surface.

**391.** Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface; pour exprimer que la droite ayant pour équations

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

est sur cette surface, il suffit d'écrire que l'équation

$$f(az + p,\ bz + q) = 0$$

est vérifiée identiquement.

Si l'équation de la surface est algébrique et de degré $m$, l'équation en $z$ sera au plus de degré $m$; il faudra donc que $a$, $b$, $p$, $q$ soient assujettis à $m+1$ conditions. Donc, en général, si $m > 3$, le problème est impossible.

Si $m = 3$, on a quatre équations pour déterminer quatre inconnues, donc une surface du troisième degré a, en général, *un nombre déterminé* de droites. On démontre qu'il y en a alors au plus vingt-sept. Mais il peut y en avoir une infinité et il existe des surfaces réglées d'un degré aussi élevé qu'on veut.

Si $m = 2$, les quatre inconnues ne sont assujetties qu'à trois équations; il y a donc une infinité de droites, réelles ou imaginaires, sur toute surface du second degré. En suivant cette méthode, nous allons retrouver les génératrices rectilignes des quadriques, dont nous obtiendrons les équations sous une forme nouvelle.

**392.** *Hyperboloïde.* — Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Écrivons les équations d'une droite sous la forme suivante

$$\frac{x}{a} = \alpha\frac{z}{c} + p, \qquad \frac{y}{b} = \beta\frac{z}{c} + q.$$

L'équation

$$\left(\alpha\frac{z}{c} + p\right)^2 + \left(\beta\frac{z}{c} + q\right)^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

devant être vérifiée identiquement, nous poserons

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad p^2 + q^2 = 1, \qquad \alpha p + \beta q = 0.$$

Il faut donc que $(\alpha, \beta)$ et $(p, q)$ soient les coordonnées de deux points appartenant à un même cercle de rayon 1 et, en outre, que les rayons correspondants soient rectangulaires. Nous sommes ainsi conduits à poser

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi; \qquad p = \cos\theta, \qquad q = \sin\theta;$$

$$\cos(\theta - \varphi) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Il suffit évidemment de faire les deux hypothèses $k = 0$ et $k = 1$.

1° $k = 0$. On a alors

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}, \qquad p = -\sin\varphi, \qquad q = \cos\varphi.$$

On obtient ainsi un premier système de génératrices définies par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi.$$

2° $k = 1$,

$$\theta = \varphi + \frac{3\pi}{2}, \qquad p = \sin\varphi, \qquad q = -\cos\varphi,$$

ce qui donne le second système

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi.$$

A une même valeur de $\varphi$ correspondent ainsi deux génératrices de systèmes différents, parallèles.

On peut exprimer les inconnues au moyen de $\theta$; on trouve ainsi

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\theta + \cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\theta + \sin\theta$$

et

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin\theta + \cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\theta + \sin\theta.$$

A une même valeur de $\theta$ correspondent ainsi les deux génératrices de systèmes différents qui rencontrent l'ellipse de gorge en un même point.

*Remarque.* — On peut écrire l'équation de la surface de façon à mettre en évidence les génératrices. En effet, les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = \frac{z}{c}, \qquad \frac{x}{a}\sin\varphi - \frac{y}{b}\cos\varphi = -1;$$

en faisant la somme des carrés, on obtient

$$\left(\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\sin\varphi - \frac{y}{b}\cos\varphi\right)^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

C'est l'équation de la surface. Elle est vérifiée en posant

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = \frac{z}{c}, \qquad \frac{x}{a}\sin\varphi - \frac{y}{b}\cos\varphi = \varepsilon;$$

en prenant $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, on a ainsi deux génératrices parallèles.

*Autre calcul.* — On peut aussi écrire les équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho$$

et exprimer que

$$f(x_0+\alpha\rho,\ y_0+\beta\rho,\ z_0+\gamma\rho)\equiv 0,$$

quel que soit $\rho$.

Appliquons cette méthode à l'hyperboloïde. On obtient

$$\frac{(x_0+\alpha\rho)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta\rho)^2}{b^2}-\frac{(z_0+\gamma\rho)^2}{c^2}\equiv 1,$$

ce qui donne

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}-\frac{\gamma z_0}{c^2}=0.$$

On voit qu'on obtiendra les génératrices en coupant la surface par les plans tangents au cône asymptote; les génératrices situées dans un plan asymptote sont parallèles à la génératrice de contact du cône asymptote.

393. *Paraboloïde.* — Nous mettrons l'équation d'une droite sous la forme

$$\frac{y}{\sqrt{p}}=\alpha x+h,\qquad \frac{z}{\sqrt{q}}=\beta x+k,$$

et nous poserons

$$(\alpha x+h)^2-(\beta x+k)^2-2x\equiv 0,$$

ce qui donne

$$\alpha^2-\beta^2=0,\qquad \alpha h-\beta k=1,\qquad h^2-k^2=0$$

ou

$$\beta=\varepsilon\alpha,\qquad k=\varepsilon' h,\qquad \alpha h(1-\varepsilon\varepsilon')=1.$$

On ne peut prendre $\varepsilon\varepsilon'=1$; donc $\varepsilon'=-\varepsilon$, et, par suite,

$$\beta=\varepsilon\alpha,\qquad h=\frac{1}{2\alpha},\qquad k=\frac{-\varepsilon}{2\alpha}.$$

Donc, en posant successivement $\varepsilon=+1$ et $\varepsilon=-1$, nous obtenons les deux systèmes

$$\frac{y}{\sqrt{p}}=\alpha x+\frac{1}{2\alpha},\qquad \frac{z}{\sqrt{q}}=\alpha x-\frac{1}{2\alpha}$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}}=\alpha x+\frac{1}{2\alpha},\qquad \frac{z}{\sqrt{q}}=-\alpha x+\frac{1}{2\alpha}.$$

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\alpha x,\qquad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\alpha}$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\alpha x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha}.$$

On peut d'ailleurs donner à $\alpha$ des valeurs différentes dans ces deux systèmes. Si l'on conserve la même valeur à $\alpha$, on voit que le plan contenant les deux génératrices a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha};$$

ce plan est perpendiculaire au plan des $x$, $y$; ce qui s'explique en remarquant que les deux génératrices percent ce plan au même point.

Les génératrices passant par le sommet correspondent à $\alpha$ infini.

### ASYMPTOTES D'UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

**394.** *Première méthode.* — Écrivons, comme plus haut, les équations d'une droite sous la forme

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + h, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = \beta x + k,$$

et formons l'équation aux abscisses des points d'intersection de cette droite et du paraboloïde

$$(\alpha x + h)^2 - (\beta y + k)^2 - 2x = 0.$$

Pour que les deux racines soient infinies, il faut et il suffit que

$$\alpha^2 - \beta^2 = 0, \qquad \alpha h - \beta k - 1 = 0.$$

On tire de ces équations

$$\beta = \alpha, \qquad k = h - \frac{1}{\alpha}$$

ou

$$\beta = -\alpha, \qquad k = -h + \frac{1}{\alpha},$$

ce qui donne

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + h, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = \alpha x + h - \frac{1}{\alpha}$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + h, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = -\alpha x - h + \frac{1}{\alpha}.$$

Considérons la première droite et la génératrice rectiligne parallèle ayant pour équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha}, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = \alpha x - \frac{1}{2\alpha}.$$

Le plan de ces deux droites a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha}.$$

On voit que ces droites coïncident si $h = \frac{1}{2\alpha}$.

De même, la seconde droite et la génératrice, ayant pour équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha}, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = -\alpha x + \frac{1}{2\alpha},$$

sont parallèles et leur plan a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Donc, pour avoir toutes les asymptotes, il suffit de mener par chaque génératrice un plan parallèle au plan directeur correspondant et, dans le plan obtenu, une droite quelconque parallèle à cette génératrice.

*Deuxième méthode.* — Écrivons les équations d'une droite sous la forme générale

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

et écrivons que l'équation en $\rho$

$$\frac{(y_0 + \beta\rho)^2}{p} - \frac{(z_0 + \gamma\rho)^2}{q} - 2(x_0 + \alpha\rho) = 0$$

a ses deux racines infinies. On doit donc poser

$$\frac{\beta^2}{p} - \frac{\gamma^2}{q} = 0, \qquad \frac{\beta y_0}{p} - \frac{\gamma z_0}{q} - \alpha = 0.$$

La première équation se décompose en deux autres. On peut évidemment poser simplement

1° $\qquad \beta = \sqrt{p}, \qquad \gamma = \sqrt{q}, \qquad$ d'où $\qquad \alpha = \frac{y_0}{\sqrt{p}} - \frac{z_0}{\sqrt{q}}$

ou

2° $\qquad \beta = \sqrt{p}, \qquad \gamma = -\sqrt{q}, \qquad$ d'où $\qquad \alpha = \frac{y_0}{\sqrt{p}} + \frac{z_0}{\sqrt{q}}.$

On obtient ainsi pour l'équation générale des asymptotes

$$\frac{x - x_0}{\frac{y_0}{\sqrt{p}} - \varepsilon\frac{z_0}{\sqrt{q}}} = \frac{y - y_0}{\sqrt{p}} = \frac{z - z_0}{\varepsilon\sqrt{q}} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

On voit qu'il passe deux asymptotes par chaque point de l'espace; si le

point est pris sur le paraboloïde on obtient des droites situées sur la surface.

**395.** ***Plans asymptotes du paraboloïde.*** — Considérons deux génératrices définies par les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \alpha x + \frac{1}{2\alpha}, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = \alpha x - \frac{1}{2\alpha}$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}} = \beta x + \frac{1}{2\beta}, \qquad \frac{z}{\sqrt{q}} = -\beta x + \frac{1}{2\beta};$$

les coordonnées de leur point commun sont

$$x = \frac{1}{2\alpha\beta}, \qquad y = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}\sqrt{p}, \qquad z = \frac{\alpha-\beta}{2\alpha\beta}\sqrt{q}.$$

Ce point est à l'infini si $\alpha = 0$ ou si $\beta = 0$. Le plan tangent en ce point a pour équation

$$y\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{p}} - z\frac{(\alpha-\beta)}{\sqrt{q}} = 2\alpha\beta x + 1.$$

Si $\beta = 0$, cette équation se réduit à

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\alpha},$$

et, pour $\alpha = 0$, on obtient

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\beta}.$$

Les plans asymptotes sont donc les plans menés par chacune des génératrices parallèlement aux plans directeurs correspondants.

**396.** EXERCICE. — ***Lieu des points par lesquels passent deux génératrices rectangulaires d'une quadrique réglée.***

1° *Hyperboloïde.* — Le lieu cherché est la courbe d'intersection de l'hyperboloïde et de la sphère de Monge y relative. On peut établir cette proposition de diverses manières.

*Première démonstration.* — Soient M un point du lieu et MA, MB deux génératrices rectangulaires. Si nous menons la normale MC, le trièdre trirectangle MABC est circonscrit à la surface, car MAC et MBC sont des plans tangents; le point M est donc un point de la sphère de Monge.

*Deuxième démonstration.* — La section par un plan passant par le centre et parallèle au plan MAB est une hyperbole équilatère; si l'on nomme $b'$ et $c'$ deux diamètres conjugués de cette hyperbole, on a

$$\overline{OM}^2 + b'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Mais $b' = c'$, donc

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Réciproquement, si cette dernière condition est remplie, $b'^2 = c'^2$ et, par suite, MA est perpendiculaire à MB.

*Démonstration analytique.* — Les coordonnées du point de rencontre d'une génératrice ($\lambda$) et d'une génératrice ($\mu$) sont

$$x = a\,\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}, \qquad y = b\,\frac{\lambda\mu + 1}{\mu + \lambda}, \qquad z = c\,\frac{\lambda\mu - 1}{\mu + \lambda},$$

et la condition d'orthogonalité des deux génératrices considérées est

$$4a^2\lambda\mu - b^2(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1) - c^2(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1) = 0.$$

On peut écrire cette condition de façon à mettre en évidence les fonctions $\lambda\mu + 1$, $\lambda\mu - 1$, $\mu + \lambda$, $\mu - \lambda$; on obtient très simplement

$$a^2(\mu - \lambda)^2 + b^2(\lambda\mu + 1)^2 + c^2(\lambda\mu - 1)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)(\lambda + \mu)^2 = 0,$$

ce qui prouve que

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

*Paraboloïde.* — La condition d'orthogonalité des génératrices représentées par les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}$$

est la suivante :

$$p - q + \frac{1}{\lambda\mu} = 0.$$

Il s'agit d'éliminer $\lambda$ et $\mu$ entre ces trois équations. On doit trouver deux équations; l'une d'elles est évidemment celle du paraboloïde. Pour obtenir l'autre, remarquons que

$$\frac{1}{\lambda\mu} = \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q}.$$

Donc, le lieu est l'intersection du paraboloïde et du plan ayant pour équation

$$2x + p - q = 0,$$

qui n'est autre que le plan de Monge. Le lieu est donc une hyperbole.

Quand $p = q$ on dit que le paraboloïde *est équilatère;* le plan de Monge est alors le plan tangent au sommet; le lieu se compose donc, dans ce cas, des deux génératrices passant par le sommet. Ces génératrices sont rectangulaires.

car les deux plans directeurs d'un paraboloïde équilatère sont rectangulaires, et réciproquement.

## EXERCICES.

1. Chercher ce que devient l'équation d'un cylindre circonscrit à un hyperboloïde à une nappe, quand la direction des génératrices du cylindre devient celle d'une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde.

2. Trouver la droite conjuguée d'une génératrice rectiligne d'une quadrique.

3. Les hauteurs d'un tétraèdre sont quatre génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.

4. Quatre génératrices d'un hyperboloïde étant données, construire le tétraèdre qui admet ces quatre droites pour hauteurs.

5. Dans un tétraèdre quelconque : 1° les droites, qui joignent les sommets aux centres des cercles inscrits dans les faces opposées sont les génératrices d'un même hyperboloïde; 2° celles qui joignent les sommets aux centres des médianes antiparallèles des faces opposées jouissent de la même propriété. (NEUBERG.)

6. Soient A', B', C', D' les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un plan quelconque. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de A', B', C', D' respectivement sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont les génératrices d'un même hyperboloïde. (NEUBERG.)

7. Soient A', B', C', D' les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un plan P, et soient $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ les orthocentres des triangles B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C'. Démontrer : 1° que les perpendiculaires abaissées des points A' et $A_1$ sur le plan BCD et les six droites homologues appartiennent à un même hyperboloïde; 2° que les perpendiculaires, abaissées du milieu des droites $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$, $D'D_1$ sur les faces correspondantes du tétraèdre ABCD, concourent en un même point. (NEUBERG.)

8. Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraèdre sont en ligne droite. (JOACHIMSTHAL.)

9. Trouver les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde ayant pour équation

$$ayz + bzx + cxy + d = 0.$$

Les conditions pour que cet hyperboloïde soit de révolution sont

$$\frac{a}{1-\cos\lambda} = \frac{b}{1-\cos\mu} = \frac{c}{1-\cos\nu},$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les angles des axes de coordonnées. Interpréter géométriquement ces conditions. (DE SAINT-GERMAIN.)

10. Deux hyperboloïdes à une nappe $H_1$, $H_2$ ont une génératrice commune L. Par tout point $m$ de L passe une génératrice $L_1$ de $H_1$ et une génératrice $L_2$ de $H_2$. Comment varie l'angle de ces deux droites quand $m$ parcourt L.

(DEWULF.)

11. Si par un point fixe P, pris sur un hyperboloïde réglé, on mène des droites s'appuyant sur les diagonales des quadrilatères que forment deux génératrices fixes du premier système avec deux génératrices variables du second système, ces droites sont situées dans un même plan.

(NEUBERG.)

12. Soient A, B, C trois génératrices d'un même système de l'hyperboloïde H; A', B', C' trois génératrices d'un même système de l'hyperboloïde H'; P un point quelconque de l'intersection des surfaces H, H'. Par P, on mène les deux droites qui s'appuient, respectivement sur les couples de droites (A, B'), (A', B); soit $\gamma$ le plan passant par ces droites. On obtient, d'une manière analogue, deux autres plans $\alpha$, $\beta$, en combinant, d'une part, les couples (B, C'), (B', C), et, d'autre part, les couples (C, A'), (A', C). Les plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ passent par une même droite. (NEUBERG.)

13. En un point P d'un hyperboloïde à une nappe, on mène les deux génératrices; puis, par chaque génératrice, un plan perpendiculaire au plan tangent en P; ces plans touchent l'hyperboloïde en deux points Q, R; trouver l'équation du plan passant par QR et par le centre de l'hyperboloïde.

(ED. LUCAS.)

14. Soit $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré dans le premier membre de l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Si l'on désigne par H le discriminant de ce premier membre rendu homogène; par $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, $\Delta$ les mineurs de H, qui correspondent respectivement aux demi-coefficients de $x, y, z, t$ dans $f'_t$; enfin par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ trois paramètres assujettis seulement à la condition $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$; les projections, sur les plans coordonnés, des génératrices de la surface appartenant à l'un des deux systèmes, auront pour équations

$$\Delta(\nu y - \mu z) + \mu\gamma'' - \nu\gamma' + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\varphi'_\lambda = 0,$$

$$\Delta(\lambda z - \nu x) + \nu\gamma \;\; - \lambda\gamma'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\varphi'_\mu = 0,$$

$$\Delta(\mu x - \lambda y) + \lambda\gamma' - \mu\gamma + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\varphi'_\nu = 0.$$

En changeant le signe de $\sqrt{H}$, on obtiendra les équations qui se rapportent à l'autre système de génératrices. (TISSOT.)

15. Dans un paraboloïde hyperbolique, la génératrice de chaque système, qui passe par le sommet, est celle sur laquelle les génératrices de l'autre système interceptent les segments les plus petits. (TISSOT.)

16. On pose

$$X \equiv ax + by + cz + dt, \qquad Y \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t,$$

où $a$, $b$, $c$, $d$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ sont des fonctions d'un même paramètre. La droite mobile $X = 0$, $Y = 0$ engendre une surface réglée. Trouver l'équation de la quadrique passant par trois droites infiniment voisines de cette surface, correspondant aux valeurs $u$, $u+h$, $u+h+k$ du paramètre, quand $h$ et $k$, supposés de même ordre, tendent vers zéro.

On trouve

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X' & X \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y' & Y \end{vmatrix} = 0;$$

$a'$, $b'$, ..., $b''$, ... sont les dérivées premières et secondes de $a$, $b$, ..., $b_1$, ... et

$$X' \equiv a'x + b'y + c'z + d', \qquad Y' \equiv a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + d'_1.$$

(Painvin.)

17. Lieu des perpendiculaires à l'axe imaginaire d'un hyperboloïde à une nappe et aux génératrices d'un même système. Lieu des pieds de ces perpendiculaires. Le plan mené par une génératrice et la perpendiculaire commune correspondante est tangent à l'hyperboloïde en un point P, et au lieu de la perpendiculaire commune en un point Q; trouver les lieux de P et de Q. On cherchera leurs projections sur le plan de l'ellipse de gorge.

18. Par chaque point d'un hyperboloïde à une nappe, on mène les bissectrices des angles formés par les deux génératrices qui y passent; lieu de ces droites.

19. Former l'équation de la quadrique passant par les trois droites

$$A = 0, \quad B = 0; \qquad C = 0, \quad D = 0;$$
$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0, \quad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 0,$$

A, B, C, D désignant des polynomes linéaires et $\alpha$, $\beta$, ..., $\delta$ des constantes. On trouve

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'}.$$

(Barbier.)

20. Exprimer que quatre droites sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde.

21. Exprimer que trois droites sont trois génératrices d'un même système d'un paraboloïde hyperbolique.

22. Lieu des points dont le rapport des distances à deux droites D, D', est constant, les distances à D étant comptées parallèlement à un plan P, et les distances à D' parallèlement à un plan P'. On trouve une quadrique. Quelles

sont les quadriques susceptibles de ce mode de génération? L'une de ces quadriques étant donnée, trouver les droites D, D' et les plans P, P'.

23. Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites rectangulaires non situées dans un même plan.

24. Lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques équilatères passant par deux droites données.

25. On donne trois parallèles d'un hyperboloïde de révolution à une nappe; trouver le cercle de gorge.

26. Trouver les droites situées sur la surface $x \cos nz - y \sin nz = 0$.

27. Exprimer que le plan

$$lx + my + nz + p = 0$$

coupe l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

suivant deux droites (*Exercice de calcul*).

28. Lieu des points par lesquels passent deux génératrices d'un hyperboloïde ou d'un paraboloïde faisant entre elles un angle donné.

29. Un tétraèdre ABCD est partagé en deux parties équivalentes par le paraboloïde hyperbolique qui passe par deux couples d'arêtes opposées.

30. Quand les six arêtes d'un tétraèdre sont tangentes à une quadrique, les quatre droites, suivant lesquelles le plan des trois points de contact des arêtes issues de chaque sommet rencontre la face opposée, sont des génératrices d'un hyperboloïde.

31. Quand un tétraèdre est inscrit à une quadrique, les plans tangents, menés par les sommets, rencontrent les faces opposées suivant quatre droites qui sont les génératrices d'un hyperboloïde.

32. Quand les six arêtes d'un tétraèdre sont tangentes à une quadrique, les plans tangents, menés par les arêtes d'une même face, se coupent en un même point, ce qui donne quatre points. Les quatre droites obtenues en joignant chacun de ces points au sommet opposé à la face considérée sont des génératrices d'un hyperboloïde.

33. Lieu du pied de la perpendiculaire commune à une génératrice G d'une quadrique et aux génératrices de même système, sur ces dernières; ce lieu est une conique. Enveloppe du plan de cette conique quand la génératrice G décrit la quadrique donnée.

34. Enveloppe de la projection conique d'une génératrice rectiligne sur un plan diamétral parallèlement à la direction conjuguée à ce plan.

35. Enveloppe de la projection conique d'une génératrice rectiligne sur un plan quelconque, le point de vue étant le pôle de ce plan.

36. Trouver les droites situées sur la surface normopolaire d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde (on trouve huit droites parallèles).

37. Trouver les droites situées sur la surface normopolaire d'un paraboloïde.

38. Trouver les droites situées sur une surface du troisième ordre.

— Il y a au moins une droite réelle. On rapporte la surface à un tétraèdre de référence, dont une arête est cette droite. Un plan mené par cette arête coupe la surface suivant une droite et une conique; on peut déterminer le plan de façon à avoir trois droites : alors, si ces droites sont AB, BC, CA, on suppose que ces droites soient des arêtes du tétraèdre ABCD. Le plan $T = \lambda Z$ coupe suivant AB et une conique; en écrivant que cette conique se réduit à deux droites, on a une équation du cinquième degré en $\lambda$, admettant la solution $\lambda = 0$. Donc, par AB passent cinq plans, donnant chacun trois droites; mais AB est comptée quatre fois de trop, ce qui réduit à onze; ne comptant ni BC, ni CA, restent neuf droites. On en obtient autant pour BC et pour CA; donc en tout vingt-sept droites. Chacune de ces droites en rencontre dix autres.

*Remarque.* — Les vingt-sept droites peuvent être représentées par

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6; \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6;$$
$$c_{12},\ c_{13},\ c_{14},\ c_{15},\ c_{16}; \qquad c_{23},\ c_{24},\ c_{25},\ c_{26};$$
$$c_{34},\ c_{35},\ c_{36}; \qquad c_{45},\ c_{46}; \qquad c_{56}.$$

Se rencontrent :

1° Une droite $a$ et une droite $b$ d'indices différents;
2° Une droite $a$ ou $b$ et une droite $c$ ayant un indice commun;
3° Deux droites $c$ n'ayant pas d'indice commun. (CREMONA.)

39. Démontrer que les perspectives des sections planes d'une quadrique sur un plan quelconque, le point de vue étant sur la quadrique, ont deux points communs. (CHASLES.)

# CHAPITRE XXV.

## SECTIONS CIRCULAIRES.

397. Nous nous proposons de déterminer tous les plans qui coupent une quadrique donnée suivant des cercles. Pour cela, nous établirons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si deux quadriques ont une courbe plane commune, elles en ont une seconde.*

Il s'agit d'établir cette proposition *sans supposer que le plan de la courbe commune soit réel* (car nous l'appliquerons plus loin dans le cas où ce plan est imaginaire).

Supposons que l'équation du plan de la courbe commune soit mise sous la forme

$$P \equiv z + ax + by + c = 0,$$

ce qu'on peut toujours supposer en choisissant les axes convenablement, et soient $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ les équations des deux quadriques considérées. Divisons les polynomes $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ par le polynome P du premier degré en $z$; nous obtiendrons les identités

$$f(x, y, z) \equiv P.Q + f_1(x, y),$$
$$g(x, y, z) \equiv P.Q_1 + g_1(x, y),$$

Q, $Q_1$ étant des polynomes du premier degré entiers en $z$, $x$, $y$, et $f_1(x, y)$, $g_1(x, y)$ deux polynomes du second degré au plus, entiers en $x$ et $y$.

Or $f_1(x, y) = 0$ est l'équation du cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $z$ et qui a pour directrice l'intersection de la première quadrique par le plan P; de même $g_1(x, y) = 0$ est l'équation du cylindre de même direction et admettant la même directrice; donc

$$g_1(x, y) \equiv a f_1(x, y),$$

$a$ étant une constante, car ces deux cylindres sont identiques. Il en résulte que

$$g(x, y, z) - af(x, y, z) \equiv P(Q_1 - aQ);$$

ce qui prouve que les points communs aux deux quadriques sont dans le plan P ou dans le plan ayant pour équation $Q_1 - aQ = 0$; en d'autres termes, l'intersection complète des deux quadriques se compose de deux courbes planes. Il pourra arriver d'ailleurs que $Q_1 - aQ$ soit identique à P à un facteur constant près, c'est-à-dire que les deux courbes planes coïncident.

*Remarque.* — Il convient de remarquer que l'on a trouvé une constante $a$ telle que $g - af$ soit un produit de deux facteurs du premier degré qui, égalés à zéro, fournissent les équations des deux courbes planes communes aux deux quadriques.

*Autre démonstration.* — On peut démontrer le théorème précédent d'une

manière plus simple au moyen des coordonnées tétraédriques. Supposons, en effet, que l'une des faces T du tétraèdre de référence (face qui n'est pas nécessairement réelle) soit dans le plan de la courbe commune aux deux quadriques. On pourra mettre les équations de ces deux quadriques sous la forme

$$f(X, Y, Z, T) \equiv \varphi(X, Y, Z) + TP = 0,$$
$$g(X, Y, Z, T) \equiv a\varphi(X, Y, Z) + TQ = 0,$$

P, Q étant des fonctions linéaires de X, Y, Z, T et $\varphi(X, Y, Z) = 0$ étant l'équation du cône ayant pour sommet le sommet du tétraèdre opposé à la face T et pour directrice la courbe commune. On a immédiatement

$$g - af \equiv T(Q - aP),$$

ce qui démontre la proposition.

### Plans cycliques.

398. On nomme *plan cyclique* tout plan qui coupe une quadrique suivant un cercle.

Soient $f(x, y, z) = 0$ et $U = 0$ les équations d'une quadrique et d'un plan; si la section de la quadrique par ce plan est un cercle, on peut faire passer une infinité de sphères par ce cercle; soit $\sigma = 0$ l'équation de l'une de ces sphères. La quadrique $f$ et la sphère $\sigma$ ayant une première courbe plane commune en ont une seconde; on peut donc déterminer une constante S telle que

$$f - S\sigma \equiv UV,$$

V étant un polynome du premier degré en $x, y, z$. Si l'on désigne par $\psi$, P, Q les ensembles de termes du second degré de $\sigma$ et du premier degré de U et de V, on a donc

$$\varphi - S\psi \equiv PQ,$$

ce qui prouve que S est une racine de l'équation en S.

Réciproquement, à toute racine *non nulle* de l'équation en S correspond un système de deux plans cycliques. En effet, soit S une quelconque des racines de l'équation en S, supposée différente de zéro; en vertu de l'identité précédente, l'équation de la quadrique peut se mettre sous la forme

$$S\psi + PQ + R = 0,$$

R étant un polynome du premier degré. La section de cette quadrique par un plan parallèle à P, ou par un plan parallèle à Q, est

un cercle, car l'une de ces sections est représentée par les équations

$$S\psi + \alpha Q + R = 0, \qquad P = \alpha,$$

ou par

$$S\psi + \beta P + R = 0, \qquad Q = \beta,$$

et chacun de ces systèmes représente un cercle.

Si la racine S était nulle, les sections obtenues se réduiraient à des droites.

Il résulte de ce qui précède qu'une quadrique a, *en général,* trois systèmes de deux plans cycliques. Cherchons combien il y a de systèmes de plans cycliques réels.

399. Théorème. — *Le seul système de plans cycliques réels correspond à la racine moyenne de l'équation en* S.

En effet, si S est une racine de l'équation en S, nous savons que $\varphi(x, y, z) - S\psi(x, y, z)$ est la *différence* de deux carrés, c'est-à-dire le produit de deux facteurs du premier degré à *coefficients réels,* uniquement quand S est la *racine moyenne.* Il y a donc, au plus, un système réel et deux systèmes imaginaires.

400. Théorème. — *Le système de plans cycliques correspondant à une racine déterminée de l'équation en* S *est formé de plans perpendiculaires au plan principal qui correspond à cette racine.*

On peut, en effet, au moyen d'une transformation de coordonnées, poser

$$\varphi(x, y, z) \equiv S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2;$$

on en déduit, par exemple,

$$\varphi(x, y, z) - S_1(x^2 + y^2 + z^2) \equiv (S_2 - S_1) Y^2 + (S_3 - S_1) Z^2.$$

On voit que les plans cycliques obtenus passent par la droite $Y = 0$, $Z = 0$. Ils sont donc perpendiculaires au plan principal $X = 0$.

Les plans cycliques menés par le centre d'une quadrique passent donc par un axe de symétrie de la quadrique.

On peut établir par la Géométrie que le plan d'une section circulaire est perpendiculaire à un plan principal. En effet, soit P un plan cyclique; les

sections par les plans parallèles au plan P sont des cercles. Soit $\Delta$ le lieu des centres de ces cercles, c'est-à-dire le diamètre conjugué au plan P; considérons le plan projetant $\Delta$ sur P; ce plan partage évidemment en deux parties égales les cordes qui lui sont perpendiculaires; c'est donc un plan principal, et, par suite, le plan P est perpendiculaire à un plan principal.

**401.** Théorème. — *Les sections circulaires obtenues par deux plans non parallèles et correspondant à une même racine de l'équation en* S *sont sur une même sphère.* (Hachette.)

En effet, supposons, en prenant des axes rectangulaires,

$$\varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) \equiv PQ,$$

et coupons la quadrique par les deux plans ayant pour équations

$$P = \alpha, \qquad Q = \beta.$$

L'équation de la quadrique est

$$f \equiv S(x^2 + y^2 + z^2) + PQ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Or

$$f - (P - \alpha)(Q - \beta) \equiv S(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D + P\beta + Q\alpha - \alpha\beta,$$

L'équation $f - (P - \alpha)(Q - \beta) = 0$ représente donc une sphère; or cette équation est évidemment vérifiée par les coordonnées des points de chacun des cercles tracés sur la quadrique $f$ que nous avons considérés; donc ces deux cercles sont bien sur une même sphère.

### Autre méthode.

**402.** Nous savons que les sections d'une quadrique et de son cône asymptote par un même plan ou par des plans parallèles sont des coniques homothétiques; pour trouver les plans cycliques d'une quadrique, il suffit donc de trouver les plans cycliques de son cône asymptote. Or nous avons déjà montré comment on peut obtenir les plans cycliques d'un cône quelconque du second degré.

D'après cela, il suffit de déterminer S de façon que

$$\varphi(x, y, z) - S\psi(x, y, z) = 0$$

représente deux plans.

Il convient de remarquer que si l'on coupe par un plan quelconque le cône des directions asymptotiques de la quadrique et le cône isotrope ayant pour sommet commun l'origine des coordonnées, on obtient deux coniques. Les sécantes communes correspondent aux plans cycliques de la quadrique et les

sommets du triangle conjugué commun aux deux coniques, aux axes de la quadrique. Les plans cycliques sont, en effet, les plans menés par l'origine et les sécantes communes; les axes sont les droites menées par le centre de la quadrique et parallèles aux droites joignant l'origine aux sommets du triangle conjugué. Si l'on remplace le cône isotrope par le cône des directions asymptotiques d'une seconde quadrique, on obtiendra, par le même procédé, des plans coupant les deux quadriques suivant des coniques homothétiques, et un système de diamètres conjugués commun aux deux quadriques.

## Application aux formes réduites.

403. *Ellipsoïde.* — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad (a>b>c)$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie.

Les racines de l'équation en S sont $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$; la racine moyenne est, en vertu des hypothèses, égale à $\frac{1}{b^2}$. Les plans cycliques diamétraux réels sont définis par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}(x^2+y^2+z^2)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2-b^2)-\frac{z^2}{c^2}(b^2-c^2)=0.$$

On peut obtenir directement cette équation. En effet, les plans cycliques diamétraux doivent contenir un axe; or, la section par un plan contenant un axe est une ellipse dont l'un des axes est égal à la longueur de l'axe situé dans le plan sécant et dont l'autre axe est égal à la corde dirigée suivant la trace du plan sécant sur le plan de la section principale perpendiculaire à l'axe considéré. On voit ainsi que la section ne peut être un cercle que si le plan sécant passe par l'axe moyen; or, l'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points d'intersection du cercle et de l'ellipse représentés, dans le plan $xOz$, par les équations

$$x^2+z^2=b^2, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

est

$$x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

Cette équation définit les plans cycliques réels.

On peut écrire l'équation de l'ellipsoïde de manière à mettre en évidence les plans cycliques réels. En effet, si l'on pose

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}(x^2+y^2+z^2)\equiv \mathrm{PQ},$$

on voit que l'équation cherchée est

$$x^2+y^2+z^2-b^2=b^2.\mathrm{PQ}.$$

Elle exprime cette propriété : *Le lieu des points tels que le carré de la tangente menée d'un de ces points à une sphère soit proportionnel au produit des distances de ce même point à deux plans diamétraux de la sphère est un ellipsoïde ou un hyperboloïde concentrique à la sphère et admettant pour plans cycliques les deux plans diamétraux.*

404. Ombilics. — *On appelle* ombilic d'une quadrique *un point de cette quadrique tel que le plan tangent en ce point la coupe suivant un cercle de rayon nul.* Un ombilic est donc l'extrémité du diamètre conjugué à un plan cyclique.

On peut encore définir un ombilic : un point tel que les deux génératrices rectilignes qui y passent soient deux droites isotropes. Il y a sur chaque quadrique huit génératrices isotropes, quatre de chaque système. Chaque génératrice isotrope est rencontrée par les trois génératrices isotropes de l'autre système qui ne passent pas par le même point du cercle de l'infini. On obtient ainsi douze ombilics réels ou imaginaires.

*Ombilics réels de l'ellipsoïde.* — L'équation d'un des plans cycliques réels étant

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\varepsilon\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0,$$

le diamètre conjugué a pour équations

$$y=0,\qquad \frac{x}{\sqrt{a^2-b^2}}=\varepsilon\frac{z}{\sqrt{b^2-c^2}};$$

il coupe l'ellipsoïde aux points ayant pour coordonnées

$$y=0,\qquad x=\pm\frac{ac}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\qquad z=\pm\frac{ac}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

l'ellipsoïde a donc quatre ombilics réels situés dans le plan principal perpendiculaire à l'axe moyen.

405. *Hyperboloïdes.* — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\varepsilon\qquad(\varepsilon=\pm 1)$$

l'équation d'un hyperboloïde à une nappe, ou de l'hyperboloïde à deux nappes conjugué du premier. Les plans cycliques de ces surfaces sont les mêmes. Les racines de l'équation en S étant $-\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{a^2}$, la racine moyenne est $\frac{1}{b^2}$ *si l'on suppose* $a < b$. On aura donc des calculs analogues à ceux qui sont relatifs à l'ellipsoïde; il suffira de changer dans ceux-ci $c^2$ en $-c^2$. Les plans cycliques réels ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}(b^2-a^2)-\frac{z^2}{c^2}(b^2+c^2)=0.$$

**406.** *Ombilics d'un hyperboloïde.* — Soit

$$\frac{x}{a}\sqrt{b^2-a^2}+\varepsilon\frac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2}=0$$

l'équation d'un plan cyclique. Le diamètre conjugué a pour équations

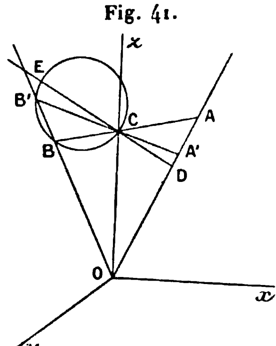
$$y=0, \qquad \frac{x}{\sqrt{b^2-a^2}}=-\varepsilon\frac{z}{\sqrt{b^2-c^2}}.$$

Cette droite coupe l'hyperboloïde à une nappe en des points *imaginaires*; elle coupe, au contraire, l'hyperboloïde à deux nappes en des points réels ayant pour coordonnées

$$y=0, \qquad x=\pm\frac{ac}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2+c^2}}, \qquad z=\pm\frac{ac}{b}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}.$$

**407.** *Plans cycliques d'un cône.* — On peut obtenir les plans cycliques du cône défini par l'équation

Fig. 41.




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

de la même façon que pour les hyperboloïdes.

On peut aussi procéder de la manière suivante. Nous allons chercher les plans cycliques menés par le point ayant pour coordonnées o, o, $c$.

Soit ABC (*fig.* 41) la trace d'un plan perpendiculaire au plan $xOz$ mené par C; si la section du cône par ce plan est un cercle, on aura

$$\overline{CB}.\overline{CA}=-b^2.$$

Le point B est donc à l'intersection de l'arête OB et de la figure inverse de OA par rapport à C, la puissance d'inversion étant égale à $-b^2$. Il suffit d'abaisser CD perpendiculaire sur OA et de prendre, sur le prolongement

de DC, un segment CE tel que $\overline{DC}.\overline{CE} = b^2$; le point B est à l'intersection de OB et du cercle décrit sur CE comme diamètre. On obtiendra ainsi deux points d'intersection B, B' et, par suite, deux plans cycliques ayant pour traces BA, B'A', pourvu qu'on suppose $a < b$. Nous laissons au lecteur le soin de faire la discussion.

408. L'équation du système des plans cycliques du cône étant

$$PQ \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

l'équation du cône peut s'écrire ainsi

$$x^2+y^2+z^2 = -b^2.PQ.$$

On obtient ainsi ce théorème : *Le lieu des points dont le produit des distances à deux plans est proportionnel au carré de leur distance à un point de l'intersection de ces plans est un cône ayant ce point pour sommet et admettant ces plans pour plans cycliques.*

On peut transformer cet énoncé. Soient M un point du lieu et S le sommet du cône, MP et MQ les distances de M aux plans cycliques; on a

$$\frac{MP}{MS}.\frac{MQ}{MS} = \text{const.}$$

Donc, en appelant $\alpha$ et $\beta$ les angles que MS fait avec les deux plans cycliques, on a : $\sin\alpha.\sin\beta = \text{const.}$

Si l'on coupe le cône par une sphère ayant son centre au sommet du cône, les plans cycliques coupent la sphère suivant deux grands cercles et le cône détermine, sur la sphère, une courbe ou, plutôt, deux courbes symétriques nommées *ellipses sphériques*. Si d'un point de l'une de ces ellipses, on abaisse des arcs de grands cercles perpendiculaires sur les deux grands cercles obtenus, le produit des sinus de ces arcs sera constant.

409. *Paraboloïdes.* — Le paraboloïde hyperbolique ne peut pas avoir de plans cycliques, car la racine moyenne de l'équation en S est nulle. Au lieu de plans cycliques, la méthode générale donne les plans directeurs. Un système de deux droites situées dans un même plan, et dont l'une est à l'infini, est en effet un cercle, car c'est une conique passant par les points cycliques de son plan.

Considérons au contraire un paraboloïde elliptique rapporté à ses plans principaux et au plan tangent au sommet, dont l'équation est

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Les racines de l'équation en S sont o, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$. La racine moyenne est $\frac{1}{p}$ si l'on suppose $p > q$; les plans cycliques sont alors donnés par l'équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - \frac{1}{p}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

ou plus simplement

$$qx^2 - z^2(p - q) = 0.$$

On arrive au même résultat en coupant le paraboloïde par un plan passant par l'axe des $y$ et en rapportant la section à cet axe et à une perpendiculaire à $Oy$ menée dans son plan par l'origine. On calcule aisément les coordonnées des ombilics.

**410.** *Cylindre elliptique.* — Si l'on considère le cylindre ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - p = 0,$$

ce cylindre a les mêmes plans cycliques que le paraboloïde que nous venons de considérer. On peut les trouver directement; il suffit de couper la section par le plan $xOz$ par un cercle de centre O et de rayon $p$; on obtient ainsi, en combinant les équations

$$z^2 - pq = 0, \qquad x^2 + z^2 - p^2 = 0,$$

l'équation

$$\frac{x^2}{p^2} + z^2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{pq}\right) = 0$$

ou

$$qx^2 - z^2(p - q) = 0,$$

qui représente les deux plans cycliques; on obtient donc les traces de ces plans en joignant à l'origine les points de rencontre des génératrices du cylindre situées dans le plan $xOz$ et du cercle de centre O et de rayon $p$.

EXERCICES.

1. D'un point pris sur un paraboloïde hyperbolique, on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices d'un même système; le lieu de ces perpendiculaires est un cône du second degré : trouver ses plans cycliques. Lieu des pieds des perpendiculaires.

2. Exprimer que le plan $lx+my+nz$ coupe la quadrique $f(x,y,z)=0$ suivant un cercle.

— On peut exprimer qu'il y a une valeur de S telle que

$$\varphi(x,y,z)-S(x^2+y^2+z^2)$$

soit divisible par $lx+my+nz$ et par suite égal à

$$(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z),$$

$l'$, $m'$, $n'$ étant des inconnues.

On peut aussi déterminer $l'$, $m'$, $n'$ de façon que

$$\varphi(x,y,z)-(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z)=0$$

représente un cône isotrope.

3. Lieu des sommets des cônes circonscrits à une quadrique et qui sont coupés par un plan donné suivant des cercles.

4. Si l'on coupe un cône du second degré et ses plans cycliques menés par le sommet, par un plan passant par le sommet, les deux couples de droites obtenues ont les mêmes bissectrices.

5. Trouver les plans cycliques d'un paraboloïde elliptique en se servant de cette propriété : les projections des sections planes sur un plan perpendiculaire à l'axe sont des coniques homothétiques (Ex. 39, Chap. XXIV.)

6. Soient A un ombilic d'une quadrique, S et B le second point d'intersection de la normale en ce point avec la surface. On joint un point quelconque M de la surface S aux points A et B; par A on mène un plan perpendiculaire à AM qui coupe BM en P. Le point P décrit un plan cyclique. (GENTY.)

7. Sur une normale menée par un ombilic O à une surface du second degré, il existe un point P tel qu'en menant par ce point une transversale rencontrant la surface en des points M, M', l'angle MOM' soit droit, quelle que soit la direction de la transversale. Le plan polaire de P est un plan cyclique.

8. Étant donné un ellipsoïde, trouver un point P sur cet ellipsoïde et une droite L, tels que les cônes qui ont pour sommet le point P et pour bases les sections faites dans l'ellipsoïde par des plans passant par L, soient de révolution. Lieu de L quand la longueur de l'axe moyen de l'ellipsoïde varie.

(CONCOURS GÉNÉRAL, 1867.)

9. Trouver les points d'où l'on peut mener à un ellipsoïde des normales quadruples. Les pieds de ces normales sont les ombilics.

10. Lieu des ombilics des quadriques $x^2+y^2+z^2-2ayz-2bzx-2cxy=1$ quand $abc=1$.

11. Étant données une conique C et une droite D située dans son plan, mais ne la coupant pas, trouver un point S tel que le plan déterminé par le

point S et la droite D soit un plan cyclique du cône ayant la conique C pour directrice et le point S pour sommet.

— Le plan (S, D) doit couper le cône suivant deux droites isotropes; on en conclut immédiatement que si M′ et M″ sont les points d'intersection imaginaires conjugués de D et de S et si l'on pose $M'M'' = 2hi$, le point S doit être sur le cercle de rayon $h$ ayant pour centre le milieu réel de M′M″ et dont le plan est perpendiculaire à D. Traiter la question par le calcul.

12. La proposition précédente résout cette question de Géométrie plane: Étant données une droite D et une conique C, trouver un point S et un plan P, tels que la *perspective* de C sur le plan P, le point de vue étant S, soit un cercle et que la perspective de D soit la droite de l'infini. C'est une des propositions les plus utiles de la théorie des propriétés projectives des figures, de Poncelet.

# CHAPITRE XXVI.

## DISCUSSION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ.

411. Étant donnée une équation du second degré $f(x, y, z) = 0$, nous savons déjà reconnaître la nature de la surface qu'elle représente, au moyen de la décomposition du premier membre en somme algébrique de carrés, ou au moyen de l'équation en S.

Il y a encore d'autres méthodes, que nous allons indiquer dans ce Chapitre; mais nous ferons d'abord une remarque. *Une même équation rapportée à deux systèmes différents d'axes de coordonnées représente des surfaces de même nature.* Pour plus de clarté, considérons deux systèmes d'axes de coordonnées, un système d'axes rectangulaires et un système d'axes obliques, et représentons par $x, y, z$ et X, Y, Z les coordonnées relatives à ces deux systèmes. Comparons les surfaces représentées par les équations $f(x, y, z) = 0$ et $f(X, Y, Z) = 0$. Ces deux équations représentent des surfaces du même degré; supposons d'abord qu'il s'agisse du second degré.

Dans ce cas, si l'on décompose $f(x, y, z)$ en carrés et si l'on a, par exemple,

$$f(x, y, z) \equiv (ax + by + cz + d)^2 + (a'x + b'y + c'z + d')^2 - (a''x + b''y + c''z + d'')^2 + h,$$

on aura évidemment aussi

$$f(X, Y, Z) \equiv (aX + bY + cZ + d)^2 + (a'X + b'Y + c'Z + d')^2 - (a''X + b''Y + c''Z + d'')^2 + h$$

et par conséquent si l'on suppose, pour fixer les idées, $h < 0$, chacune des équations $f(x, y, z) = 0$ ou $f(X, Y, Z) = 0$ représentera un hyperboloïde à une nappe.

Il convient toutefois de remarquer que si l'*espèce* est conservée, la *variété* peut être modifiée. Ainsi, par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

représente une *sphère*, si les axes sont rectangulaires seulement, et un *ellipsoïde* rapporté à trois diamètres conjugués égaux, si les axes sont obliques. De même, l'équation

$$x^2 + y^2 = (az + p)^2 + (bz + q)^2$$

représente un hyperboloïde de révolution si les axes sont rectangulaires; un hyperboloïde encore si les axes sont obliques, mais non plus de révolution.

D'une manière générale, on peut passer de l'une des figures à l'autre au moyen d'une transformation homographique, car les coordonnées X, Y, Z sont des fonctions linéaires des coordonnées $x, y, z$ :

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta''$$

et, par conséquent, les deux surfaces rapportées *aux mêmes axes* sont définies par les équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$f(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'') = 0.$$

Or, à un point correspond un point; à une droite, une droite; à un plan, un plan. Les surfaces représentées par les deux équations précédentes se correspondent point par point; si un point est à distance finie ou infinie, son transformé est aussi à distance finie ou infinie respectivement, ce qui prouve qu'à une nappe de la première surface correspond une nappe de la seconde. Si tous les points de la première surface sont à distance finie, il en sera de même pour

la seconde. A une section plane de l'une correspond une section plane de l'autre; ces deux sections sont des courbes de même degré et à chaque branche infinie de l'une correspond une branche infinie de l'autre. A une tangente correspond une tangente, à une asymptote correspond une asymptote. Ces sections sont de même espèce. On voit donc que les deux surfaces sont, elles aussi, de même espèce : l'une peut être considérée comme une déformation de l'autre. Mais si l'une est une surface de révolution, la seconde ne sera pas, en général, une surface de révolution.

On peut encore remarquer qu'aux génératrices rectilignes de la première surface correspondent les génératrices rectilignes de la seconde; mais à des cercles tracés sur la première correspondent, en général, des ellipses sur la seconde.

### Méthode des contours apparents.

**412.** On peut former d'abord les équations du centre ; la discussion de ces équations donne, comme nous l'avons vu, une première indication. Si la surface a un centre unique à l'infini, c'est un paraboloïde; nous savons distinguer le paraboloïde hyperbolique du paraboloïde elliptique en cherchant, par exemple, la nature des plans directeurs. Si la surface a une ligne de centres à distance finie, c'est un cylindre à base elliptique ou hyperbolique : l'un au moins des plans de coordonnées ne sera pas parallèle à la ligne des centres et, par suite, l'espèce de la section par ce plan déterminera l'espèce du cylindre, ou indiquera s'il s'agit de deux plans sécants. Le cylindre parabolique a une ligne de centres à l'infini, et le système de deux plans parallèles, un plan de centres; on voit ainsi que la discussion des équations du centre suffit, sauf pour les surfaces de la première classe. Pour ces dernières, on peut d'abord transporter l'origine des coordonnées au centre; l'équation prend alors la forme

$$\varphi(x, y, z) + D_1 = 0.$$

Si $D_1 = 0$, on a un cône; on coupera ce cône par les plans de coordonnées. Si l'une des sections se compose de droites réelles, le cône est réel; mais si les trois sections obtenues sont imaginaires, on ne peut rien conclure. Dans ce cas, on coupera encore par des plans parallèles aux plans de coordonnées; si le cône est réel, l'une des sections ainsi obtenues doit être réelle.

Supposons $D_1 \neq 0$; il est très commode le plus souvent de décomposer le polynome $\varphi(x, y, z)$ en carrés. On peut aussi procéder de la manière suivante, si l'un au moins des coefficients des carrés est différent de zéro; soit, par exemple, $A'' \neq 0$. Dans ce cas, en résolvant par rapport à $z$, on met l'équation de la surface sous la forme

$$z = -\frac{B'x + By}{A''} \pm \frac{1}{A''}\sqrt{(B'x + By)^2 - A''(Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + D_1)};$$

ce qu'on peut écrire

$$z = -\frac{B'x + By}{A''} \pm \frac{1}{A''}\sqrt{lx^2 + 2mxy + py^2 - A''D_1}.$$

L'équation

$$lx^2 + 2mxy + py^2 - A''D_1 = 0$$

représente le cylindre circonscrit à la surface et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $z$; on voit, en effet, que la courbe de contact de ce cylindre est définie par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_z = 0;$$

c'est-à-dire

$$z = -\frac{B'x + By}{A''}, \qquad lx^2 + 2mxy + py^2 - A''D_1 = 0.$$

La dernière de ces équations représente, dans le plan des $x, y$, la projection sur ce plan, faite parallèlement à l'axe des $z$, de la courbe de contact du cylindre circonscrit considéré, c'est-à-dire la projection du contour apparent de la surface relativement à la direction de l'axe des $z$. C'est la discussion de la nature de ce contour apparent qui va nous permettre de reconnaître la nature de la quadrique. Pour que $z$ soit réel, il faut et il suffit que l'inégalité

$$(1) \qquad lx^2 + 2mxy + py^2 - A''D_1 \geqq 0$$

soit vérifiée. Nous sommes ainsi conduits à distinguer trois cas, suivant que la courbe de contour apparent est une ellipse réelle, une ellipse imaginaire ou une hyperbole.

1° *Ellipse réelle*. — Si $A''D_1 < 0$, l'inégalité (1) est vérifiée pour tous les points situés à l'intérieur du contour apparent; la quadrique est donc un ellipsoïde.

Si $A''D_1 > 0$, la quadrique se projette à l'extérieur de l'ellipse; c'est un hyperboloïde à une nappe.

2° *Ellipse imaginaire.* — Si $A''D_1 < 0$, la projection de la quadrique sur le plan $xOy$ couvre ce plan tout entier; cette quadrique ne peut être qu'un hyperboloïde à deux nappes.

Si $A''D_1 > 0$, $z$ est imaginaire pour les valeurs réelles de $x$ et de $y$; la quadrique est un ellipsoïde imaginaire.

3° *Hyperbole.* — Si $A''D_1 < 0$, la projection de la quadrique couvre toute la région du centre; c'est donc un hyperboloïde à une nappe.

Si $A''D_1 > 0$, la projection de la quadrique couvre les deux régions distinctes du plan qui constituent l'*intérieur* de l'hyperbole, projection du contour apparent : on a donc affaire à un hyperboloïde à deux nappes.

*Remarque.* — La nature de la quadrique est déterminée par l'*ombre* qu'elle projetterait sur le plan des $x, y$ si les rayons lumineux venaient de l'infini dans la direction de l'axe des $z$. On peut arriver aux conclusions précédentes d'une manière un peu différente. L'axe des $z$ est le diamètre conjugué au plan du contour apparent que nous avons considéré; or, ce diamètre est réel ou imaginaire, suivant que $A''D_1$ est $< 0$ ou $> 0$. Si le contour apparent est une ellipse réelle et si l'on suppose $A''D_1 < 0$, on voit que la surface a une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués réels : c'est donc un ellipsoïde réel. Si, au contraire, $A''D_1 > 0$, deux diamètres conjugués du contour apparent forment avec l'axe des $z$ un système de trois diamètres conjugués, dont deux seulement sont réels; la quadrique est donc un hyperboloïde à une nappe, et ainsi de suite.

**413.** La méthode précédente ne s'applique pas si $A = A' = A'' = 0$.

L'équation

$$ayz + bzx + cxy + d = 0,$$

dans laquelle les coefficients $a$, $b$, $c$, $d$ sont tous supposés différents de zéro, représente une quadrique ayant pour centre unique l'origine des coordonnées et dont le cône asymptote est réel; c'est donc un hyperboloïde. Pour reconnaître la nature de cet hyperboloïde, on peut faire usage de la décomposition en carrés; il est plus simple de procéder ainsi. L'axe des $z$ est une génératrice du cône asymptote; il en résulte que l'hyperboloïde est à une ou deux nappes, suivant qu'il contient ou non des droites parallèles à l'axe des $z$. Cherchons donc si l'on peut déterminer $\alpha$ et $\beta$ de façon que l'équation

$$(a\beta + b\alpha)z + c\alpha\beta + d = 0$$

soit vérifiée quel que soit $z$; ce qui donne

$$a\beta + b\alpha = 0, \qquad c\alpha\beta + d = 0,$$

d'où

$$\frac{bc}{a}\alpha^2 - d = 0.$$

Le système d'équations en $\alpha$ et $\beta$ n'aura de solutions réelles que si $abcd > 0$. Donc, deux cas :

1° $abcd > 0$, hyperboloïde à une nappe;

2° $abcd < 0$, hyperboloïde à deux nappes.

Les conclusions précédentes ne subsistent pas si quelque coefficient s'annule; par exemple, si $a = 0$, l'équation représente un cylindre hyperbolique. Si $d = 0$, on a un cône et deux plans.

## Équation résolue par rapport à l'une des variables.

**414.** L'équation de la quadrique résolue par rapport à $z$, en supposant que $z$ entre au second degré, prend la forme

$$z = ax + by + c \pm \sqrt{f(x, y)},$$

$f(x, y)$ étant au plus du second degré.

L'équation

$$z = ax + by + c$$

représente le plan diamétral conjugué à l'axe des $z$, et $f(x, y) = 0$ est l'équation du cylindre circonscrit parallèle à l'axe des $z$. Cette équation représente donc aussi la projection $C_1$ sur le plan des $x, y$, faite parallèlement à l'axe des $z$, de la courbe C de contact de ce cylindre.

C'est encore la nature de cette conique qui déterminera la nature de la quadrique.

1° C *est une conique à centre.* — La quadrique est alors de la première classe, puisqu'elle est coupée par un plan diamétral suivant une conique à centre. Pour que $z$ soit réel, il faut et il suffit que $x$ et $y$ vérifient l'inégalité $f(x, y) \geqq 0$. On fera donc la même discussion que dans le n° **412**; on pourra aussi étudier la nature du diamètre parallèle à l'axe des $z$ et qui a pour équations, comme on s'en assure aisément, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. On connaîtra ainsi la nature d'un système de trois diamètres conjugués et, par suite, on connaîtra l'espèce de la quadrique.

D'ailleurs $f(x, y) \equiv \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 + \varepsilon'' h^2$, donc l'équation de la quadrique est de la forme

$$(z - ax - by - c)^2 - \varepsilon P^2 - \varepsilon' Q^2 - \varepsilon'' h^2 = 0:$$

on connaît ainsi immédiatement la nature de cette surface.

2° C *est un système de droites concourantes.* — La quadrique est un cône; si les deux droites sont réelles, ce cône est réel. Si les deux droites sont imaginaires, il faudra étudier les sections par les plans de coordonnées.

On a, dans ce cas, $f(x, y) \equiv PQ$; l'équation de la surface est

$$(z - ax - by - c)^2 - PQ = 0,$$

P, Q, $z - ax - by - c$ sont des polynomes distincts : donc l'équation représente bien un cône.

3° C *est un système de deux droites parallèles.* — La surface est un cylindre.

On a $f(x, y) \equiv a'P^2 + b'P + c'$; l'équation est donc

$$(z - ax - by - c)^2 - a'P^2 - b'P - c' = 0;$$

c'est bien l'équation d'un cylindre.

4° C *est une parabole.* — La quadrique étant coupée par un plan diamétral suivant une parabole est un paraboloïde. Les sections par les plans de coordonnées permettront de déterminer la nature du paraboloïde.

D'ailleurs le paraboloïde elliptique se projette à l'intérieur de $C_1$, et le paraboloïde hyperbolique à l'extérieur.

$f(x, y) \equiv \varepsilon P^2 + Q$ : donc l'équation de la quadrique est

$$(z - ax - by - c) - \varepsilon P^2 - Q = 0;$$

c'est un paraboloïde elliptique si $\varepsilon < 0$, hyperbolique si $\varepsilon > 0$.

5° C *se réduit à une seule droite.* — La quadrique est nécessairement un cylindre parabolique ou un système de deux plans.

D'ailleurs $f(x, y) \equiv P$, P étant un polynome de premier degré en $x, y$; l'équation de la quadrique est

$$(z - ax - by - c)^2 - P = 0.$$

6° *$f(x,y)$ est une constante.* — L'équation représente deux plans parallèles.

**415.** Supposons enfin que l'une des coordonnées, $z$ par exemple, n'entre qu'au premier degré, de sorte qu'on puisse mettre l'équation de la quadrique sous la forme

$$z = \frac{f(x,y)}{P} \quad \text{où} \quad P = ax + by + c.$$

Le système $f(x,y) = 0$, $P = 0$ représente deux droites situées sur la surface, et il faut remarquer que, si ces droites sont à distance finie, la surface ne peut être un cylindre, car les génératrices étant parallèles à l'axe des $z$, l'équation ne devrait pas contenir $z$. La nature de la quadrique sera déterminée par la nature de ces deux droites.

Nous supposerons que l'intersection du plan P et de la quadrique soit :

1° *Deux droites réelles.* — La quadrique est un hyperboloïde à une nappe, parce qu'on peut y placer deux droites parallèles et réelles.

Dans le plan $xOy$ l'équation $f(x,y) = 0$ représente une conique C, $P = 0$ représente une sécante. Si $U = 0$, $V = 0$ sont les équations des tangentes à C aux points d'intersection par cette sécante, on a

$$f(x,y) = \alpha P^2 + \beta UV,$$

l'équation de la quadrique peut s'écrire

$$P(z - \alpha P) = \beta UV;$$

c'est donc bien un hyperboloïde à une nappe.

2° *Deux droites imaginaires conjuguées.* — La quadrique est un hyperboloïde à deux nappes, puisque le plan asymptote P la coupe suivant deux droites parallèles imaginaires conjuguées.

3° *Deux droites confondues.* — Le plan P est alors un plan tangent coupant la quadrique suivant une droite double; on a donc un cône.

On peut poser

$$f(x,y) = PQ + R^2,$$

donc l'équation est

$$P(z - Q) - R^2 = 0.$$

4° *Une seule droite à distance finie.* — Le plan P est un plan asymptote coupant la quadrique suivant une seule droite à distance finie : cette surface est un paraboloïde hyperbolique.

Si $f(x, y) = 0$ représente une hyperbole, $P = 0$ doit représenter une parallèle à une asymptote, et, dans ce cas,

$$f(x, y) \equiv (P + \alpha) Q + \beta,$$

l'équation de la quadrique devient

$$P(z - Q) = \alpha Q + \beta.$$

Si $f(x, y) = 0$ représente une parabole, on a

$$f(x, y) \equiv \alpha P^2 + Q,$$

et la quadrique a pour équation

$$P(z - \alpha P) = Q.$$

5° *Deux droites à l'infini.* — La quadrique est alors un cylindre hyperbolique.

On le voit aisément ainsi :

$$f(x, y) \equiv PQ + \alpha,$$

donc la quadrique a pour équation

$$P(z - Q) = \alpha.$$

Dans tout ce qui précède, le polynome $f(x, y)$ est supposé du second degré et indécomposable; mais il peut se faire que $f(x, y)$ soit un produit de deux facteurs, ou que son degré s'abaisse. On a donc à examiner encore un certain nombre de cas. Si $f(x, y)$ est le produit de deux facteurs Q, R distincts de P, on se trouve de nouveau dans le premier cas. Nous pouvons donc laisser ce cas de côté et supposer $f(x, y) \equiv PQ$. Nous aurons ainsi à considérer les cas suivants :

6° $z = \frac{P.Q}{P}$ ou mieux $P(z - Q) = 0$ : deux plans.

7° $z = \frac{Q}{P}$ ou $Pz = Q$ : paraboloïde hyperbolique.

8° $z = \frac{\alpha}{P}$ ou $Pz = \alpha$, $\alpha$ étant une constante : cylindre hyperbolique.

P peut se réduire à une constante; l'équation est, dans ce cas,

$$z = f(x, y).$$

Le polynome $f(x, y)$ est alors nécessairement du second degré et l'on peut avoir encore les cas suivants :

9° $z = \varepsilon(Q^2 + R^2) + h$ : paraboloïde elliptique.

10° $z = Q^2 - R^2 + h$ : paraboloïde hyperbolique.

11° $z = \varepsilon Q^2 + R$ : cylindre parabolique.

*Exemple.* — Considérons l'équation

$$x^2 + 2Byz = h$$

ou

$$z = \frac{h - x^2}{2By}.$$

*Deux cas :* 1° $h > 0$; $x^2 - h = 0$ représente deux plans parallèles au plan $yOz$. Ces plans sont coupés par le plan $xOz$ suivant deux droites parallèles à l'axe des $z$, qui appartiennent à la surface; cette surface est donc un hyperboloïde à une nappe. Le plan $yOz$ coupe la surface suivant une hyperbole ayant pour asymptotes l'axe des $y$ et l'axe des $z$, et les plans parallèles à $zOx$ donnent des paraboles.

2° $h < 0$. La surface est un hyperboloïde à deux nappes.

## Discussion d'une équation tangentielle du second degré (¹).

416. Nous ferons d'abord la remarque suivante : Soit $f(x, y, z, t) = 0$ l'équation ponctuelle *à coefficients réels* d'une quadrique; on obtient son équation tangentielle au moyen de la *substitution linéaire*

$$u = f'_x, \quad v = f'_y, \quad w = f'_z, \quad r = f'_t, \qquad H \neq 0.$$

Donc, en vertu de la loi d'inertie d'Hermite, les premiers membres $f(x, y, z, t)$ et $F(u, v, w, r)$ de *l'équation ponctuelle et de l'équation tangentielle d'une même quadrique* présentent le même nombre de carrés positifs et de carrés négatifs.

Cela posé, on sait que les coordonnées du pôle du plan $(u, v, w, r)$, par rapport à la quadrique représentée par l'équation $F(u, v, w, r) = 0$, sont proportionnelles à $F'_u$, $F'_v$, $F'_w$, $F'_r$; il en résulte que les coordonnées du centre sont $c$, $c'$, $c''$, $a'''$, si l'on pose

$$F(u, v, w, r) \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + a'''r^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cur + 2c'vr + 2c''wr.$$

L'équation du centre est $\frac{1}{2} F'_r = 0$.

On sait que l'équation $F(u, v, w, r) = 0$ représente la polaire réciproque

(¹) Voir *Leçons de l'Agrégation classique de Mathématiques*, par G. Kœnigs; Paris, Hermann.

de la quadrique (dégénérée ou non) représentée par l'équation ponctuelle $F(x, y, z, t) = 0$, par rapport à la quadrique imaginaire représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Soit H le discriminant de la forme $F(x, y, z, t)$. Si $H \neq 0$, l'équation $F(x, y, z, t) = 0$ représente une quadrique qui peut être un ellipsoïde, un hyperboloïde ou un paraboloïde; il en est donc de même de l'équation

$$F(u, v, w, r) = 0.$$

Si $a''' = 0$, cette équation représente un paraboloïde; il est facile de savoir s'il s'agit d'un paraboloïde elliptique ou hyperbolique. En effet, si une surface est réglée, sa polaire réciproque est aussi réglée, les génératrices correspondantes des deux surfaces étant des droites conjuguées par rapport à la quadrique directrice. Il suffira donc de décomposer la forme $F(u, v, w, r)$ en carrés; s'il y a deux carrés positifs et deux négatifs, le paraboloïde sera hyperbolique; dans les autres cas, il sera elliptique. La direction de l'axe du paraboloïde a pour paramètres directeurs $c$, $c'$, $c''$, lesquels ne peuvent être nuls tous les trois; car dans ce cas, $a'''$ étant nul aussi, H serait nul.

Soit en second lieu $a''' \neq 0$. En appliquant la méthode de décomposition en carrés de Gauss, on a

$$F(u, v, w, r) \equiv \frac{1}{a'''}\left(\frac{1}{2} F'_r\right)^2 + \Phi(u, v, w),$$

$\Phi(u, v, w)$ est une forme quadratique, somme de trois carrés. Le cône asymptote a pour équations

$$F'_r = 0, \qquad \Phi(u, v, w) = 0$$

puisque les plans tangents à ce cône sont les plans tangents à la quadrique, menés par son centre.

Si $\Phi(u, v, w)$ est la somme de trois carrés de même signe, le cône asymptote étant imaginaire, la quadrique est un ellipsoïde réel ou imaginaire, suivant que le signe de ces carrés est celui de $-a'''$ ou celui de $a'''$.

Si $\Phi(u, v, w)$ est la somme de carrés de signes contraires, $F = 0$ représente un hyperboloïde. Ce sera un hyperboloïde à une nappe si F est la somme de deux carrés positifs et de deux carrés négatifs, car, $F(x, y, z, t) = 0$ représentant alors une surface réglée, il en est de même de sa polaire réciproque: si F contient trois carrés de même signe, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

Supposons maintenant $H = 0$. L'équation $F(x, y, z, t) = 0$ représentant un cône, $F(u, v, w, r) = 0$ représente alors une conique dont le plan est le plan polaire du sommet du cône.

Le centre de la conique a pour coordonnées $c$, $c'$, $c''$, $a'''$. En effet, les plans tangents parallèles au plan $ux + vy + wz = 0$ sont déterminés par les valeurs de $r$ qui sont les racines de $F(u, v, w, r) = 0$; si $r'$ et $r''$ sont les deux

racines de cette équation, le plan équidistant des deux plans tangents parallèles au plan donné a pour équation

$$ux + vy + wz + \frac{r' + r''}{2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$ux + vy + wz - \frac{cu + c'v + c''w}{a'''} = 0;$$

or ce plan passe par le point fixe ayant pour coordonnées $\frac{c}{a'''}$, $\frac{c'}{a'''}$, $\frac{c''}{a'''}$. Ce point étant à égale distance de tous les couples de plans tangents parallèles est le centre de la quadrique ou de la courbe représentée par l'équation

$$F(u, v, w, r) = 0.$$

Il est facile de déterminer la nature de la conique en cherchant les plans tangents issus de son centre. Il suffit de procéder comme dans le cas d'une quadrique proprement dite. En supposant $a''' \neq 0$, nous emploierons encore la méthode de Gauss et nous poserons

$$F(u, v, w, r) \equiv \frac{1}{a'''}\left(\frac{1}{2}F'_z\right)^2 + \Phi(u, v, w);$$

H étant supposé nul, F est la somme de trois carrés au plus. Si nous supposons qu'un au moins des mineurs du premier ordre de H soit différent de zéro, nous voyons que la forme $\Phi(u, v, w)$ sera la somme de deux carrés. Si ces carrés sont de même signe, la conique est une ellipse réelle si le signe de $a'''$ est différent de celui de $\Phi$, une ellipse imaginaire dans le cas contraire. Si $\Phi$ est la différence de deux carrés, la conique est une hyperbole.

Si $a''' = 0$, la courbe est tangente au plan de l'infini, c'est donc une parabole dont l'axe a pour paramètres directeurs $c$, $c'$, $c''$.

Mais il pourrait arriver que $c = c' = c'' = a''' = 0$; dans ce cas particulier, la fonction F ne dépend plus de $r$; $F'_r$ est donc nul, et, par suite, le point de contact de tout plan tangent est à l'infini; la conique est dans le plan de l'infini, ce que nous savons d'autre part (206). Cette conique est imaginaire, si les trois carrés en lesquels F se décompose ont le même signe, et réelle dans le cas contraire.

Supposons maintenant que $F(u, v, w, r)$ soit la somme de deux carrés; si ces carrés sont de même signe, l'équation $F = 0$ représente deux points imaginaires conjugués, et si les carrés sont de signes contraires, deux points réels.

Enfin, si $F(u, v, w, r)$ est un carré, l'équation représente un point unique.

On peut dresser le Tableau suivant qui résume la discussion :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $H \neq 0$ | $a'' \neq 0$ | $\Phi$ somme de trois carrés du même signe que $a''$ | | Ellipsoïde imaginaire. |
| | | $\Phi$ somme de trois carrés du même signe que $-a''$ | | Ellipsoïde réel. |
| | | $\Phi$ somme de deux carrés du signe $a''$ et d'un carré de signe contraire | | Hyperboloïde à deux nappes. |
| | | $\Phi$ somme d'un carré du signe de $a''$ et deux carrés de signe contraire | | Hyperboloïde à une nappe. |
| | $a'' = 0$ | F somme de deux carrés positifs et de deux carrés négatifs | | Paraboloïde hyperbolique. |
| | | F somme de trois carrés de même signe et d'un carré de signe contraire | | Paraboloïde elliptique. |
| $H = 0$, mais un mineur du premier ordre est différent de zéro | $a'' \neq 0$ | $\Phi$ somme de deux carrés du même signe que $a''$ | | Ellipse imaginaire. |
| | | $\Phi$ somme de deux carrés du même signe que $-a''$ | | Ellipse réelle. |
| | | $\Phi$ somme de deux carrés de signes contraires | | Hyperbole. |
| | $a'' = 0$ | $c, c', c''$ non tous nuls | | Parabole. |
| | | $c = c' = c'' = 0$ | F somme de trois carrés de même signe | Conique imaginaire à l'infini. |
| | | | F somme de trois carrés ayant des signes contraires | Conique réelle à l'infini. |
| $H = 0$, tous les mineurs du premier ordre sont nuls, un mineur du deuxième ordre est différent de zéro | $a'' \neq 0$ | $\Phi$ est un carré du même signe que $a''$ | | Deux points imaginaires conjugués. |
| | | $\Phi$ est un carré du même signe que $-a''$ | | Deux points réels. |
| | $a'' = 0$ | $c, c', c''$ non tous nuls | | Un point à l'infini et un point à distance finie. |
| | | $c = c' = c'' = 0$ | | Deux points à l'infini. |
| $H = 0$, tous les mineurs du second ordre sont nuls, F est un carré. | $a'' \neq 0$ | | | Un point à distance finie. |
| | $a'' = 0$ | | | Un point à l'infini. |

Il convient de rappeler qu'une seule équation $F(u, v, w, r) = 0$ ne peut jamais représenter ni un cône ni un cylindre.

## EXERCICES.

I. Reconnaître la nature des quadriques représentées par les équations suivantes :

1. $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1.$

On formera l'équation en S et l'on cherchera dans quel cas la surface est de révolution, en supposant les axes rectangulaires.

2. $a(x^2 + yz) + b(y^2 + zx) + c(z^2 + xy) = 1.$

3. $a(x^2 - 2yz) + b(y^2 - 2zx) + c(z^2 - 2xy) = 1.$

4. $x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(yz+zx+xy)=2m^3-3m+1$. Discuter quand $m$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

5. $x^2-y^2+2z^2-2yz-4zx+4xy+2x-4y-4=0$.

6. $x^2-y^2+2z^2-2yz+4zx+4xy+2x-4y-1=0$. Trouver les génératrices rectilignes.

7. $3x^2+8y^2+24z^2-28yz-18zx+10xy-2x+4y=0$,

8. $2x^2+5y^2+2z^2+2yz+6xy+2y+4z+2=0$.

9. $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0$.

10. $3x^2+2y^2+2z^2+2yz+6x+6y+6z+9=0$.

11. $3x^2+y^2+z^2+yz-3zx-2xy+y+2=0$.

12. $x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx+2xy-2x-2y+2z=0$.

13. $x^2+2y^2+z^2-2yz-2xy+2y-2z+1=0$.

14. $x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy-x+y-3z=0$.

15. $x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy-2x+2y-6z+1=0$.

16. $x^2+y^2+2z^2+4yz-2zx-2xy+2y-3=0$.

17. $3x^2+2y^2+4yz-2zx-4x-8z-8=0$.

18. $x^2-y^2-2z^2-4yz+2xy+2y+2z=0$.

19. $x^2+6yz+3zx+2xy+x+3z=0$.

20. $x^2-2y^2+z^2-4zx+2xy+4y+4z-9=0$.

21. $x^2+3y^2+2z^2+4yz+2xy-3x-4y-3z=0$.

22. $x^2+25y^2+9z^2-30yz+6zx-10xy-2x-2y=0$.

23. $x^2+y^2-2z^2+2yz+2zx+2xy-4x-2y+2z=0$.

Les exercices 5 à 23 sont empruntés au *Manuel des candidats à l'École Polytechnique* de E. Catalan.

24. $x^2+y^2+z^2-2yz\cos\lambda-2zx\cos\mu-2xy\cos\nu=1$.

Cas où $\lambda+\mu+\nu=\pi$.

25. $a(y-z)^2+b(z-x)^2+c(x-y)^2=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$.

26. $x^2-yz+1=0$.

27. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2$.

28. $x^2+y^2+z^2=(ax+by+cz)^2+h(ax+by+cz)$.

29. $ay(y+z)+bx(x+z)+xy=0$. Lieu des centres. Indiquer les particularités relatives aux axes de coordonnées, aux sections planes. Peut-il y avoir des sections circulaires? Ces surfaces peuvent-elles être de révolution?

Montrer que leur enveloppe est une quadrique quand $ab$ reste constant.

(Brocard.)

30. $x^2 - 2xy + \lambda z^2 - 2x + \mu z - 1 = 0.$ (Picquet.)

31. $z = \alpha x + \beta y + \gamma \pm \sqrt{x^2 - y^2 + ax + by + c}.$ (Fouret.)

32. $z = \alpha x + \beta y + \gamma \pm \sqrt{(lx + my)^2 + ax + by + c}.$ (Fouret.)

II. Reconnaître la nature des quadriques définies par les équations tangentielles suivantes :

33. $7v^2 - 3w^2 + r^2 - 6uv + 2ur - 6vr = 0.$

34. $2u^2 + 10v^2 + 3w^2 + r^2 - 2uw - 6uv + 2ur - 6vr = 0.$

35. $2u^2 + 8v^2 - 2uw - 6uv + r^2 + 2ur - 6vr = 0.$

36. $2vw + 2wu + 2uv + 2rw - r^2 = 0.$

37. $2u^2 + v^2 - w^2 - 2ur - 2vr = 0.$

38. $2u^2 + 2v^2 + 3w^2 - 4vr = 0.$

39. $uv - vw + wu - 2v + 1 = 0.$

40. $u^2 - v^2 - 2w^2 + 3vw + wu - 2u - w + 1 = 0.$

# CHAPITRE XXVII.

## DÉTERMINATION DES QUADRIQUES.

### Nombre de conditions déterminant une quadrique. Conditions linéaires.

417. L'équation la plus générale du second degré à trois variables, $f(x, y, z) = 0$, renferme dix coefficients, et, par suite, neuf paramètres. Il faut donc neuf conditions pour déterminer une quadrique. Lorsqu'une condition s'exprime par une équation du premier degré entre les coefficients de l'équation générale, nous dirons que cette condition est *linéaire*. D'après cela, donner neuf conditions linéaires, c'est donner neuf équations du premier degré, homogènes par rapport aux dix inconnues A, A', ..., D. On sait qu'un pareil système admet toujours des solutions non toutes nulles; mais pour qu'une solution convienne il faut encore que l'un au moins des

coefficients des termes du second degré soit différent de zéro, si l'on rejette les quadriques dégénérées en système de deux plans dont l'un au moins soit le plan de l'infini. Les choses étant entendues ainsi, on voit que, si l'on cherche une quadrique assujettie à neuf conditions linéaires, trois cas peuvent se présenter : 1° le problème est impossible; 2° a une seule solution ou 3° une infinité de solutions. Si le déterminant principal du système des équations linéaires données est du neuvième degré, les rapports de neuf des coefficients au dixième sont déterminés, et l'on peut former une seule équation du second degré qui vérifie les conditions données; mais il peut arriver, comme nous l'avons fait remarquer, que cette équation ne représente pas une quadrique proprement dite. Si le déterminant principal est du huitième degré, deux des coefficients peuvent être pris arbitrairement et les huit autres sont des fonctions linéaires et homogènes de ces deux coefficients arbitraires; on peut former une infinité d'équations vérifiant les conditions données et la solution la plus générale est représentée par une équation de la forme

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) = 0,$$

$f_1$ et $f_2$ désignant deux polynomes déterminés et $\lambda_1$, $\lambda_2$ deux arbitraires. Si le déterminant principal est du septième degré, la solution la plus générale contiendra trois arbitraires et sera de la forme

$$\lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) + \lambda_3 f_3(x, y, z) = 0,$$

et ainsi de suite.

Tout ce qui précède s'applique à l'équation en coordonnées tangentielles $F(u, v, w, r) = 0$; il convient de se rappeler que les dégénérescences sont alors des coniques ou des points.

Les considérations précédentes s'appliquent aux équations de tous les degrés. L'équation à trois variables du degré $n$ renferme $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$ coefficients; on voit donc qu'il faut

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 1$$

conditions linéaires pour déterminer une surface d'ordre $n$.

**418.** Théorème fondamental. — *Il y a une seule quadrique passant par neuf points donnés ou il y en a une infinité.*

En effet, l'équation qui exprime qu'une quadrique passe par un point donné est linéaire par rapport aux coefficients de l'équation du second degré; on a donc, puisque l'on donne neuf points, neuf équations de la forme

$$\begin{aligned} A x_i^2 + A' y_i^2 + A'' z_i^2 + 2 B y_i z_i + 2 B' z_i x_i + 2 B'' x_i y_i \\ + 2 C x_i + 2 C' y_i + 2 C'' z_i + D = 0, \end{aligned}$$

où l'indice $i$ prend les valeurs 1, 2, 3, ..., 9.

D'ailleurs, les coefficients des termes du second degré ne peuvent être tous nuls que si les neuf points donnés sont dans un même plan, puisque, si ces coefficients étaient nuls, il y aurait un système de valeurs non toutes nulles C, C', C'', D telles que les équations

$$2 C x_i + 2 C' y_i + 2 C'' z_i + D = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

fussent vérifiées par les coordonnées des neuf points donnés. S'il en était ainsi, on pourrait former une infinité d'équations du second degré satisfaisant aux conditions données, puisqu'il suffirait de multiplier le polynome $2Cx + 2C'y + 2C''z + D$ par un polynome linéaire quelconque; l'équation

$$(2Cx + 2C'y + 2C''z + D)(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4) = 0$$

représenterait une infinité de quadriques dégénérées passant par les neuf points donnés. On voit ainsi que le problème n'est jamais impossible. Donc on peut toujours faire passer une seule quadrique ou une infinité de quadriques par neuf points donnés.

419. *Autre méthode.* — Supposons que l'on puisse construire un tétraèdre ayant pour sommets quatre des neuf points donnés, par exemple A, B, C, D; si l'on prend ce tétraèdre pour tétraèdre de référence, l'équation d'une quadrique passant par ces quatre points est de la forme

$$axy + bxz + cxt + dyz + eyt + fzt = 0$$

et, réciproquement, toute équation de cette forme représente une quadrique circonscrite au tétraèdre de référence. Il reste à déterminer les coefficients $a, b, \ldots, f$ de façon que cette équation soit vérifiée par les coordonnées des cinq autres points, ce qui donne cinq équations du premier degré, homogènes par rapport aux coefficients inconnus. Supposons que parmi ces points il y en ait au moins trois qui ne soient pas dans le plan d'une face du tétraèdre ABCD, et, en outre, forment, avec le sommet opposé à cette face, un té-

traèdre; dans ce cas, le degré du déterminant principal sera au moins égal à trois. En effet, si les points E, F, G ont pour coordonnées $x_1, y_1, z_1, t_1$; $x_2, y_2, z_2, t_2$; $x_3, y_3, z_3, t_3$ et si aucun de ces points ne se trouve dans la face BCD ayant pour équation $x = 0$, le déterminant des coefficients de $a$, $b$, $c$, c'est-à-dire

$$x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix},$$

sera différent de zéro, si l'on suppose en outre que les quatre points A, E, F, G ne soient pas dans un même plan.

Si ces conditions sont remplies (et, en particulier, elles le seront si quatre quelconques des neuf points donnés ne sont pas dans un même plan), ou bien il y aura une seule quadrique passant par les neuf points donnés, ce qui arrivera si le degré du déterminant principal est égal à cinq; ou s'il y a une infinité de quadriques répondant à la question, le nombre des paramètres arbitraires sera au plus égal à deux, et, dans ce cas, l'équation générale des quadriques passant par les neuf points donnés sera de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

$\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ étant des coefficients arbitraires et $f_1$, $f_2$, $f_3$ trois polynomes déterminés. Dans ce cas, les quadriques passant par les sept points A, B, C, D, E, F, G passeront par les deux autres.

**120.** Théorème corrélatif. — *Il y a une seule quadrique tangente à neuf plans donnés ou il y en a une infinité.*

La condition pour qu'une quadrique soit tangente à un plan donné $(u_1, v_1, w_1, r_1)$ s'exprime en écrivant que l'équation tangentielle du second degré $F(u, v, w, r) = 0$ est vérifiée quand on y remplace les coordonnées tangentielles courantes par celles du plan donné; donner neuf plans tangents c'est donc donner neuf conditions linéaires par rapport aux coefficients de l'équation tangentielle.

Le problème est de même nature que le précédent, mais on peut le ramener à ce dernier par la méthode des polaires réciproques. S'il existe une quadrique Q tangente à neuf plans $P_1, P_2, \ldots, P_9$, sa polaire réciproque Q' par rapport à une quadrique D passera par les pôles $p_1, p_2, \ldots, p_9$ de ces neuf plans, par rapport à D, et réciproquement.

Il peut arriver que Q' soit un cône; dans ce cas, la quadrique cherchée Q dégénère en une conique; si Q' est un système de plans, Q dégénère en un système de points.

**421.** *Cas particuliers.* — L'équation d'un cône de second degré ne renferme que huit paramètres arbitraires, car $H = 0$. D'ailleurs $\Delta$ est différent de zéro, donc l'équation $H = 0$ permet de déterminer D en fonction rationnelle des autres coefficients. Il faudra donc huit conditions pour déterminer un cône du second degré; en particulier il y a, en général, un nombre déterminé de cônes du second degré passant par huit points donnés. En écrivant que l'équation du second degré est vérifiée par les coordonnées de ces huit points, si le déterminant principal est du degré huit, on pourra résoudre le système des huit équations obtenues au moyen de deux arbitraires $\lambda$, $\mu$, et il restera à écrire la condition $H = 0$, ce qui donnera une équation du quatrième degré en $\frac{\lambda}{\mu}$; le problème, qui revient à trouver les cônes du second degré passant par les points communs à deux quadriques, admet donc, en général, quatre solutions. Donner comme conditions qu'une quadrique passe par huit points et soit un cône, c'est bien donner neuf conditions; mais ces conditions n'étant pas toutes linéaires le problème peut avoir plus d'une solution, le nombre des solutions étant fini.

L'équation d'un paraboloïde renferme huit paramètres, puisque $\Delta = 0$.

L'équation d'un paraboloïde hyperbolique dont l'axe n'est pas parallèle à l'axe des $x$, peut s'écrire

$$(x + by + cz)(x + b'y + c'z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

et renferme huit paramètres; si l'on demande un paraboloïde passant par huit points donnés, le problème est déterminé et a, en général, plus d'une solution. En écrivant que l'équation du second degré est vérifiée par les coordonnées des huit points, on exprimera les coefficients de l'équation en fonction linéaire et homogène de deux paramètres $\lambda$, $\mu$, et en écrivant la condition $\Delta = 0$, on aura une équation du troisième degré en $\frac{\lambda}{\mu}$. Le problème, qui revient à faire passer un paraboloïde par les points communs à deux quadriques, a donc en général trois solutions.

Le paraboloïde est tangent au plan de l'infini; d'une manière plus générale, il y a trois quadriques passant par huit points et tangentes à un plan, et, *corrélativement,* trois quadriques tangentes à huit plans et passant par un point.

Il convient de remarquer que l'équation générale d'une quadrique d'espèce déterminée peut renfermer, en apparence, un nombre surabondant de paramètres. Ainsi l'équation

$$(ax + by + cz)^2 + \varepsilon(a'x + b'y + c'z)^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

représente un paraboloïde quelconque; il semble qu'elle renferme neuf paramètres; mais il est évident que les coefficients de l'ensemble $\varphi(x, y, z)$ des termes du second degré ne sont pas arbitraires, puisque le discriminant de $\varphi$ est nul.

L'équation d'un cylindre à centres ne doit renfermer que sept paramètres, puisque $H = 0$, $\Delta = 0$. Donc sept points suffisent pour déterminer un cylindre.

L'équation d'un système de deux plans qui se coupent ne doit renfermer que six paramètres, de même que l'équation d'un cylindre parabolique.

L'équation d'une quadrique de révolution ne renferme que sept paramètres; on peut, en effet, la mettre sous la forme

$$S(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D + (ux + vy + wz)^2 = 0,$$

ou encore

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (ux + vy + wz + h)^2.$$

### Conditions multiples. Éléments remarquables.

**422.** On appelle *élément remarquable* d'une quadrique : un point, un plan, une droite, une courbe, une surface qui sont déterminés quand la quadrique est donnée. Exemples : un centre, un sommet, un plan tangent au sommet, un plan principal, un plan cyclique mené par le centre, un axe, une génératrice rectiligne passant par un sommet; une section principale, le cône asymptote, la sphère de Monge sont des éléments remarquables. Si pour déterminer un élément remarquable il faut $p$ équations de conditions, donner cet élément, c'est donner $p$ conditions.

Si un élément n'est pas entièrement déterminé quand la quadrique est donnée et si sa détermination complète exigeant $p$ conditions il en manque $q$, la connaissance de cet élément ne vaudra évidemment que $p - q$ conditions. Nous allons indiquer combien de conditions valent les principaux éléments d'une quadrique.

Un point, un plan tangent valent chacun une condition; mais un plan tangent et son point de contact valent trois conditions. En

effet, si l'on prend le point de contact pour origine des coordonnées, l'axe des $z$ étant la normale en ce point, l'équation de la quadrique peut se mettre sous la forme $\varphi(x, y, z) + z = 0$, et ne renferme plus que six paramètres arbitraires.

Une tangente vaut une condition qu'on obtient, par exemple, si les équations de la droite sont $x = az + p$, $y = bz + q$, en écrivant que l'équation $f(az + p, bz + q, z) = 0$ a une racine double.

Le centre vaut trois conditions, qu'on obtient en écrivant que les plans du centre passent par ce point donné. Un sommet, un plan principal, un plan tangent en un sommet (sans le sommet) valent trois conditions.

Les équations d'une droite dépendant de quatre paramètres, toute droite remarquable, un axe par exemple, vaut quatre conditions.

Une génératrice du cône asymptote ne vaut que trois conditions, car il faut pour la déterminer donner encore une condition. Un diamètre ne vaut que deux conditions : on les obtiendra en écrivant que les coordonnées du centre vérifient les deux équations données de ce diamètre.

La sphère de Monge vaut quatre conditions.

Une conique, tracée sur la quadrique, vaut cinq conditions; car, pour qu'une quadrique passe par une conique, il est nécessaire et suffisant qu'elle en contienne cinq points. Pour le voir analytiquement, prenons pour plan des $x, y$ le plan de cette conique. L'équation de la quadrique sera alors de la forme

$$(ax + by + cz + d)z + f(x, y) = 0,$$

$f(x, y)$ étant un polynome du second degré donné. Cette équation ne renferme que quatre paramètres; donc la conique donnée vaut cinq conditions. Un cercle tracé sur la quadrique vaut aussi cinq conditions, comme une conique quelconque; les axes étant choisis comme plus haut, l'équation de la quadrique sera

$$(ax + by + cz + d)z + x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

si, pour simplifier, l'axe des $x$ et l'axe des $y$ sont deux diamètres rectangulaires du cercle donné. D'une manière générale, si le cercle est défini par l'intersection d'une sphère et d'un plan donné, l'équation de la quadrique peut s'écrire

$$\sigma + PQ = 0,$$

$\varpi$ et P étant donnés et Q étant un polynome linéaire arbitraire, et, par suite, renfermant quatre paramètres.

Un plan cyclique ne vaut que deux conditions, car cela revient à donner deux points : les points d'intersection de ce plan et du cercle de l'infini. Si on prend le plan donné pour plan des $x$, $y$, les axes étant rectangulaires, les deux équations $A = A'$, $B'' = 0$ expriment que ce plan coupe la quadrique suivant le cercle.

Un ombilic, avec le plan tangent correspondant, vaut cinq conditions; prenons, en effet, l'ombilic donné pour origine des coordonnées, le plan des $x, y$ étant le plan tangent en ce point; l'équation de la surface sera, les axes étant supposés rectangulaires,

$$x^2 + y^2 + z(ax + by + cz + d) = 0:$$

elle contient donc quatre paramètres arbitraires. On peut remarquer que $ax + by + cz + d = 0$ représente la direction des plans cycliques associés au plan $z = 0$. En écrivant ainsi l'équation précédente :

$$x^2 + y^2 + z^2 + z(ax + by + c'z + d) = 0,$$

et en faisant un changement de plans de coordonnées, si $x_0$, $y_0$, $z_0$ sont les coordonnées de l'ombilic dans le nouveau système, l'équation de la surface sera de la forme

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ + [\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)]\,P = 0,\end{aligned}$$

P étant un polynome du premier degré, arbitraire. Si le plan tangent en l'ombilic n'est pas donné, l'équation précédente renferme six paramètres; donc un ombilic seul vaut trois conditions. Un plan directeur d'un paraboloïde vaut deux conditions; il en vaut trois s'il passe par l'axe. Mais si l'on n'a pas encore exprimé que la surface est un paraboloïde, pour exprimer que $ux + vy + wz = 0$ est un plan directeur, il faudra exprimer que $\varphi(x, y, z)$ est divisible par $ux + vy + wz$, ce qui exige trois conditions.

Le cône des directions asymptotiques vaut cinq conditions, puisque si l'on connaît le cône des directions asymptotiques d'une quadrique on connaît l'ensemble des termes du second degré de son équation. D'ailleurs, donner le cône des directions asymptotiques, c'est donner une conique dans le plan de l'infini.

Le cône asymptote vaut huit conditions, car si l'on prend le sommet pour origine, l'équation de la quadrique est $\varphi(x, y, z) + \lambda = 0$, le polynome $\varphi$ étant donné et $\lambda$ étant un paramètre arbitraire.

**423**. Le nombre de conditions fournies par plusieurs éléments n'est pas toujours la somme des nombres de conditions correspondant à chacun de ces éléments donnés séparément.

Ainsi le centre et un axe ne valent que cinq conditions et non pas sept, car le centre étant donné il ne reste plus à donner que la direction d'un axe pour déterminer cet axe. D'ailleurs, si l'on prend pour axe des $x$ l'axe donné, l'origine étant le centre, l'équation de la quadrique sera, les axes étant rectangulaires,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + D = 0.$$

Cette équation renferme quatre paramètres arbitraires.

Une génératrice rectiligne vaut trois conditions, puisqu'il suffit d'exprimer que trois points d'une droite sont sur une quadrique pour que la droite tout entière y soit contenue. Deux génératrices du même système valent, d'après cela, six conditions; mais deux génératrices de systèmes différents, ayant un point commun, ne valent plus que cinq conditions (c'est le cas d'un ombilic, qui équivaut à deux génératrices isotropes de systèmes différents). Dès qu'on a exprimé que l'une de ces droites est sur la quadrique, la seconde ayant déjà un point sur la quadrique, il n'y a plus qu'à exprimer qu'elle en a deux autres.

Trois génératrices du même système valent neuf conditions; nous savons d'ailleurs que la quadrique est alors déterminée.

Deux génératrices d'un système et une génératrice du second système ne valent que sept conditions, puisque cette dernière génératrice rencontre les deux premières.

Quatre génératrices, dont deux de chaque système, valent huit conditions.

Trois diamètres conjugués, donnés en position seulement, valent six conditions; si l'on donne en outre leurs longueurs, cela fait en tout neuf conditions, car la quadrique est alors déterminée.

Cherchons combien valent de conditions une conique et une droite, une conique et deux droites.

Nous remarquerons d'abord que : *une droite et une conique si-*

*tuées sur une quadrique ont un point commun*. En effet, le point de rencontre de la droite et du plan de la conique est évidemment sur la conique, puisque cette courbe est le lieu des points de la quadrique qui sont situés dans son plan. Si la droite D était parallèle au plan P de la conique, la section de la quadrique par le plan parallèle à P mené par D étant homothétique à la quadrique, et d'autre part, cette section se composant de la droite D et d'une seconde droite, D est parallèle à l'une des asymptotes de la conique, et, par conséquent, rencontre cette conique à l'infini. Remarquons enfin que la droite ne peut être dans le plan de la conique.

La démonstration par le calcul est immédiate.

Il résulte de là qu'une conique et une génératrice rectiligne valent sept conditions.

Une conique et deux génératrices de même système valent neuf conditions; mais si les deux génératrices sont de systèmes différents elles ne valent plus que huit conditions. Il convient de remarquer que toutes les quadriques qui passent par une conique C et par deux droites coupant cette conique en A et B et se rencontrant en M, ont trois plans tangents communs dont les points de contact sont les points A, B, M. Si les deux droites coupent la conique en un même point, la tangente en ce point à la conique et les deux droites doivent être dans un même plan. L'ensemble vaut donc encore huit conditions.

Deux coniques tracées sur une même quadrique ont deux points communs, qui sont les points d'intersection de la quadrique et de la droite commune aux plans de ces coniques; donc deux coniques données, devant avoir deux points communs pour être sur une quadrique, valent seulement huit conditions.

### Paramètres de grandeur. Paramètres de position.

**424.** Quand une surface est déterminée en grandeur, il faut, en général, six paramètres pour déterminer sa position par rapport à un système donné d'axes. En effet, considérons un trièdre lié invariablement à cette surface; il suffira de connaître la position de ce trièdre par rapport au trièdre des axes pour connaître la position de la surface elle-même. Or il faut six paramètres pour fixer la position d'un trièdre, savoir : 1° les trois coordonnées de son sommet, les angles que l'une de ses arêtes fait avec deux des axes de coordonnées et l'angle qu'une seconde arête fait avec l'un de ces axes. S'il faut $p$ paramètres pour déterminer la surface en grandeur et position, on en conclut que le nombre de ses paramètres de grandeur est égal à $p-6$. C'est ce que l'on

vérifie pour une quadrique à centre dont la grandeur dépend de trois paramètres qui sont les longueurs de ses trois axes, ou encore pour un paraboloïde dont la grandeur ne dépend que de deux paramètres qui sont les paramètres des deux sections principales. Mais le nombre de paramètres de positions peut s'abaisser; c'est ce qui arrive dans les cas, et seulement dans les cas où une translation ou une rotation laissent la figure invariable.

Il s'abaisse d'une unité pour les surfaces de révolution et les cylindres, de deux unités pour le cylindre de révolution, de trois unités pour la sphère.

Ainsi, pour déterminer en position une surface de révolution de grandeur donnée, cinq paramètres suffisent, car il suffit de connaître la position de l'axe et un point de cet axe lié à la surface. Pour une sphère, trois paramètres de position suffisent, qui sont les coordonnées de son centre.

## Conditions pour qu'une équation du second degré représente une quadrique d'espèce déterminée.

**425.** Nous connaissons déjà les conditions pour que l'équation représente un paraboloïde, un cône, un cylindre; nous avons, en effet, résolu ces questions en faisant la classification des quadriques. Nous allons compléter ce qui a été dit à cet égard.

1° *Cylindres.* — Nous savons que si l'on suppose $AA' - B''^2 \neq 0$, les conditions pour que l'équation du second degré représente un cylindre sont $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$ (**227**). Il convient de montrer que ces conditions sont équivalentes à $\Delta = 0$, $H = 0$.

En effet, on peut déterminer les nombres $x$ et $y$, tels que

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B' &= 0, \\ B''x + A'y + B &= 0, \\ B'x + By + A'' &= 0, \end{aligned}$$

puisqu'on suppose le déterminant de ce système nul et $AA' - B''^2 \neq 0$. Or, on peut poser

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & 0 & C \\ B'' & A' & 0 & C' \\ B' & B & 0 & C'' \\ C & C' & Cx + C'y + C'' & D \end{vmatrix} = -(Cx + C'y + C'')\,\Delta_1,$$

donc l'équation $\Delta_1 = 0$ entraîne $H = 0$. Réciproquement, si l'on suppose $\Delta = 0$, $H = 0$, on a nécessairement $\Delta_1 = 0$; en effet, si le

coefficient $Cx + C'y + C''$ était nul, on aurait

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B' &= 0, \\ B''x + A'y + B &= 0, \\ Cx + C'y + C'' &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tirerait encore $\Delta_1 = 0$.

2° *Deux plans qui se coupent.* — Pour exprimer que l'équation du second degré représente deux plans qui se coupent, on exprime que les plans du centre ont une droite commune à distance finie et que cette droite est sur la quadrique.

Si l'on suppose $AA' - B''^2 \neq 0$, les conditions sont

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière condition s'obtient en écrivant que les coordonnées d'un centre quelconque vérifient l'équation $f'_t = 0$.

3° *Cylindre parabolique.* — On écrit que l'équation en S a une racine double égale à zéro : si $BB'B'' \neq 0$, les conditions sont donc

$$A - \frac{B'B''}{B} = 0, \qquad A' - \frac{B''B}{B'} = 0, \qquad A'' - \frac{BB'}{B''} = 0.$$

Si, par exemple, $B' = B'' = 0$, et il faudra poser encore : $A = 0$, $A'A'' - B^2 = 0$.

4° *Deux plans parallèles.* — Il suffit d'écrire que les plans du centre sont confondus. Si l'on suppose $A \neq 0$, on obtient ainsi pour conditions

$$AA' - B''^2 = 0, \qquad AB - B'B'' = 0, \qquad AC' - CB'' = 0,$$
$$AA'' - B'^2 = 0, \qquad AC'' - B'C = 0.$$

On peut, quand $BB'B'' \neq 0$, écrire ces conditions sous forme plus symétrique

(1) $$A - \frac{B'B''}{B} = 0, \qquad A' - \frac{B''B}{B'} = 0, \qquad A'' - \frac{BB'}{B''} = 0,$$

(2) $$BC = B'C' = B''C''.$$

En effet, si les conditions (1) sont vérifiées, l'équation de la qua-

drique peut s'écrire

$$BB'B''\left(\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}\right)^2+2Cx+C'y+2C''z+D=0;$$

elle représente donc un cylindre parabolique, et, si l'on veut qu'elle représente deux plans parallèles, il faut et il suffit que les équations

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}=0, \qquad Cx+C'y+C''z=0$$

représentent un même plan, ce qui donne les équations (2).

## EXERCICES.

1. Exprimer qu'une quadrique a pour centre un point donné et pour axe une droite passant par ce point.

2. Équation générale des quadriques passant par une conique et une droite. Si l'on prend la droite pour axe des $z$ et si $f(x, y)=0$ est l'équation de la conique dans le plan des $x, y$; on trouve $f(x, y)+z(ax+by)=0$. Le polynome $f(x, y)$ n'a pas de terme constant. Si $P=0$ est, avec des axes quelconques, l'équation du plan de la conique et $f(x, y, z)=0$ l'équation du cylindre ayant cette conique pour directrice et dont les génératrices sont parallèles à la droite donnée, enfin $Q=0$, $R=0$ étant les équations de cette droite, on trouve $f(x, y, z)+P(\alpha Q+\beta R)=0$. Prendre aussi un tétraèdre de référence dont la droite soit une arête, la conique donnée étant dans le plan d'une face.

3. Traiter le même problème quand la droite est parallèle au plan de la conique.

4. Équation générale des quadriques passant par deux coniques données. On suppose l'une de ces coniques dans le plan $xOy$, l'autre dans le plan $xOz$; elles rencontrent l'axe des $x$ aux mêmes points. On trouve

$$\begin{aligned}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2\lambda yz+2B'zx+2B''xy\\+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,\end{aligned}$$

$\lambda$ étant un paramètre variable.

5. Exprimer que deux quadriques ont un plan principal commun, ou un axe commun, ou un plan directeur commun, ou un plan cyclique commun, la même sphère de Monge, etc.

6. Exprimer que deux quadriques ont une droite commune. (*Voir* C. Bourlet, *Nouvelles Annales*, p. 434; 1894.)

7. Combien donne-t-on de conditions quand on assujettit une quadrique à être inscrite à un cône du second degré donné.

8. On donne le plan polaire d'un point par rapport à une quadrique, combien cela fait-il de conditions?

9. On veut que deux droites données soient conjuguées par rapport à une quadrique; combien cela fait-il de conditions?

10. On donne l'axe d'une quadrique de révolution; combien cela vaut-il de conditions?

# CHAPITRE XXVIII.

## INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES.

### Théorèmes généraux.

**426.** Théorème. — *L'intersection de deux quadriques est, en général, une courbe gauche du quatrième ordre.*

Considérons deux quadriques Q, Q'; les intersections de ces deux surfaces par un plan quelconque sont deux coniques C, C' qui ont quatre points communs. Un plan quelconque coupe donc la courbe d'intersection des deux quadriques en quatre points; par suite, cette courbe est du quatrième ordre.

Mais, comme nous le verrons, cette courbe peut se décomposer en deux coniques, en une conique et deux droites, en une cubique et une droite, en quatre droites.

**427.** *Équation générale des quadriques passant par l'intersection de deux quadriques.*

Soient $f = 0$, $g = 0$ les équations ponctuelles de deux quadriques. L'équation

$$\lambda f + \mu g = 0$$

est vérifiée par les coordonnées des points communs aux deux quadriques $f$, $g$. Si l'on peut déterminer $\lambda$ et $\mu$ de manière que l'équa-

tion précédente représente l'une quelconque Q des quadriques passant par l'intersection des quadriques données, cette équation sera l'équation générale demandée.

Soient $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées d'un point quelconque M de la quadrique Q, non situé sur la courbe d'intersection des quadriques $f$, $g$. L'équation

$$fg_1 - gf_1 = 0$$

dans laquelle $f_1$ et $g_1$ représentent ce que deviennent les polynomes $f$ et $g$ quand on y substitue aux coordonnées courantes celles de M, définit une quadrique $Q_1$ passant par le point M et par les points communs aux quadriques $f$, $g$. Si l'on coupe les deux quadriques Q et $Q_1$ par un plan quelconque passant par M, les deux coniques obtenues auront cinq points communs et, par suite, coïncideront. Or, si les intersections de deux quadriques par chacune des trois faces d'un trièdre coïncident, ces deux quadriques coïncident, comme on s'en assure aisément en les rapportant à ce trièdre. On voit, par ce qui précède, que les quadriques Q et $Q_1$ coïncident et, par suite, la proposition est établie.

*Remarque.* — La proposition précédente peut être en défaut; si les deux quadriques données dégénèrent en systèmes de plans ayant une droite commune, et définis par les équations

$$PQ = 0, \qquad aP^2 + bPQ + cQ^2 = 0,$$

l'équation

$$aP^2 + (b + \lambda) PQ + cQ^2 = 0$$

ne saurait représenter tous les systèmes de deux plans passant par la même droite.

**428.** Théorème. — *La classe de la surface développable circonscrite à deux quadriques est égale à 4.*

En effet, le nombre des plans tangents à deux quadriques, qu'on peut mener par un point donné, est égal au nombre des plans tangents communs aux deux cônes ayant ce point pour sommet et circonscrits à ces quadriques, et ce nombre est égal à 4.

**429.** Théorème. — *Si* $F(u, v, w, r) = 0$, $G(u, v, w, r) = 0$ *sont les équations tangentielles de deux quadriques, l'équation*

$$\lambda F(u, v, w, r) + \mu G(u, v, w, r) = 0$$

*est l'équation générale des quadriques inscrites à la développable circonscrite aux deux premières.*

Il suffit de remarquer que l'équation

$$\lambda F(x, y, z, t) + \mu G(x, y, z, t) = 0$$

représente le faisceau des quadriques passant par l'intersection des deux quadriques définies par les équations ponctuelles

$$F(x, y, z, t) = 0, \qquad G(x, y, z, t) = 0$$

et de transformer, par polaires réciproques, la quadrique directrice ayant pour équation $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$.

430. Théorème. — *Trois quadriques ont, en général, huit points communs.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de Bézout relatif au nombre de solutions d'un système d'équations simultanées; on peut l'établir directement de la manière suivante.

Rapportons les trois quadriques à un tétraèdre de référence, dont un sommet soit l'un des points communs aux trois quadriques. Les équations de ces quadriques sont de la forme

$$f\,(x, y, z) + t g\,(x, y, z) = 0,$$
$$f_1(x, y, z) + t g_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) + t g_2(x, y, z) = 0;$$

$f, f_1, f_2$ désignant des polynomes homogènes du second degré, et $g, g_1, g_2$ des polynomes homogènes du premier degré. Pour trouver les points communs autres que le point : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, posons

$$x = \alpha\rho, \qquad y = \beta\rho, \qquad z = \gamma\rho;$$

nous aurons ainsi à déterminer $\alpha, \beta, \gamma$ de façon que les équations

$$\rho f\,(\alpha, \beta, \gamma) + t g\,(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$\rho f_1(\alpha, \beta, \gamma) + t g_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$\rho f_2(\alpha, \beta, \gamma) + t g_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

aient une solution commune autre que $\rho = 0$, $t = 0$. Pour cela, il faut et il suffit que $\alpha, \beta, \gamma$ vérifient les équations

$$f g_1 - g f_1 = 0, \qquad f g_2 - g f_2 = 0.$$

En regardant $\alpha, \beta, \gamma$ comme des coordonnées courantes, ces équations définissent deux cônes du troisième ordre, ayant même sommet et, par suite,

ayant neuf génératrices communes; mais, les deux génératrices communes au cône $f = 0$ et au plan $g = 0$, devant être rejetées, on trouve seulement sept nouvelles solutions, ce qui démontre la proposition.

431. **Théorème corrélatif.** — *Trois quadriques ont, en général, huit plans tangents communs.*

Démonstration par polaires réciproques.

432. **Théorème.** — *Les quadriques qui ont huit points communs ont, en général, une infinité de points communs situés sur une biquadratique, intersection de deux quelconques d'entre elles.*

En effet, si l'on donne huit points et si le déterminant principal du système d'équations, linéaires par rapport aux coefficients de l'équation générale, obtenues en écrivant que cette équation est vérifiée par les coordonnées des huit points donnés, est du huitième degré, l'équation la plus générale, vérifiant les conditions données, sera de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0;$$

$f_1 = 0$, $f_2 = 0$ représentant deux quadriques passant par les huit points.

Il peut arriver que le déterminant principal soit du septième ordre seulement; dans ce cas, l'équation générale des quadriques passant par les huit points donnés sera

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0;$$

toutes les quadriques passant par sept des points donnés passent alors par le huitième.

Si quatre quelconques des points donnés ne sont pas dans un même plan, le degré du déterminant principal ne pourra pas s'abaisser davantage (419).

433. **Théorème corrélatif.** — *Toutes les quadriques qui ont huit plans tangents sont, en général, inscrites à une même développable circonscrite à deux quelconques d'entre elles.*

434. **Théorème.** — *Les quadriques qui ont sept points communs ont un huitième point commun.* (Lamé.)

Si l'on suppose que quatre quelconques des sept points donnés ne soient pas dans un même plan, ou mieux, si l'on suppose remplies les conditions trouvées au n° 419; en suivant la méthode indiquée, on voit que l'équation générale des quadriques passant par les sept points donnés sera de la forme

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

et, par suite, toutes les quadriques passeront par les huit points communs aux trois quadriques $f_1$, $f_2$, $f_3$, qui sont d'ailleurs trois quelconques des quadriques passant par les points donnés.

En particulier, toutes les quadriques passant par sept des sommets d'un hexaèdre passeront par le huitième. Si $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$; $\beta = 0$, $\beta_1 = 0$; $\gamma = 0$, $\gamma_1 = 0$ sont les équations des couples de faces opposées de cet hexaèdre, l'équation générale des quadriques qui lui sont circonscrites sera, en vertu de ce qui précède,

$$\lambda_1 \alpha\alpha_1 + \lambda_2 \beta\beta_1 + \lambda_3 \gamma\gamma_1 = 0.$$

Il peut se faire que les sept équations exprimant que l'équation du second degré est vérifiée par les coordonnées des points donnés se réduisent à six. Par exemple, si l'on suppose que trois des points donnés soient sur $Ox$, trois sur $Oy$ et le septième sur $Oz$, l'équation générale des quadriques passant par les sept points donnés sera

$$\lambda_1 xy + z[\lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 (z - c)] = 0.$$

Si les sept points sont dans un plan (non disposés sur deux droites, ni sur une seule droite), en prenant ce plan pour plan des $x, y$, l'équation générale des quadriques passant par ces sept points contiendra trois paramètres et sera

$$z(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4) = 0.$$

Si les sept points étaient sur une droite, ils compteraient pour trois points et, par suite, l'équation contiendrait six paramètres, etc.

435. Théorème corrélatif. — *Les quadriques qui ont sept plans tangents communs en ont, en général, un huitième.*

## Quadriques bitangentes.

436. Théorème. — *Si deux quadriques se touchent en deux points* A, B, *et si la droite* AB *n'est pas une génératrice commune à ces deux quadriques, elles se coupent, en général, suivant deux courbes planes; et réciproquement.*

En effet, soit M un point de l'intersection des deux quadriques, le plan ABM coupe ces deux surfaces suivant deux coniques ayant trois points communs A, B, M et tangentes en A et B, puisque les tangentes en A et B sont les intersections du plan sécant et des plans tangents en ces points aux deux quadriques. Ces deux coniques coïncident et, par suite, les deux quadriques ont une première courbe plane commune passant par A et B. Il peut se faire que leur intersection se compose uniquement de cette conique; s'il n'en est pas ainsi, soit M′ un point commun aux deux quadriques, non situé sur la conique que nous venons de déterminer; le plan ABM′

coupe les deux quadriques suivant une nouvelle conique, qui leur est commune, et l'intersection complète se compose de ces deux coniques.

Il est évident que le raisonnement précédent ne convient plus quand la droite AB est une génératrice commune aux deux quadriques, car tout plan passant par AB coupe chacune des deux surfaces suivant un système de deux droites dont l'une est la droite AB. Dans ce cas, l'intersection complète des deux quadriques se compose en général de AB et d'une cubique; nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

*Réciproquement*, si deux quadriques se coupent suivant deux coniques, ces deux courbes ont, en général, deux points communs A, B; en chacun de ces points, le plan tangent est déterminé par les tangentes aux deux coniques. Les deux quadriques sont donc tangentes en A et en B; elles sont *bitangentes*.

Il peut arriver que les points A et B se réunissent, c'est-à-dire que les deux coniques soient tangentes en un point A à une même droite; dans ce cas, les quadriques se touchent en ce point, comme cela résultera de la démonstration donnée plus bas (438).

437. Nous allons maintenant établir le théorème précédent par le calcul. Nous prendrons la droite AB pour axe des $z$, l'origine étant le milieu du segment AB; l'axe des $y$ sera parallèle à l'intersection D des plans tangents en A et B communs aux deux quadriques; enfin l'axe des $x$ sera une droite quelconque rencontrant D. Soient $z = 0$, $x = a$ les équations de D. Si l'on pose $OA = c$, une quadrique passant par A et B a pour équation

$$z^2 - c^2 + Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0.$$

En exprimant que le plan tangent en A et le plan tangent en B doivent contenir la droite D, on trouve

$$Bc + C' = 0, \qquad B'ac + Ca - c^2 = 0,$$
$$-Bc + C' = 0, \qquad -B'ac + Ca - c^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$B = 0, \qquad C' = 0, \qquad B' = 0, \qquad Ca = c^2.$$

Les équations des deux quadriques sont donc :

$$z^2 - c^2 + Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + \frac{2c^2}{a}x = 0,$$

$$z^2 - c^2 + A_1x^2 + A'_1y^2 + 2B''_1xy + \frac{2c^2}{a}x = 0.$$

Les points communs à ces deux quadriques sont déterminés par l'une des deux équations précédentes et l'équation

$$(A - A_1)x^2 + (A - A'_1)y^2 + 2(B'' - B''_1)xy = 0,$$

qui représente deux plans passant par l'axe des $z$. L'intersection des deux quadriques se compose donc de deux courbes planes.

**438.** Réciproquement, soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations des plans de deux coniques communes à deux quadriques. Si l'une de ces quadriques a pour équation $f = 0$, l'autre, pouvant être considérée comme passant par l'intersection de la première et du système de deux plans définis par l'équation $PQ = 0$, aura une équation de la forme

$$f + 2\lambda PQ = 0.$$

Si l'on pose

$$2T = x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} + t\frac{\partial f}{\partial t_1},$$

l'équation du plan tangent au point $M(x_1, y_1, z_1, t_1)$ de la première quadrique étant $T = 0$, le plan tangent à la seconde, en ce même point, supposé commun aux deux surfaces, aura pour équation

$$T + \lambda(PQ_1 + QP_1) = 0,$$

$P_1$ et $Q_1$ désignant les résultats de la substitution de $x_1, y_1, z_1, t_1$ aux coordonnées courantes dans les polynomes P, Q. Or, si l'on suppose que le point M soit l'un des points communs aux deux coniques qui composent l'intersection des quadriques données, on a $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ et, par suite, on voit que les deux quadriques sont tangentes en M.

**439.** *Équation générale des quadriques bitangentes à une quadrique donnée.* — Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une quadrique; toute quadrique bitangente à la proposée la coupe suivant deux coniques, et réciproquement. Il en résulte que l'équation demandée est de la forme

$$f(x, y, z) + PQ = 0,$$

P et Q étant deux polynomes de premier degré.

*Application.* — Proposons-nous de trouver l'équation générale des quadriques tangentes à deux plans donnés. Soient $U = 0$, $V = 0$ les équations

de ces plans, et $R = 0$, $S = 0$ les équations d'une droite coupant ces plans en A et B. Une quadrique tangente en A au plan U est coupée par ce plan suivant deux droites AM, AP; si cette même quadrique est tangente en B au plan V, elle est coupée par ce plan suivant deux droites BM, BP, M et P étant les points de rencontre de cette quadrique et de la droite commune aux plans U et V. On vérifie ainsi que la quadrique coupe la quadrique dégénérée formée des plans U, V suivant deux coniques dégénérées en systèmes de droites (AM, BM) et (AP, BP). Le système des plans de ces coniques dégénérées a pour équation

$$aR^2 + bRS + cS^2 = 0$$

et, par suite, l'équation de toute quadrique tangente aux deux plans U, V aux points où ils sont rencontrés par la droite ($R = 0$, $S = 0$) est de la forme

$$UV + aR^2 + bRS + cS^2 = 0,$$

$a$, $b$, $c$ étant des paramètres arbitraires.

### Quadriques inscrites ou circonscrites.

**440.** *Quand deux quadriques sont tangentes en trois points, elles se coupent suivant une seule conique et se raccordent le long de cette conique, pourvu que la droite qui passe par deux quelconques des points de contact ne fasse pas partie de l'intersection.*

En effet, soient A, B, C les points de contact de deux quadriques ayant trois plans tangents communs. Les deux surfaces, ayant même plan tangent en A et B, se coupent suivant deux coniques dont les plans passent par ces deux points. Mais, C étant aussi un point de contact, les plans des coniques communes doivent aussi passer par C, ce qui prouve que ces plans, ayant trois points communs, sont confondus. En d'autres termes, toute l'intersection se réduit à une seule conique située dans le plan ABC. D'autre part, les plans tangents en A, B, C ont un seul point commun S à distance finie ou infinie; car ils ne peuvent avoir une droite commune, puisqu'on ne peut mener à une quadrique que deux plans tangents au plus par une droite. Le plan polaire de S par rapport à l'une quelconque des quadriques est le plan ABC; donc les deux quadriques sont inscrites à un même cône ayant S pour sommet; elles ont donc même plan tangent en tous les points de leur intersection; on dit alors que

l'une est circonscrite à l'autre ou que la seconde est inscrite à la première.

Supposons maintenant que AB soit une génératrice commune aux deux quadriques. L'intersection de la première quadrique par son plan tangent en C se compose de deux droites, dont l'une rencontre la droite AB en un point D qui est le point commun à AB et au plan tangent en C. Il en résulte que CD appartient aussi à la seconde quadrique et par conséquent ces deux quadriques se touchent en D. Donc, si ces deux quadriques n'ont que deux plans tangents communs le long de AB, le point D se confond soit avec A, soit avec B. Supposons que D se confonde avec B; dans ce cas, les deux quadriques ont en commun une conique dégénérée formée des droites AB, CB; elles se coupent en général suivant une seconde conique passant par A et C.

Nous verrons plus loin que si les deux quadriques ont même plan tangent en trois points d'une droite, elles se raccordent tout le long de cette droite et ne peuvent avoir d'autre plan tangent commun en un point situé hors de cette droite (450).

441. *Démonstration analytique.* — Soit S le point de concours des plans tangents en A, B, C; prenons le tétraèdre SABC pour tétraèdre de référence. Une quadrique passant par A, B, C a pour équation

$$2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + 2CXT + 2C'YT + 2C''ZT + DT^2 = 0;$$

le plan tangent en A a pour équation

$$B''Y + B'Z + CT = 0.$$

Ce plan passe par le point S, donc $C = 0$. On verrait de même que $C' = 0$, $C'' = 0$.

L'équation d'une quadrique vérifiant les conditions données est donc

$$DT^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2C''XY = 0.$$

Les équations des plans tangents en A, B, C sont respectivement

$$B''Y + B'Z = 0, \qquad B''X + BZ = 0, \qquad B'X + BY = 0.$$

On peut remarquer que les traces de ces plans sur le plan ABC rencontrent les côtés de ce triangle en trois points situés sur la droite ayant pour équations

$$T = 0, \qquad \frac{X}{B} + \frac{Y}{B'} + \frac{Z}{B''} = 0,$$

et que les droites joignant les points de contact A, B, C aux sommets du triangle formé par les traces des plans tangents en A, B, C sur le plan $T=0$, concourent en un même point ayant pour coordonnées

$$T=0, \qquad X=B, \qquad Y=B', \qquad Z=B''.$$

Considérons une seconde quadrique remplissant les mêmes conditions et soit

$$D_1 T^2 + 2B_1 YZ + 2B'_1 ZX + 2B''_1 XY = 0$$

son équation; ces quadriques ayant mêmes plans tangents en A, B, C, on doit poser

$$\frac{B'}{B} = \frac{B'_1}{B'} = \frac{B''_1}{B''}.$$

Rien n'empêche d'ailleurs de supposer ces rapports égaux à 1; de sorte que l'équation de la seconde quadrique sera

$$D_1 T^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

et, par conséquent, si l'on représente par $f=0$ l'équation de la première quadrique, celle de la seconde sera

$$f + \lambda T^2 = 0.$$

On voit ainsi que les quadriques données se coupent suivant une seule courbe plane située dans le plan $T=0$ et qu'en chacun des points communs le plan tangent est le même, car, si l'on forme l'équation du plan tangent en un point $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ de la seconde surface, il faut ajouter aux premiers membres de l'équation du plan tangent à la première le produit $TT_1$, qui est nul si le point de contact appartient à la courbe commune.

**442.** *Équation générale des quadriques circonscrites ou inscrites à une quadrique donnée.* — Soient $f=0$ l'équation d'une quadrique et $P=0$ l'équation d'un plan; une quadrique circonscrite le long de l'intersection du plan P et de la quadrique donnée a une équation de la forme

$$f + 2PQ = 0,$$

Q étant une fonction linéaire; mais, pour former l'équation du plan tangent à cette quadrique en un point de la courbe d'intersection de la quadrique $f$ par le plan P, il faut ajouter au premier membre de l'équation du plan tangent à la première l'équation $PQ_1 + QP_1$, $P_1$ et $Q_1$ désignant ce que deviennent P et Q quand on y substitue aux coordonnées courantes celles du point considéré. Or $P_1=0$; donc on doit avoir aussi $Q_1=0$, puisque les deux quadriques ont même

plan tangent. Le polynome Q doit donc être nul en tous les points de la conique intersection de la quadrique $f$ et du plan P; donc Q doit être proportionnel à P et, par suite, l'équation demandée est de la forme

$$f + \lambda P^2 = 0,$$

comme nous l'avons trouvé par une autre méthode (**441**); on vérifie immédiatement que, réciproquement, cette équation représente, quelle que soit la valeur de $\lambda$, une quadrique qui se raccorde avec la proposée en tous les points de la conique suivant laquelle elle est coupée par le plan P. L'équation précédente est donc l'équation générale demandée.

**443.** Théorème. — *Par un point donné il ne passe qu'une seule quadrique circonscrite à une quadrique donnée, le long d'une conique déterminée.*

En effet, l'équation $f_1 + \lambda P_1^2 = 0$ est du premier degré en $\lambda$.

*Application.* — La courbe de contact du cône circonscrit à une quadrique $f$, ayant pour sommet le point $S(x_0, y_0, z_0)$ est dans le plan polaire du point S; donc ce cône a une équation de la forme

$$f(x, y, z) + \lambda \left(x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial z_0} + t \frac{\partial f}{\partial t_0}\right)^2 = 0.$$

Pour déterminer $\lambda$, il suffit d'écrire que le cône passe par son sommet, ce qui donne

$$f(x_0, y_0, z_0) + 4\lambda f^2(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

en éliminant $\lambda$ on retrouve l'équation connue du cône circonscrit.

Pareillement, la courbe de contact du cylindre circonscrit, dont les génératrices ont pour paramètres directeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, est dans le plan diamétral conjugué à cette direction; ce cylindre a donc une équation de la forme

$$f(x, y, z) + \lambda \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Il suffit, pour déterminer $\lambda$, d'écrire que le cylindre passe par le point à l'infini $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$, ce qui donne

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + 4\lambda\varphi^2(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et, en supposant $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$, on tire de cette équation $\lambda = -\frac{1}{4\varphi(\alpha, \beta, \gamma)}$; en remplaçant $\lambda$ par cette valeur, on retrouve l'équation connue du cylindre circonscrit.

**444.** Théorème. — *Deux quadriques circonscrites à une même quadrique se coupent suivant deux courbes planes.*

En effet, les équations de ces deux quadriques peuvent se mettre sous la forme

$$f + P^2 = 0, \qquad f + Q^2 = 0,$$

leurs points communs sont les points communs à l'une d'elles et au système de deux plans représenté par $P^2 - Q^2 = 0$.

*Exemple.* — Deux quadriques de révolution ayant un foyer commun sont circonscrites à une sphère de rayon nul; elles se coupent donc suivant deux coniques. Leurs équations sont de la forme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = P^2,$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = Q^2;$$

on peut donc leur appliquer la démonstration précédente.

**445.** Théorème. — *Les intersections par un même plan de deux quadriques dont l'une est circonscrite à l'autre sont des coniques bitangentes.*

En effet, prenons le plan sécant pour plan des $x, y$. Les équations des deux quadriques peuvent s'écrire

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f(x, y, z) + k(ax + by + cz + d)^2 = 0.$$

Les sections par le plan des $x, y$ ont pour équations, dans ce plan,

$$f(x, y, 0) = 0, \qquad f(x, y, 0) + k(ax + by + d)^2 = 0.$$

Quand le plan sécant est mené par une tangente à la courbe des contacts, les sections sont osculatrices, c'est-à-dire ont un contact du troisième ordre. Si l'une des quadriques est une sphère, on obtient alors le cercle osculateur en un sommet de la conique située sur l'autre quadrique.

**446.** Corollaire. — *Si l'on coupe une quadrique circonscrite à une seconde quadrique par le plan tangent en un ombilic de cette dernière, la section aura pour foyer l'ombilic, la directrice correspondante étant la trace du plan sécant sur le plan de la courbe des contacts.*

En effet, en prenant pour axes des $x$ et des $y$ deux droites rectangulaires menées par l'ombilic d'une quadrique dans le plan tangent en ce point et pour axe des $z$ la normale au même point, l'équation de cette quadrique sera

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0;$$

en conservant les notations du numéro précédent, la section d'une quadrique circonscrite, par le plan des $x$, $y$, aura pour équation

$$x^2+y^2+k(ax+by+d)^2=0,$$

ce qui démontre la proposition.

447. *Cas particulier.* — Tous les points d'une sphère sont des ombilics. En second lieu, toute quadrique circonscrite ou inscrite à une sphère est une quadrique de révolution, et, réciproquement, on peut inscrire ou circonscrire une sphère à une quadrique de révolution, le plan des contacts étant celui d'un parallèle quelconque de cette surface. Cela étant admis, on obtient ces théorèmes :

*La section d'une quadrique de révolution par un plan tangent à une sphère y inscrite est une conique ayant pour foyer le point de contact de la sphère et du plan, et pour directrice correspondante l'intersection de ce plan et du plan des contacts.*

*La section d'une quadrique par un plan tangent à deux sphères y inscrites est une conique ayant pour foyers les deux points de contact du plan sécant et des sphères.*

Dans le cas d'un cône ou d'un cylindre de révolution on retrouve le théorème de Dandelin.

### CAS OÙ L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES SE DÉCOMPOSE.

448. L'intersection de deux quadriques étant, dans le cas le plus général, une courbe du quatrième ordre, peut se décomposer en deux coniques ; en une conique et deux droites ; en quatre droites ou enfin en une cubique gauche et une droite.

On obtient deux coniques quand les quadriques sont bitangentes ; mais on peut avoir aussi, comme cas limite, deux coniques tangentes, comme nous l'avons vu. Il nous reste à étudier le cas où les deux quadriques ont au moins une droite commune.

### Quadriques ayant une droite commune.

449. Nous avons démontré que si deux surfaces réglées quelconques ont une génératrice rectiligne commune, elles se touchent en deux points de cette droite, et que si elles ont même plan tangent en trois points de la génératrice, elles se raccordent tout le long de cette

droite. Nous allons démontrer ces propositions dans le cas des quadriques.

Les équations de deux quadriques contenant l'axe des $z$ sont de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0,$$
$$A_1x^2 + A'_1y^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y = 0.$$

Les équations des plans tangents aux points $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ sont

$$h(B'x + By) + Cx + C'y = 0,$$
$$h(B'_1x + B_1y) + C_1x + C'_1y = 0.$$

Ces plans sont confondus si

$$\frac{B'h + C}{B'_1h + C_1} = \frac{B_1h + C'}{B_1h + C'_1}.$$

L'équation précédente est du second degré en $h$; il y a donc sur l'axe des $z$ deux points réels ou imaginaires en lesquels les deux quadriques sont tangentes; si les deux quadriques sont tangentes en trois points de l'axe des $z$, elles sont tangentes en tous les points de cette droite et l'équation précédente est vérifiée quel que soit $h$. Dans ce cas, on a

$$\frac{B}{B_1} = \frac{B'}{B'_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{C'}{C'_1}.$$

**450.** *Quadriques se raccordant le long d'une génératrice commune.* — Supposons les conditions précédentes remplies. On peut supposer la valeur commune des rapports précédents égale à l'unité, et, par suite, l'équation de la seconde quadrique sera

$$A_1x^2 + A'_1y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''_1xy + 2Cx + 2C'y = 0.$$

L'intersection des deux surfaces est alors définie par l'équation de l'une d'elles, et l'équation

$$(A - A_1)x^2 + (A' - A'_1)y^2 + 2(B'' - B''_1)xy = 0,$$

qui représente deux plans passant par l'axe des $z$. Cette intersection se compose donc de l'axe des $z$, associé à deux droites D, D' qui rencontrent cet axe. On peut encore dire, si l'on veut, que l'intersection se compose de deux coniques dégénérées : $(Oz, D)$ et $(Oz, D')$.

Il est facile d'établir que, dans le cas qui nous occupe, les deux surfaces ne peuvent être tangentes en aucun point pris hors de la génératrice suivant laquelle elles se raccordent. Prenons la droite D pour axe des $x$ et supposons l'axe des $y$ parallèle à D', l'axe des $z$ étant le même que plus haut. En représentant par $x = 0$, $z = \alpha$ les équations de D', les équations des deux quadriques seront

$$By z + B'zx + B''xy - B\alpha y = 0,$$
$$By z + B'zx + B''_1 xy - B\alpha y = 0.$$

Si ces surfaces étaient tangentes en un point pris hors de l'axe des $z$, le point de contact serait sur D ou sur D'; supposons-le sur l'axe des $x$. Les plans tangents au point $x = x_0$, $y = 0$, $z = 0$ ayant pour équations

$$x_0(B''y + B'z) - B\alpha y = 0,$$
$$x_0(B''_1 y + B'z) - B\alpha y = 0.$$

Ces plans ne peuvent coïncider que si $B'' = B''_1$; mais, dans ce cas, les deux quadriques coïncideraient.

**431.** Il peut arriver que les droites D et D' coïncident; si nous supposons que l'axe des $x$ soit la droite D, on aura

$$A = A_1 = 0, \qquad B'' = B''_1, \qquad C = 0;$$

les équations des deux quadriques sont alors

$$A'y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C'y = 0,$$
$$A'_1 y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2C'y = 0.$$

Dans ce cas, ces deux surfaces se raccordent en tous les points des deux droites qui leur sont communes.

Remarquons enfin que si deux quadriques se raccordent le long d'une droite commune, le plan tangent commun en chaque point de cette droite varie avec le point de contact, à moins que ces surfaces ne soient des cylindres ou des cônes. Supposons, en effet, que l'axe des $z$ étant une génératrice rectiligne, le plan $xOz$ soit tangent tout le long de cette droite à une quadrique; l'équation de cette quadrique sera de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B''xy + 2C'y = 0;$$

on voit que cette équation représente un cône si $B \neq 0$, et un cylindre, si $B = 0$.

**432.** *Quadriques tangentes en deux points d'une génératrice commune.* — Nous supposerons les deux points de contact réels;

l'un d'eux peut alors être pris pour origine des coordonnées, le plan tangent en ce point étant par exemple le plan $yOz$, et l'axe des $z$, comme plus haut, la génératrice commune. Les équations des deux quadriques seront alors

$$\begin{gathered}Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2x = 0,\\ A_1x^2 + A'_1y^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy + 2x = 0.\end{gathered}$$

On a supposé le coefficient de $x$ différent de zéro, car les deux quadriques ne peuvent être des cônes, dans le cas précédent.

On peut supposer encore que le second plan tangent commun soit le plan $yOz$; il faut, par exemple, poser $B' = B'_1$; le point de contact de ce plan aura pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{B'}$.

Cela étant, proposons-nous de chercher les points de l'intersection des deux quadriques qui se trouvent situés hors de l'axe des $z$.

Cherchons pour cela les points de cette intersection situés dans un plan quelconque mené par l'axe des $z$. En posant $y = mx$ dans les équations des deux quadriques, et supprimant le facteur $x$, on trouve, en résolvant le système d'équations linéaires obtenu :

$$x = \frac{a'm}{am^3 + bm^2 + cm + d},$$

$$z = \frac{a''m^2 + b''m + c''}{am^3 + bm^2 + cm + d},$$

$$y = \frac{a'm^2}{am^3 + bm^2 + cm + d}.$$

L'intersection se compose donc de l'axe des $z$ et de cette cubique, qui passe par les deux points de contact des deux quadriques qui sont sur la génératrice commune, car $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ pour $m$ infini, et $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{c''}{d} = -\frac{1}{B'}$ pour $m = 0$.

L'origine est un point double de la projection de la cubique sur le plan $xOy$, les tangentes étant $Ox$ et $Oy$; d'ailleurs, la projection cylindrique ou conique d'une cubique sur un plan quelconque a toujours un point double. Voici comment Poncelet le démontre. La cubique fait partie de l'intersection de deux quadriques $f = 0$, $f_1 = 0$ ayant une droite commune D; ces deux quadriques définissent un faisceau ponctuel ($f + \lambda f_1 = 0$). Soit S le point de vue; par S il passe une quadrique du faisceau, dont deux génératrices rectilignes SA, SB passent par S. L'une SA rencontre la droite D et la cubique; l'autre SB, de même système que D, rencontre donc la cubique en

deux points; la trace de SB sur le plan de projection est un point double de la projection de la cubique sur ce plan.

**453.** *Quadriques ayant deux génératrices rectilignes communes.* — Quand deux quadriques ont deux génératrices *de même système* communes, elles en ont nécessairement une autre, ou deux autres.

En effet, soient G, G′ les deux génératrices communes. Ces deux génératrices ne peuvent pas constituer toute l'intersection; soit donc M un point commun aux deux quadriques et non situé sur G ni sur G′.

La droite qui passe par M et s'appuie sur G et G′ a trois points sur chacune des deux surfaces; cette droite est donc une génératrice $G_1$ de l'autre système, commune aux deux surfaces.

Il peut se faire que l'intersection des deux quadriques se compose des trois droites G, G′, $G_1$; dans ce cas, les deux quadriques se raccordent le long de $G_1$. Supposons qu'il y ait d'autres points communs, et soit M′ l'un d'eux; on voit encore que la droite $G_2$ qui passe par M′ et s'appuie sur G et G′ est tout entière située sur chacune des deux quadriques : l'intersection se compose alors des quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

Traitons la question par le calcul. Soient $P = 0$, $Q = 0$ les équations de G, $R = 0$, $S = 0$ celles de G′. Les équations de deux quadriques contenant G et G′ sont

$$P(aR + bS) + Q(a'R + b'S) = 0,$$

$$P(\alpha R + \beta S) + Q(\alpha' R + \beta' S) = 0;$$

les points d'intersection non situés sur G sont les points communs à l'une de ces quadriques et au système de deux plans défini par l'équation

$$(aR + bS)(\alpha' R + \beta' S) - (\alpha R + \beta S)(a'R + b'S) = 0.$$

Ces plans, passant par G′, coupent cette quadrique suivant deux droites $G_1$, $G_2$, qui peuvent d'ailleurs être confondues en une seule.

Si les deux génératrices communes sont de systèmes différents, elles se rencontrent, et l'on peut les considérer comme formant une courbe plane commune aux deux quadriques, qui ont alors une seconde conique commune, laquelle peut d'ailleurs dégénérer en deux nouvelles génératrices rectilignes.

**454.** Cas particulier. — *Intersection de deux paraboloïdes ayant un plan directeur commun et une génératrice commune.* — Si l'on représente par

$$PQ + R = 0, \qquad PQ' + R' = 0$$

les équations des deux paraboloïdes, on voit qu'ils ont une génératrice commune, située dans le plan de l'infini, ayant pour équations $P = 0$, $t = 0$.

Si la génératrice commune donnée est parallèle au plan P, le plan parallèle à P mené par cette génératrice coupe les deux paraboloïdes suivant deux génératrices communes; dans ce cas, l'intersection se compose de ces deux droites, dont l'une est à l'infini, et d'une conique, qui peut dégénérer en deux nouvelles génératrices.

Si la génératrice commune n'est pas parallèle au plan P, les deux paraboloïdes peuvent être considérés comme ayant deux droites communes ne se rencontrant pas; ils en ont donc deux autres qui sont parallèles au plan P.

Il est utile de reprendre ces questions par le calcul. Dans le premier cas, prenons pour axe des $x$ la génératrice commune donnée, le plan des $x, y$ étant le plan directeur commun. Les deux paraboloïdes sont alors tangents en un point de l'axe des $x$; on peut supposer ce plan pris pour origine et que le plan $xOz$ soit le plan tangent commun; les équations des deux paraboloïdes seront alors

$$z(ax + by + cz) + y = 0,$$
$$z(a_1x + b_1y + c_1z) + y = 0.$$

L'intersection est donc définie par l'une de ces équations et l'équation

$$z[(a - a_1)x + (b - b_1)y + (c - c_1)z] = 0;$$

elle se compose donc de l'axe des $x$, d'une droite à l'infini dans un plan parallèle au plan directeur $z = 0$, et d'une conique située dans le plan ayant pour équation

$$(a - a_1)x + (b - b_1)y + (c - c_1)z = 0.$$

Supposons maintenant que la génératrice donnée ne soit pas parallèle au plan directeur commun; prenons-la pour axe des $z$, le plan des $x, y$ étant parallèle au plan directeur donné. Les équations des deux paraboloïdes seront, dans ce cas,

$$z(ax + by) + a'x + b'y = 0,$$
$$z(a_1x + b_1y) + a'_1x + b'_1y = 0.$$

Les points communs non situés sur la génératrice $z = 0$, $t = 0$ sont les points communs à l'une de ces quadriques et au système des plans définis par l'équation

$$(ax + by)(a'_1x + b'_1y) - (a_1x + b_1y)(a'x + b'y) = 0.$$

Chacun de ces plans coupe la première surface, par exemple, suivant l'axe des $z$ et une droite s'appuyant sur cet axe et parallèle au plan des $x, y$.

L'intersection se compose donc de l'axe des $z$, d'une droite à l'infini et de deux droites parallèles au plan directeur donné et s'appuyant sur la génératrice commune donnée.

455. Théorème. — *L'intersection de deux quadriques ayant un plan diamétral commun se projette sur ce plan, parallèlement aux cordes qui lui sont conjuguées, suivant une conique; et réciproquement.*

En effet, si le plan diamétral est pris pour plan des $x, y$, l'axe des $z$ étant parallèle aux cordes conjuguées, les équations des deux quadriques pouvant s'écrire

$$z^2 + f(x, y) = 0, \qquad z^2 + f_1(x, y) = 0,$$

la projection de leur intersection sur le plan des $x$, $y$ a pour équation

$$f(x, y) - f_1(x_1, y) = 0.$$

Réciproquement, si la courbe d'intersection de deux quadriques se projette sur un plan suivant une conique, prenons ce plan pour plan des $x, y$, l'axe des $z$ étant parallèle aux projetantes; les équations des deux quadriques seront

$$f(x,y,z) = 0, \qquad f(x,y,z) + \lambda F(x,y) = 0;$$

le plan diamétral conjugué à la direction O$z$ a pour équation $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$; il est le même pour les deux quadriques.

456. *Corollaire.* — Quand les axes de deux surfaces de révolution du second degré sont dans un même plan, ce plan est un plan principal commun; donc la projection de l'intersection des deux quadriques sur ce plan est une conique, ou, plus exactement, un arc de conique, si l'on se borne à la projection de la partie réelle de l'intersection.

## Faisceau ponctuel de quadriques.

457. Soient $f(x,y,z,t) = 0$, $f_1(x,y,z,t) = 0$ les équations de deux quadriques. L'équation

$$f(x, y, z, t) + \lambda f_1(x, y, z, t) = 0,$$

dans laquelle $\lambda$ est un paramètre arbitraire, définit une infinité de quadriques

dont l'ensemble constitue ce qu'on nomme *un faisceau ponctuel;* les deux quadriques $f$ et $f_1$ sont *les bases* du faisceau. On voit, comme pour les faisceaux de coniques, qu'on peut prendre pour bases deux quadriques quelconques du faisceau.

458. Théorème. — *Parmi les quadriques d'un faisceau ponctuel il y a, en général, quatre cônes; les sommets de ces cônes sont les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport aux quadriques du faisceau.*

Pour exprimer que l'équation $f+\lambda f_1 = 0$ représente un cône, on doit annuler le discriminant (ou *hessien*) de la forme $f+\lambda f_1$; on obtient ainsi une équation du quatrième degré en $\lambda$, $H(\lambda)=0$, ce qui démontre la première partie du théorème.

Pour démontrer la seconde partie, nous ferons d'abord observer que si un point a même plan polaire par rapport aux quadriques $f$ et $f_1$, ce plan polaire commun sera le plan polaire du point considéré par rapport à une quadrique quelconque du faisceau $(f, f_1)$, car si l'on a

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = k\,\frac{\partial f_1}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = k\,\frac{\partial f_1}{\partial y},\qquad \frac{\partial f}{\partial z} = k\,\frac{\partial f_1}{\partial z},\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = k\,\frac{\partial f_1}{\partial t},$$

on en déduit

$$\mathop{\mathbf{S}} X\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \equiv (k+\lambda)\mathop{\mathbf{S}} X\,\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

Il suffit donc de considérer seulement les quadriques $f$ et $f_1$.

Cherchons les points qui ont mêmes plans polaires par rapport à ces deux quadriques; ce sont évidemment les points dont les coordonnées vérifient les équations (1) dans lesquelles $k$ désigne une constante convenablement choisie. Or, pour que ces équations admettent des solutions différentes de zéro, il faut et il suffit que $H(-k)=0$; on voit ainsi que les points cherchés sont les sommets des cônes que nous avons trouvés plus haut.

Si deux points A et B sont des points doubles, le plan polaire de A passe par B, car si les coordonnées de ces points sont $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ et $x''$, $y''$, $z''$, $t''$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x'}+\lambda'\,\frac{\partial f_1}{\partial x'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}+\lambda'\,\frac{\partial f_1}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z'}+\lambda'\,\frac{\partial f_1}{\partial z'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial t'}+\lambda'\,\frac{\partial f_1}{\partial t'}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x''}+\lambda''\,\frac{\partial f_1}{\partial x''}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y''}+\lambda''\,\frac{\partial f_1}{\partial y''}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z''}+\lambda''\,\frac{\partial f_1}{\partial z''}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial t''}+\lambda''\,\frac{\partial f_1}{\partial t''}=0.$$

d'où l'on tire

$$P+\lambda' Q=0,\qquad P+\lambda'' Q=0,$$

en posant

$$P=\mathop{\mathbf{S}} x''\,\frac{\partial f}{\partial x'}=\mathop{\mathbf{S}} x'\,\frac{\partial f}{\partial x''},\qquad Q=\mathop{\mathbf{S}} x''\,\frac{\partial f_1}{\partial x'}=\mathop{\mathbf{S}} x'\,\frac{\partial f_1}{\partial x''}.$$

Donc, en supposant $\lambda' \neq \lambda''$, on a $P=0$, $Q=0$ et aussi $P+\lambda Q=0$.

D'après cela, en supposant les quatre racines de l'équation $H(\lambda) = 0$ distinctes, soient A, B, C, D les sommets des quatre cônes du faisceau. Le plan polaire de chacun de ces points passe par les trois autres; autrement dit, le tétraèdre ABCD est conjugué aux quadriques du faisceau. On peut remarquer d'ailleurs que chacune des faces du tétraèdre, ABC par exemple, coupe évidemment les deux quadriques suivant deux coniques auxquelles le triangle ABC est conjugué, ce qui prouve que le plan polaire de A passe par B et C; il passe par D pour la même raison.

**459.** *Cas particulier.* — Si l'on considère deux coniques situées dans des plans différents, mais ayant deux points communs ou tangentes, ces deux coniques peuvent être regardées comme l'intersection d'une quadrique $f$ et d'une quadrique $f_1$ dégénérée en un système de deux plans. L'équation en $\lambda$ relative à ces deux quadriques aura une racine double égale à zéro (ou infinie), qui correspond à la quadrique $f_1$, et deux autres racines. Donc *on peut faire passer deux cônes par deux coniques ayant deux points communs.*

On peut déterminer les sommets de ces deux cônes. En effet, regardons les deux coniques comme étant l'intersection d'une quadrique $f$ et d'un système $f_1$ de deux plans, et soit AB l'intersection de ces deux plans. Le sommet S de l'un des cônes a même plan polaire par rapport aux quadriques $f$ et $f_1$; le plan polaire de S contient donc la droite AB, ce qui prouve que S est sur la droite A'B' conjuguée à AB par rapport à $f$. La droite A'B' coupe la quadrique $f$ en deux points $m$, $m'$ et le système de deux plans $f_1$ en deux autres points $n$, $n'$; en outre, S est conjugué harmonique par rapport à $m$, $m'$ et à $n$, $n'$. On voit ainsi que S est l'un des points doubles de l'involution définie par les deux couples $m$, $m'$ et $n$, $n'$.

Réciproquement, soient S et S' les points doubles de cette involution. Le plan polaire de S est le même par rapport aux deux quadriques $f$, $f_1$; c'est le plan déterminé par la droite AB et le point S'. Je dis que le cône de sommet S, qui a pour directrice l'une des coniques données, contient aussi l'autre conique. En effet, soit P un point quelconque de la première conique; la génératrice SP coupe la quadrique $f$ en Q' et le plan de la seconde conique en Q''. Or, si R est la trace de SP sur le plan polaire de S, les points Q' et Q'' sont tous deux conjugués de R par rapport à P et S; donc ils sont confondus, ce qui prouve que SP rencontre la seconde conique.

On peut déterminer autrement les points S, S'; si l'on trace dans chaque conique le diamètre conjugué à AB, soient EF, GH les diamètres obtenus, E, F, G, H étant leurs extrémités; on voit aisément que les sommets S, S' sont les points communs aux deux droites EG, FH, ou aux deux droites EH, FG.

**460.** *Conditions pour que l'équation* $H(\lambda) = 0$ *soit indéterminée.* — Laissant de côté les cas particuliers où les quadriques $f$, $f_1$ seraient des systèmes de plans, on voit d'abord que, le terme constant et le coefficient de $\lambda^4$ devant être nuls, les quadriques $f$ et $f_1$ doivent être des cônes. Si ces cônes

ont même sommet, toute quadrique du faisceau sera aussi un cône ayant le même sommet. Supposons que $f$ et $f_1$ soient des cônes ayant des sommets différents O, O'. Toute quadrique du faisceau est un cône; soit $\omega$ le sommet d'un quelconque de ces cônes. Le plan polaire de $\omega$ par rapport aux quadriques $f, f_1$ passe par O et O' : il en résulte que $\omega$ est sur l'intersection des plans polaires de OO' par rapport aux deux cônes $f, f_1$. Le lieu des sommets des cônes du faisceau est donc une droite, et cette droite ne peut être que la droite OO', donc $\omega$ est sur OO'. Mais le plan polaire de $\omega$ devant contenir OO', on en conclut que les deux cônes doivent avoir pour génératrice commune la droite OO' et être tangents le long de cette droite; ces deux cônes ont donc alors en commun une conique rencontrant OO'. Il est d'ailleurs très facile d'établir la réciproque.

461. *Discussion de l'intersection de deux quadriques. Méthode de M. G. Kœnigs.* — Nous excluons les cas exceptionnels où les deux quadriques $f$ et $f_1$ sont des cônes de même sommet ou des cônes de sommets différents, tangents le long d'une génératrice commune. Alors parmi les quadriques du faisceau il y a des quadriques n'ayant pas de point double; nous pouvons supposer qu'une de ces quadriques soit prise pour l'une des bases du faisceau, soit $f$ cette quadrique. On peut mettre l'équation de $f$ sous la forme

$$PQ = RS$$

et exprimer, comme nous l'avons vu dans la théorie des génératrices rectilignes, les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque de la quadrique en fonction de deux paramètres $\lambda$, $\mu$, en posant

$$\frac{P}{\lambda\mu} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{\mu} = \frac{S}{\lambda},$$

et toute équation entre $\lambda$ et $\mu$ correspond à une courbe tracée sur $f$.

On démontre aisément le théorème suivant, dû à Chasles :

*L'équation entière* $F(\lambda, \mu) = 0$, *de degré $p$ en $\lambda$ et de degré $q$ en $\mu$, représente une courbe d'ordre $p + q$ tracée sur la quadrique $f$.*

Or, l'équation d'une quadrique $f_1$ peut se mettre sous la forme

$$F(P, Q, R, S) = 0;$$

donc l'intersection des quadriques $f, f_1$ est définie par l'équation

$$F(\lambda\mu, 1, \mu, \lambda) = 0,$$

qui est du second degré en $\lambda$ et du second degré en $\mu$. On voit ainsi que cette intersection est en général du quatrième ordre.

On aura donc tous les cas où cette intersection se décompose en étudiant les cas dans lesquels le polynome $F(\lambda\mu, 1, \mu, \lambda)$ se décompose.

Nous renverrons le lecteur aux *Leçons de l'Agrégation classique de Mathématiques*, de M. G. Kœnigs. *Voir* aussi Tresse, *Nouvelles Annales*, 1892.

*Remarque.* — La discussion de l'intersection de deux quadriques, au moyen de l'équation $H(\lambda) = 0$, a été faite complètement par Painvin (voir *Nouvelles Annales*, p. 481 ; année 1868). *Voir* aussi Lucien Lévy, *Nouvelles Annales*, p. 65; 1891.

462. *Invariants simultanés de deux quadriques.* — L'équation $H(\lambda)$ développée est

$$H + \Theta\lambda + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda^3 + H'\lambda^4 = 0;$$

H et H' sont les discriminants des deux formes $f(x, y, z, t)$ et $f_1(x, y, z, t)$.

Les coefficients de l'équation précédente sont des invariants. En imitant les raisonnements qui ont été faits à propos de l'équation en $\lambda$ relative à deux coniques, on démontre que si la quadrique $f_1$ est circonscrite à un tétraèdre conjugué à la quadrique $f$, on a $\Theta = 0$ et, réciproquement, si cette condition est remplie, il y a une infinité de tétraèdres conjugués à la première quadrique et inscrits à la seconde.

S'il y a un tétraèdre conjugué à la quadrique $f_1$ et circonscrit à la quadrique $f$, on a $\Theta = 0$ et, réciproquement, si cette condition est remplie, il y a une infinité de tétraèdres conjugués à $f_1$ et circonscrits à $f$.

On dit alors que la quadrique $f_1$ est harmoniquement circonscrite à $f$, ou que $f$ est harmoniquement inscrite à $f_1$.

On voit ainsi que si une quadrique $f_1$ est harmoniquement circonscrite à la quadrique $f$, inversement la quadrique $f$ est harmoniquement inscrite à $f_1$.

On verra de même que la condition pour que $f$ soit harmoniquement circonscrite à $f_1$ et, par suite, $f_1$ harmoniquement inscrite à $f$ est $\Theta_1 = 0$.

Enfin on démontre que la condition $\Phi = 0$ exprime qu'il existe un tétraèdre conjugué *à l'une* des quadriques et dont les six arêtes sont tangentes *à l'autre*, et réciproquement, car $\Phi$ est symétrique par rapport aux coefficients des deux équations.

On vérifie la condition en prenant un pareil tétraèdre pour tétraèdre de référence.

## Faisceau tangentiel de quadriques.

463. Soient $F(u, v, w, r) = 0$, $F_1(u, v, w, r) = 0$ les équations tangentielles de deux quadriques. Le système de ces deux équations définit une surface développable de classe égale à 4. L'équation

$$F(u, v, w, r) + \mu F_1(u, v, w, r) = 0$$

définit un faisceau de quadriques inscrites à cette développable. On voit, en effet, que si un plan $(u_1, v_1, w_1, r_1)$ est tangent à cette développable, c'est-à-dire est un plan tangent aux deux quadriques F et $F_1$, on a

$$F(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0, \qquad F_1(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0$$

et, par conséquent,

$$F(u_1, v_1, w_1, r_1) + \mu F_1(u_1, v_1, w_1, r_1) = 0.$$

En écrivant que le discriminant du premier membre est nul, on trouve quatre valeurs de $\mu$ pour lesquelles l'équation précédente représente une conique. Il y a une relation simple entre les racines de cette équation et celles de $H(\lambda) = 0$; $\lambda\mu = \frac{H}{H_1}$ (*voir* t. I, 519).

On a donc ce théorème, qui est le corrélatif du théorème du n° 458 :

**464.** Théorème. — *Il y a, en général, quatre coniques inscrites à la développable circonscrite à deux quadriques données.*

On voit, en effet, que la développable circonscrite à deux quadriques est la polaire réciproque de la courbe d'intersection des quadriques polaires réciproques des proposées. A tout cône passant par l'intersection de ces quadriques correspond une conique inscrite à la développable.

**465.** Théorème. — *Quand deux quadriques sont bitangentes, on peut leur circonscrire deux cônes du second degré.*

En effet, si l'on transforme par polaires réciproques deux quadriques bitangentes S, $S_1$, il leur correspondra deux quadriques S′, $S'_1$ inscrites à deux cônes, qui sont les polaires réciproques des coniques suivant lesquelles se coupent S et $S_1$. Or, les deux quadriques S′, $S'_1$ étant inscrites à un même cône se coupent suivant deux coniques dont les polaires réciproques sont deux cônes circonscrits à S et $S_1$.

La développable circonscrite aux quadriques données se compose alors de l'ensemble de ces deux cônes.

## EXERCICES.

**1.** Trouver l'équation générale des quadriques tangentes aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche. Montrer que les points de contact sont dans un même plan.

**2.** Trouver l'équation générale des quadriques tangentes aux six arêtes d'un tétraèdre pris pour tétraèdre de référence.

— On trouve quatre équations

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2t^2$$
$$- 2abxy - 2acxz - 2adxt - 2bcyz \pm 2bdyt \pm 2cdzt = 0.$$

**3.** Trouver l'équation générale des quadriques ayant un plan donné pour plan principal.

— On peut former l'équation générale des cylindres du second degré dont les génératrices sont perpendiculaires au plan donné et regarder la quadrique demandée comme circonscrite ou inscrite à ce cylindre.

**4.** Équation générale des quadriques ayant pour centre un point O et admettant pour axe la droite donnée OA.

5. Lieu des centres des quadriques passant par l'intersection de deux quadriques données. Cas où la cubique trouvée se décompose.

6. Par l'intersection de deux quadriques on peut faire passer trois paraboloïdes; le nombre de paraboloïdes hyperboliques est impair.

7. Déterminer l'intersection des deux surfaces ayant pour équations

$$x^2 - 2y^2 + yz + 2zx - xy - x + 2y = 0,$$
$$x^2 - y^2 + yz + zx - x + y = 0.$$

— Appliquer la méthode du n° 432. Ces deux surfaces n'ont que deux droites réelles communes.

8. Discuter la nature de la projection de l'intersection de deux quadriques de révolution dont les axes se rencontrent, sur le plan des deux axes.

9. Étant données deux droites AB, CD non situées dans un même plan, trouver l'intersection de l'hyperboloïde engendré par la rotation de CD autour de AB et du paraboloïde engendré par une droite mobile rencontrant AB et CD et perpendiculaire à AB. (Fouret.)

10. Prouver que si deux quadriques ont deux génératrices communes OA, OB, mêmes plans tangents tout le long de l'une d'elles et en un point de l'autre, elles se raccordent aussi le long de cette dernière.

11. Quand deux quadriques se coupent suivant une conique et deux droites passant par un même point A de cette conique, les sections des deux quadriques par un plan quelconque mené par A ont un contact du second ordre en A ; en outre, si le plan sécant passe par la tangente en A à la conique, le contact est du troisième ordre.

12. Trouver le lieu engendré par une droite mobile qui est tangente à une quadrique donnée et rencontre deux droites fixes. Cas où ces droites sont tangentes à la quadrique.

13. Les plans polaires d'un point fixe par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel passent par une droite fixe. Cas où le point fixe est à l'infini.

14. Le lieu du pôle d'un plan fixe par rapport à toutes les quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite.

Cas particulier : lieu des centres des quadriques du faisceau.

15. Le plan polaire d'un point fixe par rapport aux quadriques passant par sept points donnés passe par un point fixe. Cas où le point fixe est à l'infini.

16. Le lieu du pôle d'un plan fixe par rapport aux quadriques tangentes à sept plans donnés est un plan. — Lieu des centres de ces quadriques.

17. Lieu des sommets des cônes du second degré passant par l'intersection d'une quadrique et d'un cône donné.

18. Si l'on donne un point et le plan tangent en ce point, cela fait trois con-

ditions. Y a-t-il une quadrique tangente à trois plans donnés en des points donnés? Montrer que le problème est impossible ou a une infinité de solutions.

19. Combien passe-t-il, par huit points donnés, de quadriques tangentes à un plan donné?

20. Combien y a-t-il de quadriques tangentes à huit plans donnés et passant par un point donné?

21. Les quadriques qui passent par sept des sommets de deux tétraèdres conjugués à une même quadrique passent par le huitième.

22. Les tangentes menées du centre d'une quadrique aux sphères circonscrites aux tétraèdres conjugués à cette quadrique ont une longueur constante.

23. Les lignes qui joignent les sommets correspondants de deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une quadrique sont des génératrices, d'un même système, d'un hyperboloïde.

24. Les quatre droites suivant lesquelles se coupent les faces correspondantes des deux tétraèdres précédents sont aussi sur un même hyperboloïde.

25. Par les douze points de rencontre des arêtes d'un tétraèdre et d'une quadrique on peut faire passer quatre plans, chacun d'eux étant mené par trois points situés sur les génératrices d'un même sommet; les droites d'intersection de ces plans et des faces opposées du tétraèdre sont des génératrices rectilignes, d'un même système, d'un hyperboloïde.

26. Par les arêtes d'un tétraèdre on mène douze plans tangents à une quadrique; ces plans passent trois à trois par quatre points, si l'on combine ceux qui passent par les arêtes d'une même face; les droites qui joignent ces quatre points aux sommets correspondants du tétraèdre sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde.

(Pour les questions 19 à 26, *voir*, par exemple, *Complément de Géométrie analytique* de BRIOT et BOUQUET; Paris, Dunod.)

27. Soient ABCD le tétraèdre conjugué à deux quadriques S, $S_1$ et $\Gamma$ la courbe gauche d'intersection de S et $S_1$. Les plans polaires d'un point P par rapport aux quadriques passant par $\Gamma$ tournent autour d'une droite $\Delta$; les plans menés par $\Delta$ et par les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est indépendant de la position du point P.

En particulier, les plans menés par une tangente quelconque à $\Gamma$ et par les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. (PAINVIN.)

28. Par l'intersection de deux quadriques de révolution on ne peut faire passer d'autres quadriques de révolution que si les axes des deux quadriques données sont rectangulaires ou parallèles.

S'ils sont rectangulaires, on n'en peut faire passer qu'une : les axes des trois quadriques sont rectangulaires deux à deux.

S'ils sont parallèles, on en peut faire passer une infinité.

— Lieu des foyers de leurs méridiennes. (AMIGUES.)

29. On considère un tétraèdre MABC dont la base est fixe. On prend sur les arêtes AM, BM, CM des longueurs données AA′, BB′, CC′ et l'on suppose que MA′ = MB′ = MC′.

Lieu de M.

# CHAPITRE XXIX.

## FOCALES. — QUADRIQUES HOMOFOCALES.

466. *Définition.* — On appelle *foyer* d'une quadrique le centre d'une sphère de rayon nul bitangente à cette quadrique. Si l'on représente par $f = 0$ l'équation ponctuelle d'une quadrique et par $\sigma = 0$ l'équation d'une sphère bitangente, on pourra déterminer une constante $\lambda$ telle que

$$f - \lambda\sigma \equiv PQ,$$

P et Q désignant deux polynomes du premier degré.

On voit que $\lambda$ est une racine de l'équation en S et que $P = 0$, $Q = 0$ représentent deux plans cycliques. Si le rayon de la sphère $\sigma$ est nul, le centre de cette sphère est un foyer, et la droite représentée par les deux équations $P = 0$, $Q = 0$ se nomme la *directrice* correspondant à ce foyer.

467. *Foyers d'un ellipsoïde.* — Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées d'un foyer. Nous devons déterminer $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de façon que

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] = 0$$

représente un système de plans qui se coupent. Il suffit d'écrire que la qua-

drique représentée par l'équation précédente a une ligne de centres située sur cette surface. Les équations du centre sont

$$\frac{x}{a^2} - \lambda(x - \alpha) = 0, \qquad \frac{y}{b^2} - \lambda(y - \beta) = 0, \qquad \frac{z}{c^2} - \lambda(z - \gamma) = 0.$$

Ces équations devant se réduire à deux, il est nécessaire que l'une d'elles disparaisse identiquement; on doit donc poser, par exemple, $\gamma = 0$, $\lambda = \frac{1}{c^2}$; ce qui confirme l'observation faite plus haut, car $\frac{1}{c^2}$ est une racine de l'équation en S relative à l'ellipsoïde considéré. Les deux autres équations deviennent

$$\frac{x}{a^2} = \frac{x - \alpha}{c^2} = \frac{\alpha}{a^2 - c^2}, \qquad \frac{y}{b^2} = \frac{y - \beta}{c^2} = \frac{\beta}{b^2 - c^2}.$$

Substituant les valeurs de $\frac{x}{a}$ et de $\frac{y}{b}$ ainsi trouvées dans l'équation (1), on obtient, tous calculs faits,

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - c^2} + \frac{\beta^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0, \qquad \gamma = 0.$$

On a ainsi obtenu une infinité de *foyers* situés dans le plan $xOy$; le lieu de ces foyers est une conique. On obtient encore deux autres coniques, situées dans les deux autres plans principaux, dont tous les points sont des foyers; leurs équations sont

$$\frac{\beta^2}{b^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0, \qquad \alpha = 0,$$

$$\frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} + \frac{\alpha^2}{a^2 - b^2} - 1 = 0, \qquad \beta = 0.$$

Ces trois coniques sont les *focales* de l'ellipsoïde donné.

Si l'on considère un des foyers F, situé par exemple dans le plan $xOy$, la directrice correspondante a pour équations

$$x = \frac{a^2 \alpha}{a^2 - c^2}, \qquad y = \frac{b^2 \beta}{b^2 - c^2},$$

$\alpha$, $\beta$, o étant les coordonnées de F.

La polaire du pied D de la directrice dans le plan $xOy$ par rapport à l'ellipse section principale de l'ellipsoïde donné située dans ce plan a pour équation

$$\frac{X\alpha}{a^2 - c^2} + \frac{Y\beta}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

On voit que cette polaire est la tangente en F à la focale et, en outre, qu'elle est perpendiculaire à la droite DF, qui joint le foyer au pied de la

directrice correspondante; on voit, en effet, que la focale et l'ellipse principale ont les mêmes foyers, et l'on sait que le lieu des pôles d'une droite par rapport à une famille de coniques homofocales est une droite perpendiculaire à la première.

On trouverait des résultats analogues pour les hyperboloïdes.

468. *Remarque.* — Nous avons déjà obtenu les focales comme lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à la quadrique. Il est facile d'expliquer ce résultat. En effet, si une sphère est bitangente à une quadrique, on peut circonscrire à cette quadrique et à cette sphère deux cônes (465) qui sont évidemment des cônes de révolution; si le rayon de la sphère est nul, les deux cônes se réduisent à un seul ayant son sommet au centre de la sphère; donc le centre d'une sphère de rayon nul bitangente à une quadrique est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à cette quadrique. Réciproquement, si un cône de révolution est circonscrit à une quadrique, toute sphère y inscrite est bitangente à la quadrique, et, si son rayon est nul, son centre est confondu avec le sommet du cône; donc le sommet du cône peut être considéré comme le centre d'une sphère de rayon nul bitangente à la quadrique donnée.

469. *Foyers d'un paraboloïde.* — Pour que

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x-\lambda[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]=0$$

représente deux plans qui se coupent, nous exprimerons d'abord que les équations

$$1+\lambda(x-\alpha)=0,\qquad \frac{y}{p}-\lambda(y-\beta)=0,\qquad \frac{z}{q}-\lambda(z-\gamma)=0$$

se réduisent à deux. La première ne peut disparaître; on est donc conduit à poser

$$\lambda=\frac{1}{p},\qquad \beta=0\qquad \text{ou}\qquad \lambda=\frac{1}{q},\qquad \gamma=0.$$

Prenons la première solution; on en déduit

$$x=\alpha-p,\qquad \frac{z-\gamma}{p}=\frac{z}{q}=\frac{\gamma}{p-q},$$

ce qui donne une première focale

$$\beta=0,\qquad \frac{\gamma^2}{p-q}+2\alpha-p=0.$$

Il y a une seconde focale ayant pour équations

$$\gamma=0,\qquad \frac{\beta^2}{q-p}+2\alpha-q=0.$$

**470.** *Focales d'un cône.* — L'équation du cône étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

nous cherchons $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, tels que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\lambda[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]=0$$

représente deux plans qui se coupent. En suivant la même méthode que dans les exemples précédents, on trouvera pour focales trois couples de lignes droites passant par le sommet et perpendiculaires aux plans cycliques du cône supplémentaire.

**471.** *Interprétation de l'équation focale d'une quadrique.* — Il y a *deux espèces de foyers.*

L'équation d'une quadrique peut se mettre sous la forme

$$S[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]=PQ.$$

Si S est la racine moyenne de l'équation en S, les équations $P=0$ et $Q=0$ représentent deux plans cycliques réels. On dit alors que le foyer $(\alpha, \beta, \gamma)$ est un foyer de première espèce. L'équation précédente exprime que *le carré de la distance d'un point quelconque* M *de la quadrique à un foyer de première espèce est proportionnel au produit des distances du même point* M *aux deux plans cycliques qui passent par la directrice correspondante.*

Dans le cas d'un ellipsoïde, les foyers de première espèce sont dans le plan principal perpendiculaire à l'axe moyen.

Les foyers qui correspondent aux autres racines de l'équation en S sont appelés *foyers de seconde espèce;* les plans cycliques passant par la directrice correspondant à l'un quelconque de ces foyers sont imaginaires; il convient alors de chercher une autre interprétation de l'équation focale.

Considérons par exemple la focale d'un ellipsoïde située dans le plan perpendiculaire au plus petit axe, en supposant $a>b>c$; soient $\alpha$, $\beta$, $0$ les coordonnées d'un point de cette focale. On a

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\frac{1}{c^2}[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2]\\ =\frac{x^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(y-\beta)^2}{c^2}-1\\ =\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(x-\frac{a^2\alpha}{a^2-c^2}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(y-\frac{b^2\beta}{b^2-c^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Or l'équation $z=mx$ représente un plan cyclique diamétral réel si l'on

pose

$$m^2 = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}$$

et, par suite,

$$1 + m^2 = \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{c^2}[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2]$$
$$\equiv -\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)[(1+m^2)(x-x')^2 + (y-y')^2],$$

$x', y'$ étant les coordonnées du pied de la directrice.

Mais le second membre de l'identité précédente représente le carré de la distance du point $M(x, y, z)$ au point où la directrice est rencontrée par le plan mené par M parallèlement au plan cyclique considéré. Donc, *la distance d'un point quelconque M d'une quadrique à un foyer de seconde espèce de cette surface est proportionnel à la distance du même point à la directrice, cette distance étant comptée parallèlement à un plan cyclique réel.*

**472.** *Nouvelle définition des foyers d'une surface.* — Une sphère de rayon nul est un cône isotrope; un foyer est donc le sommet d'un cône isotrope bitangent à la quadrique. Soit F un foyer; le cône isotrope de sommet F est tangent à la quadrique en deux points M, M': les génératrices FM, FM' s'appuient sur le cercle de l'infini. Supposons que le foyer F se déplace sur une focale; les plans tangents menés par FM et FM' à la développable circonscrite à la quadrique et au cercle de l'infini se déplacent et engendrent deux nappes de cette développable; la focale appartient à chacune de ces nappes : c'est donc une ligne double de cette développable, et l'on peut remarquer que l'intersection des plans tangents le long de FM et de FM' est la tangente en F à la focale. Réciproquement, soit F un point d'une ligne double de la développable; par la tangente en F à cette ligne on peut mener deux plans tangents au cercle de l'infini; ces plans sont aussi tangents à la développable, et, par suite, ils touchent la quadrique en deux points M et M'. Soient I et I' leurs points de contact avec le cercle de l'infini; les droites IM, IM' sont des génératrices du cône isotrope de sommet F qui touchent la quadrique aux deux points M et M'; donc ce cône est bitangent à la quadrique et F en est un foyer.

D'une manière générale, on appellera *focales d'une surface* (ou *d'une courbe*) *quelconque* les lignes doubles de la *développable* circonscrite à cette

surface (ou à cette courbe) et au cercle de l'infini. Cette définition a été proposée par M. G. Darboux en 1864 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*).

**473.** Appliquons ces considérations à une quadrique. Parmi les quadriques inscrites à la développable circonscrite à cette quadrique et au cercle de l'infini, se trouvent, outre le cercle de l'infini, trois quadriques dégénérées en coniques; ces coniques sont précisément les focales.

Les coniques du faisceau tangentiel défini par l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - r^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

autres que le cercle de l'infini, correspondent à $\lambda = -a^2$, $\lambda = -b^2$, $\lambda = -c^2$. On voit, en effet, que le discriminant se réduit à $(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)$.

Si l'on pose $\lambda = -c^2$, par exemple, on obtient

$$(a^2 - c^2)u^2 + (b^2 - c^2)v^2 - r^2 = 0.$$

Cette équation représente la focale située dans le plan des $x$, $y$.

## Quadriques homofocales.

**474.** On appelle *quadriques homofocales* deux quadriques ayant les mêmes focales.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation d'un ellipsoïde; les quadriques homofocales à cet ellipsoïde sont les quadriques inscrites à la développable circonscrite à cet ellipsoïde et au cercle de l'infini; l'équation tangentielle d'une de ces quadriques est donc

$$(a^2 + \lambda)u^2 + (b^2 + \lambda)v^2 + (c^2 + \lambda)w^2 - r^2 = 0,$$

et, par suite, l'équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

On verra de même que l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 0$$

représente une famille de cônes homofocaux.

**475.** Théorème. — *Il passe par tout point trois quadriques homofocales à une quadrique à centre donné : un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.*

En effet, l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2+\lambda}-1=0$$

a trois racines réelles $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$; si l'on suppose $a>b>c$, on a

$$-a^2<\lambda_1<-b^2<\lambda_2<-c^2<\lambda_3;$$

$\lambda_1$ donne un hyperboloïde à deux nappes, $\lambda_2$ un hyperboloïde à une nappe et $\lambda_3$ un ellipsoïde.

476. *Coordonnées elliptiques.* — On a, d'après ce qui précède

$$\frac{x_0^2}{\lambda+a^2}+\frac{y_0^2}{\lambda+b^2}+\frac{z_0^2}{\lambda+c^2}-1\equiv\frac{-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}.$$

En appliquant la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, on trouve immédiatement

$$x_0^2=\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y_0^2=\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z_0^2=\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque peuvent donc s'exprimer au moyen des trois paramètres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ qu'on nomme les coordonnées elliptiques de ce point. A chaque système des valeurs $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ correspondent huit points, sommets d'un parallélépipède rectangle.

477. *Quadriques homofocales à un paraboloïde.* — L'équation tangentielle d'un paraboloïde étant

$$pv^2+qw^2-2ru=0,$$

le faisceau des quadriques homofocales a pour équation tangentielle

$$\lambda u^2+(p+\lambda)v^2+(q+\lambda)w^2-2ru=0,$$

et, par suite, pour équation ponctuelle

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-2x-\lambda=0.$$

On voit qu'il passe par chaque point trois de ces surfaces; en appelant $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ les trois racines correspondant à un point $(x_0, y_0, z_0)$, et en supposant $p>q$, on a

$$\lambda_1<-p<\lambda_2<-q<\lambda_3;$$

on obtient ainsi trois paraboloïdes dont l'un est hyperbolique, celui qui correspond à $\lambda = \lambda_2$.

De l'identité

$$\frac{y_0^2}{p+\lambda} + \frac{z_0^2}{q+\lambda} - 2x_0 - \lambda = - \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(p+\lambda)(q+\lambda)},$$

on déduit

$$y_0^2 = \frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p+\lambda_3)}{q-p},$$

$$z_0^2 = \frac{(q+\lambda_1)(q+\lambda_2)(q+\lambda_3)}{p-q},$$

$$x_0 = -\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+p+q}{2}.$$

## EXERCICES.

1. Trouver les focales d'un cylindre du second degré; d'un système de deux plans.

2. Le plan qui passe par un foyer et par la directrice correspondante est normal à la ligne focale et coupe la quadrique suivant une conique qui admet ce point pour foyer et cette droite pour directrice.

3. Le carré de la distance d'un point au centre d'une quadrique est égal à la somme des carrés de trois des axes des quadriques homofocales passant par ce point.

4. Deux quadriques homofocales se coupent à angle droit.

5. Le lieu du pôle d'un plan donné par rapport à un système de quadriques homofocales et une droite perpendiculaire à ce plan.

6. Trouver les surfaces homofocales à une quadrique donnée et tangentes à un plan donné.

7. Démontrer que les axes d'un cône circonscrit à une quadrique sont les normales aux quadriques homofocales à la proposée et passant par son sommet.

8. Les plans qui passent par les deux lignes focales réelles d'un cône, et par une génératrice du cône font des angles égaux avec le plan tangent au cône le long de cette génératrice.

9. Les cônes de sommet donné, circonscrits à une famille de quadriques homofocales, sont homofocaux et leurs focales sont situées sur les quadriques de la famille qui passent par son sommet.

10. On peut mener deux quadriques homofocales tangentes à une droite. Chercher l'angle des plans tangents.

**11.** On donne une famille de quadriques à centre et homofocales. D'un point pris dans un de leurs plans principaux, on mène des normales à ces surfaces. On demande :

1° De trouver et de construire le lieu des pieds de ces normales;

2° De déterminer l'enveloppe des plans tangents menés aux quadriques par les pieds des normales.

**12.** Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à une quadrique.

**13.** On nomme *points correspondants* de deux quadriques homofocales à centre dont les axes ont pour longueurs $2a, 2b, 2c$; $2a', 2b', 2c'$ deux points dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}.$$

Chercher tous les points qui correspondent à un point donné sur l'une des surfaces et situés sur les surfaces de même espèce.

**14.** La somme des carrés des distances au centre de deux points situés sur deux ellipsoïdes homofocaux est égale à la somme des carrés des distances au centre des deux points correspondants.

**15.** La distance de deux points situés sur deux ellipsoïdes homofocaux est égale à la distance des deux points correspondants. (IVORY.)

**16.** Que représente l'équation $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{const.}$ (476).

**17.** Trouver le lieu des directrices d'une quadrique; cas d'un cône.

**18.** Trouver le lieu des cubiques des normales issues d'un point P relatives à un système de quadriques homofocales.

**19.** Trouver la limite des focales d'une quadrique à centre dont un axe tend vers zéro.

**20.** *Foyers et directrices de l'ellipse sphérique.* — Si l'on coupe une sphère par un cône ayant son sommet au centre de la sphère, les focales du cône coupent la sphère en quatre points, deux à deux diamétralement opposés, et les plans directeurs, lieux des directrices, la coupent suivant deux arcs de grand cercle; le plan des deux focales coupe la sphère suivant un grand cercle; en considérant l'une des ellipses sphériques déterminées on obtient deux foyers intérieurs et deux directrices correspondantes.

Démontrer les théorèmes suivants :

**21.** Le rapport des sinus des distances sphériques d'un point d'une ellipse sphérique à un foyer et à la directrice correspondante est constant.

**22.** La somme des rayons vecteurs sphériques qui joignent un point quelconque d'une ellipse sphérique à ses deux foyers intérieurs est constante.

23. La tangente à l'ellipse sphérique fait des angles égaux avec les rayons vecteurs.

24. La somme des angles qu'une tangente quelconque à l'ellipse sphérique fait avec les arcs cycliques (intersection de la sphère avec les plans cycliques du cône supplémentaire au premier, menés par le centre) est constante.

25. Les portions d'une tangente à l'ellipse sphérique comprises entre le point de contact et les arcs cycliques sont égales.

26. Les deux tangentes sphériques que l'on peut mener d'un point de la sphère à une ellipse sphérique font des angles égaux avec les rayons vecteurs qui joignent ce point aux deux foyers.

27. Le rayon vecteur mené d'un foyer à un point quelconque partage en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs menés du même foyer aux points de contact des tangentes à l'ellipse menées par ce point.

28. Si l'on mène un grand cercle sécant quelconque, les portions de ce grand cercle comprises entre l'ellipse sphérique et les deux arcs cycliques sont égales.

29. Si par deux points d'un arc cyclique on mène des tangentes à une ellipse sphérique, la corde de contact divise cet arc cyclique en deux parties égales.

30. Le produit des sinus des perpendiculaires sphériques abaissées d'un point d'une ellipse sphérique sur les deux arcs cycliques est constant.

31. Le produit des sinus des perpendiculaires menées des deux foyers sur une tangente à l'ellipse sphérique est constant.

32. Les quatre points où les deux arcs cycliques sont rencontrés par deux tangentes sont sur un même petit cercle.

33 Le quadrilatère ayant pour côtés les rayons vecteurs menés des foyers à deux points de l'ellipse sphérique est circonscriptible à un petit cercle.

(Voir Briot et Bouquet, *Complément de la Géométrie analytique.*)

34. Lieu des centres des ellipsoïdes de révolution dont les extrémités de trois diamètres conjugués sont trois points donnés A, B, C.

— La section du cône asymptote par le plan ABC est une conique déterminée. Le lieu se compose des focales de cette conique.

# CHAPITRE XXX.

## ÉLÉMENTS D'UNE SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE.

---

### Détermination des axes de la section.

*Premier cas : conique à centre.*

**478.** Soient

$$f(x, y, z) = 0, \qquad ux + vy + wz + h = 0$$

les équations d'une section plane d'une quadrique; désignons par $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du centre $\omega$ de cette section; on a

$$\frac{f'_{x_0}}{u} = \frac{f'_{y_0}}{v} = \frac{f'_{z_0}}{w}. \tag{1}$$

Appelons $-2\lambda$ la valeur commune de ces rapports; on obtient, en développant,

$$\left\{\begin{array}{l} A\,x_0 + B''y_0 + B'z_0 + C + \lambda u = 0, \\ B''x_0 + A'y_0 + B\,z_0 + C' + \lambda v = 0, \\ B'x_0 + B\,y_0 + A''z_0 + C'' + \lambda w = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0. \tag{3}$$

Nous poserons

$$-\Phi(u, v, w) = \left|\begin{array}{c|c} \Delta & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \\ \hline u \quad v \quad w & 0 \end{array}\right|, \qquad -F(u, v, w, h) = \left|\begin{array}{c|c} H & \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ h \end{array} \\ \hline u \quad v \quad w \quad h & 0 \end{array}\right|.$$

Le premier de ces déterminants, égalé à zéro, donne la condition pour que le plan $(u, v, w, 0)$ soit tangent au cône des directions asymptotiques de la quadrique $f$, ayant son sommet à l'origine, c'est-à-dire pour que la section soit du genre parabole. Nous supposerons d'abord ce déterminant différent de zéro; dans ce cas, les équations (2) et (3) déterminent le centre $\omega$.

Nous aurons besoin encore de calculer $f(x_0, y_0, z_0)$, que nous désignerons, pour abréger, par $k$. On a

$$2k = x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} + f'_{t_0} (t_0 = 1);$$

donc, en vertu des équations (2) et (3),

$$k = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D + \lambda h. \tag{4}$$

L'élimination de $x_0, y_0, z_0, \lambda$ entre les équations (2), (3), (4) donne

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D-k & h \\ u & v & w & h & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où, à l'aide des notations adoptées,

$$(5) \qquad k = \frac{F(u, v, w, h)}{\Phi(u, v, w)}.$$

Cela posé, si, sans changer la direction des axes de coordonnées, nous prenons $\omega$ pour origine, les équations de la section deviennent

$$\varphi(x, y, z) + x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} + k = 0,$$
$$ux + vy + wz = 0;$$

mais, en remarquant que

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} \equiv -2\lambda(ux + vy + wz),$$

on peut écrire ainsi les équations de cette courbe :

$$(6) \qquad \varphi(x, y, z) + k = 0,$$
$$(7) \qquad ux + vy + wz = 0.$$

Soit $\omega A$ un axe de la section. La tangente AT au sommet A est perpendiculaire à $\omega A$; elle est donc dans le plan tangent en A à la sphère de centre $\omega$ et de rayon $\omega A$, et comme elle appartient aussi au plan tangent en A à la quadrique, c'est la tangente au même point à la courbe commune à ces deux surfaces. Il résulte de là que le plan sécant est tangent au cône ayant pour sommet le point $\omega$ et pour directrice cette courbe commune. Réciproquement, si le plan sécant est tangent à ce cône, la droite AT tangente en A à la courbe commune à la sphère de rayon $\omega A$ et à la quadrique est dans le plan sécant; c'est donc la tangente en A à la conique et, comme elle est perpendiculaire au rayon de la sphère, $\omega A$ est un axe de la conique.

Or, si l'on appelle $r$ la longueur $\omega A$, l'équation du cône que nous venons de définir est

$$r^2 \varphi(x, y, z) + k(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

La condition pour que le plan $(u, v, w, h)$ soit tangent à ce cône est

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} A + \frac{k}{r^2} & B'' & B' & u \\ B'' & A' + \frac{k}{r^2} & B & v \\ B' & B & A'' + \frac{k}{r^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes de la section. Si les coordonnées étaient obliques, il faudrait remplacer $x^2+y^2+z^2$ par $x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu$ et, par suite, B, B', B″ par $B+\frac{k}{r^2}\cos\lambda$, $B'+\frac{k}{r^2}\cos\mu$, $B''+\frac{k}{r^2}\cos\nu$.

Pour obtenir la direction de l'axe correspondant à une racine de cette équation, il suffit de remarquer que cet axe est la polaire du plan sécant par rapport au cône, puisque ce plan est tangent au cône; les équations de $\omega$A sont donc

$$(9)\qquad \frac{r^2\varphi'_x+2kx}{u}=\frac{r^2\varphi'_y+2ky}{v}=\frac{r^2\varphi'_z+2kz}{w}.$$

Le problème est entièrement résolu; mais on peut disposer les calculs de la manière suivante. En introduisant un paramètre S' et posant $\frac{k}{r^2}=-S$, on peut remplacer les équations précédentes par celles-ci :

$$(10)\qquad \begin{cases} \varphi'_x-2Sx+2S'u=0,\\ \varphi'_y-2Sy+2S'v=0,\\ \varphi'_z-2Sz+2S'w=0,\end{cases}$$

On a donc

$$(11)\qquad \begin{cases} (A-S)x+B''y+B'z+S'u=0,\\ B''x+(A'-S)y+Bz+S'v=0,\\ B'x+By+(A''-S)z+S'w=0,\\ ux+vy+wz=0,\end{cases}$$

d'où

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u\\ B'' & A'-S & B & v\\ B' & B & A''-S & w\\ u & v & w & 0\end{vmatrix}=0.$$

Cette équation se déduit d'ailleurs de l'équation (8), en y remplaçant $\frac{k}{r^2}$ par $-S$. On démontre aisément que l'équation (12) a ses deux racines réelles; en effet, le déterminant (12) est le discriminant de la forme

$$\varphi(x,y,z)+2t(ux+vy+wz)-S(x^2+y^2+z^2).$$

Si l'équation (12) avait une racine imaginaire $a+bi$, on aurait

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi(x,y,z)+2t(ux+vy+wz)-(a+bi)(x^2+y^2+z^2)\\ \quad\equiv(P+P'i)^2+(Q+Q'i)^2+(R+R'i)^2,\end{cases}$$

P, P', ..., R' désignant des polynomes linéaires à coefficients réels. Le système $P'=0$, $Q'=0$, $R'=0$ admet des solutions dans lesquelles toutes les inconnues ne sont pas nulles. Soit $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ une de ces solutions. On ne

peut pas supposer $x' = y' = z' = 0$, car l'identité précédente donnerait, pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = t'$ : $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$, c'est-à-dire $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$; ce qui est impossible, car l'un au moins de ces polynomes doit contenir un terme en $t$, puisque s'il en était autrement, en appelant $p', q', r'$ les coefficients de $t$ dans P', Q', R', le coefficient de $t^2$ dans le second membre de l'identité (13) serait égal à $-(p'^2 + q'^2 + r'^2)$, ce qu'on ne saurait admettre, le premier membre ne contenant pas de terme en $t^2$. Il résulte de là que le coefficient de $i$, qui est égal à $-b(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, devant être nul, on a $b = 0$. En remplaçant S par une racine de l'équation (12), les équations (11) se réduiront à trois et détermineront les rapports $x : y : z : S'$, et, par suite, donneront la direction de l'axe correspondant.

On peut remarquer que les équations (10) donnent

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \varphi'_x & x & u \\ \varphi'_y & y & v \\ \varphi'_z & z & w \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on revient aux axes primitifs et si l'on remarque que

$$\varphi'_{x-x_0} = f'_x - f'_{x_0} = f_x + 2\lambda u, \qquad \ldots,$$

l'équation précédente devient

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & x - x_0 & u \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & y - y_0 & v \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & z - z_0 & w \end{vmatrix} = 0.$$

Les axes de la section sont les droites communes au plan sécant et au cône représenté par l'équation (15). La forme de cette équation montre que ce cône est le cône des normales à la quadrique issues du point $\omega$. On voit que ce cône contient la normale au plan sécant mené par $\omega$, puisque pour tous les points de cette normale deux colonnes du déterminant sont proportionnelles; *donc le cône des normales contient la normale au plan qui coupe la quadrique suivant une conique dont le point d'émission des normales est le centre.*

On peut déterminer autrement les axes. En effet, soit S une racine de l'équation (12) et soient $\alpha, \beta, \gamma$ les paramètres directeurs de l'axe correspondant; le second axe étant dans le plan diamétral conjugué à la direction $\alpha, \beta, \gamma$, les coordonnées d'un point de cet axe vérifient l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0;$$

d'ailleurs

$$(A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma + S'u = 0,$$
$$B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma + S'v = 0,$$
$$B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma + S'w = 0.$$

Les équations de cet axe sont donc

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u \\ B'' & A'-S & B & v \\ B' & B & A''-S & w \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$ux + vy + wz + h = 0.$$

**479.** *Cas particulier.* — Supposons que la quadrique soit un ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie et que le plan sécant soit un plan diamétral.

L'équation du cône passant par l'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère concentrique de rayon $r$ étant

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

la condition pour que le plan $(u, v, w)$ soit tangent à ce cône est

$$(17)\qquad \frac{a^2u^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2v^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2w^2}{r^2-c^2}=0;$$

c'est l'équation aux carrés des demi-longueurs d'axes de la section.

Si $r$ désigne une racine de cette équation, l'axe correspondant a pour équations

$$(18)\qquad \frac{x(r^2-a^2)}{a^2u}=\frac{y(r^2-b^2)}{b^2v}=\frac{z(r^2-c^2)}{c^2w}.$$

Supposons maintenant que le plan sécant soit défini par l'équation

$$ux+vy+wz+h=0;$$

les coordonnées du centre de la section sont déterminées par le système

$$\frac{x_0}{a^2u}=\frac{y_0}{b^2v}=\frac{z_0}{c^2w}=\frac{-h}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}$$

et, par suite,

$$k=f(x_0,y_0,z_0)=\frac{h^2}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}-1.$$

L'équation du cône devient

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{k}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{k}{r^2}\right)=0;$$

l'équation aux carrés des demi-axes est donc

$$(19)\qquad \frac{a^2u^2}{r^2+ka^2}+\frac{b^2v^2}{r^2+kb^2}+\frac{c^2w^2}{r^2+kc^2}=0,$$

et les équations de l'axe deviennent, par rapport aux axes de symétrie de l'ellipsoïde,

$$(20) \quad \frac{(x-x_0)(r^2+ka^2)}{a^2 u} = \frac{(y-y_0)(r^2+kb^2)}{b^2 v} = \frac{(z-z_0)(r^2+kc^2)}{c^2 w}.$$

Si $h = 0$, on a $k = -1$; les équations (19) et (20) se réduisent aux équations (17) et (18).

480. Problème. — *Sur chaque diamètre d'un ellipsoïde on porte une longueur* OM *égale à l'un des demi-axes de la section diamétrale perpendiculaire à ce diamètre; trouver le lieu de* M.

Soient $x, y, z$ les coordonnées de M; le plan perpendiculaire à OM a pour équation

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$

en outre

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2-b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2-c^2} = 0.$$

L'équation du lieu est donc

$$(S) \quad \frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2} + \frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2} + \frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2} = 0;$$

c'est la surface d'onde de l'ellipsoïde ayant pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0,$$

dont nous avons trouvé une autre définition (203).

Les deux ellipsoïdes que nous venons de considérer sont polaires réciproques par rapport à la sphère concentrique de rayon un. Leurs surfaces d'onde sont aussi polaires réciproques par rapport à la même sphère.

En effet, considérons un plan tangent en M à la surface d'onde S; le point de contact M' du plan polaire de M est sur la perpendiculaire OP abaissée du centre de la sphère sur le premier plan, et, si $x', y', z'$ sont les coordonnées de M' et $r'$ sa distance au centre, l'équation du premier plan étant (203)

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = V,$$

on a

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{y'}{\beta} = \frac{z'}{\gamma} = r' = \frac{1}{V},$$

$$\frac{\alpha^2}{V^2-a^2} + \frac{\beta^2}{V^2-b^2} + \frac{\gamma^2}{V^2-c^2} = 0;$$

donc le lieu de M' a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2(x^2+y^2+z^2)-1} + \frac{y^2}{b^2(x^2+y^2+z^2)-1} + \frac{z^2}{c^2(x^2+y^2+z^2)-1} = 0.$$

On passe de S à S′ en changeant $a$, $b$, $c$ en $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$; ce qui démontre la proposition.

Pour plus de détails sur la surface d'onde voir *Traité de Géométrie* de Rouché et de Comberousse (Paris, Gauthier-Villars).

*Deuxième cas : Section parabolique.*

**481.** Nous regarderons une section parabolique comme limite d'une section elliptique ou hyperbolique; il suffit de supposer qu'une racine de l'équation (12) tende vers zéro : l'axe qui lui correspond grandit indéfiniment. L'autre axe a pour équations

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad ux + vy + wz + h = 0.$$

Il reste à déterminer le paramètre $p$ de la parabole. Soient S, S′ les deux racines de l'équation (12), on a

$$p^2 = \lim \frac{b^4}{a^2} = \lim \frac{-kS}{S'^2} = \lim \frac{-kSS'}{S'^3}.$$

Or l'équation (12) développée s'écrit

$$(u^2+v^2+w^2)S^2 - [(A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2) - \varphi(u,v,w)]S + \Phi(u,v,w) = 0,$$

donc

$$-\frac{kSS'}{S'^3} = -\frac{F(u,v,w,h)}{(u^2+v^2+w^2)S'^3}.$$

La racine S tend vers zéro, S′ a pour limite

$$A + A' + A'' - \frac{\varphi(u,v,w)}{u^2+v^2+w^2};$$

on a donc enfin

$$p = \frac{(u^2+v^2+w^2)[-F(u,v,w,h)]^{\frac{1}{2}}}{[(A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2) - \varphi(u,v,w)]^{\frac{3}{2}}}.$$

J'ai emprunté ce calcul à M. G. Kœnigs (*Leçons de l'Agrégation classique*).

**482.** *Autre méthode.* — Nous indiquerons rapidement la méthode suivante, qui nous a été communiquée par M. E. Borel. Cette méthode ne sup-

pose connue aucune propriété des quadriques et pourrait servir à établir l'équation tangentielle, la théorie du centre, celle des diamètres, des axes, etc.

Faisons un changement de coordonnées et prenons deux axes rectangulaires dans le plan sécant; nous poserons

$$x = x_0 + aX + a'Y, \qquad y = y_0 + bX + b'Y, \qquad z = z_0 + cX + c'Y,$$

avec les conditions

(1) $$ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0,$$

(2) $$ua + vb + wc = 0,$$

(3) $$ua' + vb' + wc' = 0,$$

(4) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

(5) $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

(6) $$aa' + bb' + cc' = 0.$$

L'équation donnée $f(x, y, z) = 0$ devient

$$X^2\varphi(a, b, c) + Y^2\varphi(a', b', c') + XY\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial a'} + b\frac{\partial\varphi}{\partial b'} + c\frac{\partial\varphi}{\partial c'}\right)$$
$$+ X\left(a\frac{\partial f}{\partial x_0} + b\frac{\partial f}{\partial y_0} + c\frac{\partial f}{\partial z_0}\right) + Y\left(a'\frac{\partial f}{\partial x_0} + b'\frac{\partial f}{\partial y_0} + c'\frac{\partial f}{\partial z_0}\right) + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Pour que la section soit rapportée à ses axes, il faut poser

(7) $$a\frac{\partial f}{\partial x_0} + b\frac{\partial f}{\partial y_0} + c\frac{\partial f}{\partial z_0} = 0,$$

(8) $$a'\frac{\partial f}{\partial x_0} + b'\frac{\partial f}{\partial y_0} + c'\frac{\partial f}{\partial z_0} = 0,$$

(9) $$a\frac{\partial\varphi}{\partial a'} + b\frac{\partial\varphi}{\partial b'} + c\frac{\partial\varphi}{\partial c'} = 0.$$

Les carrés des longueurs des axes sont

$$-\frac{f(x_0, y_0, z_0)}{\varphi(a, b, c)} \quad \text{et} \quad -\frac{f(x_0, y_0, z_0)}{\varphi(a', b', c')}.$$

Les équations (2), (3), (7), (8) donnent

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_0}}{u} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y_0}}{v} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_0}}{w}.$$

Ces équations et l'équation (1) permettent de calculer aisément $x_0$, $y_0$, $z_0$ et $f(x_0, y_0, z_0)$.

Les équations (2), (6), (9) donnent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial a'} = Sa' + \lambda u, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial b'} = Sb' + \lambda v, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial c'} = Sc' + \lambda w,$$

S et $\lambda$ étant deux indéterminées; d'où l'on tire

$$\varphi(a', b', c') = \frac{1}{2}\left(a'\frac{\partial\varphi}{\partial a'} + b'\frac{\partial\varphi}{\partial b'} + c'\frac{\partial\varphi}{\partial c'}\right) = \text{S}.$$

On aura S en éliminant $a'$, $b'$, $c'$, $\lambda$ entre les équations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial a'} - \text{S}a' = \lambda u,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial b'} - \text{S}b' = \lambda v,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial c'} - \text{S}c' = \lambda w,$$

$$ua' + vb' + wc' = 0.$$

On retrouve ainsi l'équation en S déjà obtenue, etc.

## Foyers de la section.

**483.** Pour trouver les foyers de la section, on remarque que l'on peut calculer les carrés $a^2$, $b^2$ des demi-axes de la section, et, comme on sait former les équations des deux axes, il suffira de déterminer l'intersection de ces deux droites avec la sphère ayant pour centre $\omega$ et pour rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Voici une autre méthode. Soit F un foyer de la section; les tangentes FM, FM' à la section, issues de ce point, sont des droites isotropes. D'autre part, ces droites appartiennent au cône de sommet F circonscrit à la quadrique; par conséquent, le plan de la section est un plan cyclique de ce cône. Réciproquement, si le plan sécant est un plan cyclique du cône circonscrit à la quadrique et ayant son sommet en un point F de ce plan, les tangentes à la section issues de F sont isotropes, F est un foyer de cette section. Il s'agit d'exprimer ces conditions. Soient $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées d'un foyer F; nous poserons, pour abréger,

$$f(x_1, y_1, z_1) = f_1, \qquad 2\text{P} \equiv x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + z_1\frac{\partial f}{\partial z} + t_1\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\text{Q} \equiv ux + vy + wz + h.$$

Le cône de sommet F, circonscrit à la quadrique, a pour équation

$$ff_1 - \text{P}^2 = 0.$$

Si le plan Q est un plan cyclique de ce cône, on pourra déterminer S de façon que

$$ff_1 - \text{P}^2 - \lambda\sigma \equiv \text{QR},$$

$\text{R} = 0$ représentant un plan passant par F et $\sigma$ étant le premier membre de l'équation d'une sphère de rayon nul ayant son centre au point F.

L'équation précédente peut s'écrire ainsi

$$ff_1 - \lambda\sigma \equiv P^2 + QR.$$

Or $P^2 + QR = 0$ représente un cône ayant son sommet en F et tangent au plan Q; toute la question revient à déterminer $x_1, y_1, z_1$, S, de façon que l'équation

$$f - S[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2] = 0$$

représente un cône tangent au plan sécant, le point $(x_1, y_1, z_1)$ étant assujetti à être dans ce plan.

On doit d'abord poser

$$(1) \qquad ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0.$$

La condition pour que l'équation précédente représente un cône est

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & C + Sx_1 \\ B'' & A' - S & B & C' + Sy_1 \\ B' & B & A'' - S & C'' + Sz_1 \\ C + Sx_1 & C' + Sy_1 & C'' + Sz_1 & D - S(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Mais ce déterminant peut prendre une autre forme; en ajoutant aux éléments de la dernière colonne ceux des trois autres multipliés respectivement par $x_1, y_1, z_1$, puis cela fait, en traitant de la même façon les lignes, on obtient

$$(2)' \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ B'' & A' - S & B & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} \\ B' & B & A'' - S & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_1} & f_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées du sommet du cône doivent vérifier les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (A - S)x + B''y + B'z + C + Sx_1 &= 0, \\ B''x + (A' - S)y + Bz + C' + Sy_1 &= 0, \\ B'x + By + (A'' - S)z + C'' + Sz_1 &= 0, \\ ux + vy + wz + h &= 0; \end{aligned}$$

ce qui donne une deuxième équation

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' & C + Sx_1 \\ B'' & A' - S & B & C' + Sy_1 \\ B' & B & A'' - S & C'' + Sz_1 \\ u & v & w & h \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant aux éléments de la quatrième colonne ceux des trois autres, multipliés respectivement par $x_1, y_1, z_1$, on obtient, en tenant compte de l'équation (1),

$$(3)' \qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ B'' & A'-S & B & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} \\ B' & B & A''-S & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_1} \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour exprimer que le plan de la conique est tangent au cône, il suffit d'exprimer maintenant que le plan $(u, v, w, 0)$ est tangent au cône parallèle ayant son sommet à l'origine, ce qui donne

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u \\ B'' & A'-S & B & v \\ B' & B & A''-S & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (4) est l'équation que nous avons déjà obtenue en cherchant les axes de la section. Considérons l'une des racines de cette équation; en remplaçant dans les autres équations S par cette racine, les équations (1) et (3) représentent une droite, si l'on regarde $x_1, y_1, z_1$ comme des coordonnées courantes; l'équation (2) représente une quadrique, les points de rencontre de cette droite et de cette quadrique sont deux foyers; on aura les deux autres en remplaçant S par l'autre racine de l'équation (4).

**484.** *Cas particulier :* $f(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, et le plan sécant passe par l'origine. Appliquons la méthode précédente à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - S[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2] = 0.$$

Les coordonnées du centre sont données par les équations

$$\frac{x}{a^2} = \frac{x-x_1}{\frac{1}{S}} = \frac{x_1}{a^2 - \frac{1}{S}}, \qquad \ldots;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x^2}{a^2} - S(x-x_1)^2 = \frac{x_1^2}{a^2 - \frac{1}{S}}, \qquad \ldots.$$

La surface sera donc un cône si

$$(5) \qquad \frac{Sx_1^2}{a^2S-1} + \frac{Sy_1^2}{b^2S-1} + \frac{Sz_1^2}{c^2S-1} - 1 = 0.$$

Le sommet de ce cône sera dans le plan $(u, v, w, o)$ si

$$(6)\qquad \frac{a^2 u x_1}{a^2 S - 1} + \frac{b^2 v y_1}{b^2 S - 1} + \frac{c^2 w z_1}{c^2 S - 1} = 0.$$

La condition de contact est

$$(7)\qquad \frac{a^2 u^2}{a^2 S - 1} + \frac{b^2 v^2}{b^2 S - 1} + \frac{c^2 w^2}{c^2 S - 1} = 0,$$

enfin

$$(8)\qquad u x_1 + v y_1 + w z_1 = 0.$$

Les foyers de la section sont déterminés par les équations (5), (6), (7), (8).

Les directrices correspondant aux foyers sont les intersections du plan sécant et des plans polaires des foyers par rapport à la quadrique.

## EXERCICES.

1. Discuter l'équation (17) du n° 479; en déduire les plans cycliques. Même question pour l'équation (8) du n° 478.

2. Si l'on nomme $r_1$ et $r_2$ les axes d'une section diamétrale d'un ellipsoïde et $\theta$, $\theta'$ les angles que le plan de cette section fait avec les plans cycliques diamétraux, on a

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \cos\theta . \cos\theta'.$$

3. Trouver les axes et les foyers de la section par le plan $(u, v, w, h)$ de la quadrique dont l'équation tangentielle est $F(u, v, w, h) = 0$.

4. Trouver les longueurs des axes d'une section plane d'une quadrique en exprimant qu'un axe est un rayon vecteur, maximum ou minimum, issu du centre de la section (voir G. Kœnigs, *Leçons de l'Agrégation classique*).

5. Trouver les axes et les foyers d'une section plane en regardant cette conique comme la section droite d'un cylindre.

6. Trouver les axes et les foyers d'une section plane d'une quadrique en considérant une quadrique circonscrite à la première le long de cette section et en supposant que l'axe perpendiculaire au plan de la section tende vers zéro.

7. Montrer que les directions des axes de la section faite par le plan

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \lambda$$

dans la quadrique $A x^2 + \ldots + D = 0$ sont données par l'intersection du plan

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$ et du cône

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}\cos^2\beta - \mathrm{A}'\cos^2\alpha + 2\mathrm{B}''\cos\alpha\cos\beta)(x^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\alpha) = 0$$

(MATHIEU).

8. Les axes $R_1$, $R_2$ de la section (mêmes notations qu'au n° 7) sont donnés par les équations

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{\frac{\partial H}{\partial D}}{H}[\mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{A}'\cos^2\beta + \mathrm{A}''\cos^2\gamma + 2\mathrm{B}\cos\beta\cos\gamma + 2\mathrm{B}'\cos\gamma\cos\alpha + 2\mathrm{B}''\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{A} - \mathrm{A}' - \mathrm{A}''],$$

$$\frac{1}{R_1^2 R_2^2} = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial D}\right)^2}{H^2},$$

où

$$H = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' & \mathrm{C} & \cos\alpha \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} & \mathrm{C}' & \cos\beta \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' & \mathrm{C}'' & \cos\gamma \\ \mathrm{C} & \mathrm{C}' & \mathrm{C}'' & \mathrm{D} & -\lambda \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & -\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

(PAINVIN).

9. Un cône dont le sommet est un point de l'hyperbole

$$x = 0, \qquad \frac{z^2}{k^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1$$

est circonscrit à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad a > b > c,$$

en outre

$$b^2 - c^2 = \frac{b^2(a^2 - b^2)}{h^2} + \frac{c^2(a^2 - c^2)}{k^2},$$

prouver que les directrices des sections faites dans l'ellipsoïde par les plans de contact de ces cônes sont dans un système de deux plans fixes. (T.)

10. Le lieu des foyers des sections faites dans un ellipsoïde de révolution par un faisceau de plans passant par une même droite parallèle à l'axe de révolution est une podaire d'ellipse. (FOURET.)

11. Le lieu des foyers des sections faites dans un cylindre parabolique par un faisceau de plans passant par une même droite perpendiculaire au plan diamétral principal du cylindre est une podaire de parabole. (FOURET.)

12. Par tous les points d'une conique on mène, dans une direction donnée, des droites parallèles et égales au rayon focal correspondant : le lieu des extrémités est une conique. Trouver le lieu des centres et des foyers de cette

conique lorsqu'on fait varier la direction donnée, dans le plan ou dans l'espace.

13. On coupe un ellipsoïde par des plans parallèles à un plan donné, ou passant par une droite donnée, ou passant par un point donné. Lieu des foyers des sections.

14. Le lieu des foyers des sections diamétrales de l'ellipsoïde

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0$$

a pour équation

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)(1-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2)}{ax^2+by^2+cz^2} = \frac{(c-b)^2y^2z^2+(a-c)^2z^2x^2+(b-a)^2x^2y^2}{a(c-b)^2y^2z^2+b(a-c)^2z^2x^2+c(b-a)^2x^2y^2}.$$

15. On donne un paraboloïde ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$x^2 = y^2 + 2pz:$$

1° Lieu des foyers des sections parallèles à son axe; 2° lieu de foyers des sections dont les plans sont tangents à un cylindre parallèle à l'axe; cas où ce cylindre a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $ay^2 = x^3$; 3° que doit être ce cylindre pour que la courbe, lieu des foyers, soit sur un autre cylindre ayant pour équation

$$(x^2+y^2)^3 = a^3y^3 + b^3x^3 \qquad \text{(Amigues).}$$

16. On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section on mène, dans le plan de la courbe, une perpendiculaire à l'axe, qui coupe la courbe en deux points A et B. Au point A on mène, dans le plan de la parabole, la normale AM à cette courbe; puis par AM on fait passer des plans variables. Lieu des foyers des paraboles suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane. (Amigues.)

17. On considère l'une des quadriques qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et un plan. La section par ce plan est une conique dont on demande les foyers. Lieu de ces foyers quand la quadrique varie; lieu des foyers quand la quadrique restant la même, le plan se déplace parallèlement à lui-même. (Amigues.)

18. Lieu des foyers des quadriques de révolution circonscrites à une quadrique donnée, pour lesquelles la distance des deux foyers est constante.

19. Prouver que la surface d'onde est la surface *apsidale* d'un ellipsoïde, relative à son centre.

— Par un point fixe O, et dans le plan passant par la normale PN en un point quelconque P d'une surface, on mène OM égale et perpendiculaire à OP. Le lieu de M est la *surface apsidale* de la surface donnée relative au point O. Montrer qu'il y a réciprocité.

20. Trouver la podaire de la surface d'onde par rapport à son centre.

Montrer que c'est la surface apsidale de la podaire du centre de l'ellipsoïde ou *surface d'élasticité.*

**21.** Trouver la surface inverse de la surface d'onde, le pôle d'inversion étant le centre.

**22.** Si un cône du second degré, ayant son sommet au centre, coupe la surface d'onde suivant une courbe sphérique, le cône supplémentaire coupe aussi l'ellipsoïde correspondant suivant une courbe sphérique.

# CHAPITRE XXXI.

## APPLICATION DES IMAGINAIRES A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

**485.** Si l'on trace dans un plan deux axes rectangulaires $Ox, Oy$, on sait que si l'on fait correspondre à l'imaginaire $a+bi$ un vecteur $\overline{OM}$ dont l'extrémité M a pour coordonnées $a, b$; au produit $(a+bi)\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ correspond un vecteur que l'on obtient en faisant tourner OM d'un angle $\alpha$ dans un sens déterminé et en multipliant la longueur du vecteur par $\rho$. Pour appliquer la théorie des imaginaires à la rotation d'un vecteur autour d'un axe quelconque on a été conduit à des règles d'opérations qui constituent ce qu'on appelle le *calcul des quaternions* et dont nous allons essayer de donner une idée très sommaire.

Considérons trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, mais disposés de façon qu'une rotation de 90° autour de $Oz$, de *droite à gauche*, amène $Ox$ sur $Oy$; une rotation de 90° autour de $Ox$, de droite à gauche, amène $Oy$ sur $Oz$, etc. Prenons sur chacun de ces axes des vecteurs de longueur un, que nous nommerons des *vecteurs unitaires* et que nous représenterons par les lettres $i, j, k$.

Nous regarderons aussi $i$ comme un symbole définissant une rotation de 90° autour de $Ox$ dans le sens de droite à gauche. Cela étant, si l'on fait tourner $\overline{OB}$ de 90° autour de $\overline{Ox}$, de droite à gauche, $\overline{OB}$ vient coïncider avec $\overline{OC}$, ce que nous exprimerons par l'égalité symbolique

$$ji = k.$$

D'autre part, si nous faisons tourner $\overline{OA}$ de 90° autour de $Oy$, de droite à gauche, $\overline{OA}$ viendra, non pas en $\overline{OC}$, mais en $\overline{OC'}$, C' étant le symétrique de C par rapport à O; ce que nous exprimerons par l'égalité symbolique

$$ij = -k.$$

Nous aurons ainsi les formules fondamentales suivantes

$$ij = -k, \quad jk = -i, \quad ki = -j, \quad ji = k, \quad kj = i, \quad ik = j.$$

Ainsi, dans *ce calcul symbolique* on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des facteurs.

Un vecteur OM, tracé dans le plan $y\text{O}z$, sera représenté par $aj + bk$, les coordonnées de son extrémité M étant $x = 0$, $y = a$, $z = b$. Si nous multiplions *à droite* par $i$, nous trouverons

$$(bj + bk)i = aji + bki = ak - bj = (-b)j + ak;$$

l'opération *multiplier à droite par i* correspond bien à la rotation de 90° de droite à gauche du vecteur $\overline{\text{OM}}$.

On verrait aussi que la multiplication *à gauche* par $i$ correspond à la rotation du même vecteur de gauche à droite, de 90°.

Multiplions maintenant par $\cos\alpha + i\sin\alpha$; on trouve

$$(aj + bk)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (a\cos\alpha - b\sin\alpha)j + (a\sin\alpha + b\cos\alpha)k.$$

L'expression précédente représente le vecteur $\overline{\text{OM}'}$ obtenu en faisant tourner $\overline{\text{OM}}$ de l'angle $\alpha$, de droite à gauche, autour de $\overline{\text{O}x}$; cela est très facile à vérifier.

Il s'agit maintenant de faire tourner d'un angle donné un vecteur $\overline{\text{OM}}$ autour d'un axe perpendiculaire à $\overline{\text{OM}}$, le vecteur n'étant plus dans un des plans de coordonnées. Nous nous bornerons ici à la vérification d'une règle à laquelle on se trouve conduit par analogie.

On convient d'abord de poser $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; cela étant, soient $x, y, z$ les coordonnées de M; nous représenterons le vecteur $\overline{\text{OM}}$ par $xi + yj + zk$, et nous poserons symboliquement

$$\overline{\text{OM}} = xi + yj + zk.$$

La rotation de 90° autour d'un axe perpendiculaire à $\overline{\text{OM}}$ sera représentée par un vecteur unitaire $\overline{\text{OA}}$ dont les angles avec les axes sont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Pour faire tourner $\overline{\text{OM}}$ d'un angle $\theta$ autour de $\overline{\text{OA}}$, $\theta$ étant positif de droite à gauche, il suffit de *multiplier* $\overline{\text{OM}}$ à droite, par le *quaternion*

$$\cos\theta + (i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma)\sin\theta,$$

en appliquant les règles convenues plus haut et tenant compte de la condition $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$, on trouve, *pour produit,*

$$\begin{aligned}&[x\cos\theta + (z\cos\beta - y\cos\gamma)\sin\theta]i + [y\cos\theta + (x\cos\gamma - y\cos\alpha)\sin\theta]j \\ &\quad + [z\cos\theta + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\sin\theta]k.\end{aligned}$$

Donc, les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ du point M, après la rotation, sont données par les formules

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\theta + (z\cos\beta - y\cos\gamma)\sin\theta,\\ y' &= y\cos\theta + (x\cos\gamma - y\cos\alpha)\sin\theta,\\ z' &= z\cos\theta + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\sin\theta.\end{aligned}$$

Ce sont les formules obtenues par une autre voie (127).

Ce qui précède suffit, nous le pensons, pour montrer l'usage qu'on peut faire de ce calcul. Nous renverrons le lecteur qui désirerait se familiariser avec la théorie des quaternions, aux *Notions sur la théorie des quaternions* de M. E. SARRAU (Paris, Gauthier-Villars).

---

## QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES CONCOURS EN 1895.

*Agrégation des Sciences mathématiques.* — On donne un ellipsoïde E qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et une sphère de rayon $r$ et de centre $A(x_0, y_0, z_0)$.

On considère les quadriques S qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde E; du point A on abaisse une normale AP sur l'une des quadriques S, et au pied de cette normale on mène le plan tangent $\Pi$ à cette quadrique.

1° Prouver que le plan $\Pi$ est le plan polaire du point A par rapport à une surface $H_\rho$, homofocale à l'ellipsoïde E, représentée par l'équation

$$H_\rho = \frac{x^2}{a^2-\rho} + \frac{y^2}{b^2-\rho} + \frac{z^2}{c^2-\rho} - 1 = 0.$$

2° Prouver que le plan $\Pi$ est le plan polaire du point A par rapport à l'une des quadriques S; prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques. Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies?

3° Par un point M de l'espace il passe trois plans $\Pi$ polaires du point A par rapport à trois quadriques $H_\lambda$, $H_\mu$, $H_\nu$ du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point M en fonctions des paramètres $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M pour lesquels les trois plans $\Pi$ sont rectangulaires.

4° Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point M, soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan $\Pi$, soit quand il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.

5° Tout plan $\Pi$ coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique? En connaît-on des tangentes remarquables?

6° Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.

*Concours général* (*classe de Mathématiques spéciales*). — On donne une courbe du troisième degré $C_3$ définie par les équations

$$x = 6\lambda^2\mu, \qquad y = 6\lambda\mu^2, \qquad z = \lambda^3 + \mu^3,$$

où $\lambda$, $\mu$ désignent deux variables indépendantes que, pour abréger, nous appellerons les *coordonnées du point a* de la courbe $C_3$.

1° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de trois points $a_1$, $a_2$, $a_3$ de la courbe $C_3$ pour que ces points soient en ligne droite;

2° Trouver la relation qui doit lier six points $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ de cette courbe, pour que ces points soient sur une conique.

Déduire de là les conditions nécessaires et suffisantes pour que, par trois points $a_1$, $a_2$, $a_3$ de la courbe $C_3$, on puisse faire passer une conique $C_2$ touchant $C_3$ aux points $a_1$, $a_2$, $a_3$.

Les côtés du triangle $a_1 a_2 a_3$ coupent $C_3$ en des points $b_1$, $b_2$, $b_3$ situés sur une droite D.

Les droites qui touchent $C_3$ aux points $a_1$, $a_2$, $a_3$ la coupent en des points $c_1$, $c_2$, $c_3$ situés sur une droite $\Delta$.

La droite D étant donnée, quel est le nombre des coniques $C_2$ qui lui correspondent?

La droite $\Delta$ étant donnée, quel est le nombre des coniques $C_2$ qui lui correspondent?

*École Normale supérieure.* — Un cercle (C) et une parabole (P) sont représentés, en coordonnées rectangulaires, par les deux équations

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 4a^2 = 0,$$
$$(P) \qquad y^2 - 2ax - 4a^2 = 0;$$

d'un point A pris sur l'axe $Oy$, on mène les tangentes au cercle, dont les points de contact sont M et M', et les tangentes à la parabole, dont les points de contact sont N et N'.

1° Démontrer que chacune des droites MN, MN', M'N, M'N' passe par un point fixe lorsque A décrit l'axe $Oy$.

2° Par les quatre points M, M', N, N' on peut faire passer une conique admettant l'axe des $y$ pour axe de symétrie; former l'équation de cette conique (E).

3° Trouver le nombre et la nature des coniques (E) qui passent par un point donné du plan, d'après la position de ce point dans le plan.

4° Construire la courbe décrite par les points de contact des coniques (E) avec les tangentes parallèles à la droite qui a pour équation

$$y = x.$$

Distinguer les parties du lieu qui conviennent à des ellipses de celles qui conviennent à des hyperboles.

*École Polytechnique.* — On donne, d'une part, deux droites D, D' ne se coupant pas; d'autre part, deux autres droites $\Delta, \Delta'$ ne se coupant pas. On considère une droite OA passant par l'origine O et située dans le plan de coordonnées XOY.

1° Former l'équation de la surface du deuxième degré S, qui contient D, D' et OA.

2° La surface S et la surface analogue $\Sigma$, qui contient $\Delta$, $\Delta'$ et OA, se coupent, en dehors de OA, suivant une certaine courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe, lorsque OA décrit le plan XOY.

3° Déterminer les droites situées sur cette surface ([1]).

4° Étudier complètement cette surface dans le cas particulier où les quatre droites D, D', $\Delta$, $\Delta'$ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui passe au point O, et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans qui passent par le point O (et que le plan tangent en O à l'hyperboloïde demeure invariable) ([2]).

*Bourses de licence.* — 1° On considère dans le plan la droite U d'équation

$$(1) \qquad u^2(x-a)+3ux-2y=0,$$

où $a$ est une quantité fixe et $u$ un paramètre variable.

Cette droite, quand $u$ varie, enveloppe une courbe C dont on formera l'équation. U touche C en un point A et la coupe en B : calculer les coordonnées d'un point de C en fonction de $u$. On montrera que les coordonnées de B se déduisent de celles de A en changeant $u$ en $-\frac{u}{2}$.

2° Parmi les droites U, on considérera la droite particulière V, dont on a l'équation, en supposant dans (1) $u=1$. Par chaque point P de V, on peut mener à C deux tangentes autres que V; soient Q, Q' les contacts. On demande, connaissant l'abscisse de P, de former l'équation de QQ'; de déterminer la courbe E, enveloppée par cette droite, quand P décrit V; enfin, de limiter la portion de E que touchent les droites QQ', qui joignent des points réels Q, Q'.

*École centrale* (Première session). — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, sur l'axe des $x$ un point A d'abscisse $x=p$, sur l'axe des $y$ un

([1]) *Voir* une Solution de M. MAURICE D'OCAGNE (*Nouvelles Annales*, août 1895). *Voir* aussi G. FOURET, *Nouvelles Annales*, décembre 1895.

([2]) Cette partie de l'énoncé avait été omise par erreur. (*Voir* LUCIEN LÉVY, *Nouvelles Annales*, août 1895.)

point B d'ordonnée $y = q$. Écrire l'équation générale des coniques passant par le point A, tangentes à l'axe des $y$ en B, et admettant pour diamètre conjugué de $Oy$ une droite dont le coefficient angulaire est $m$.

1° Faisant varier $m$, on cherchera le lieu des centres des hyperboles équilatères qui font partie du faisceau des coniques représentées par l'équation générale trouvée, et le lieu du point de rencontre du diamètre conjugué de $Oy$ dans ces hyperboles, avec la tangente en A.

On distinguera sur ces deux lieux les régions qui répondent à des hyperboles pour lesquelles les points A et B sont sur une même branche de celles pour lesquelles ces deux points sont sur des branches différentes.

2° Faisant encore varier $m$ et considérant les paraboles qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, on démontrera que, par un point du plan, on peut faire passer trois axes de ces paraboles. On considérera les points du plan pour lesquels un des axes est parallèle à $Oy$. et l'on cherchera le lieu des points d'intersection des deux paraboles qui correspondent aux axes non parallèles à $Oy$.

3° On formera l'équation de la corde commune AC de ces deux paraboles et l'on cherchera le lieu de l'intersection d'une parallèle à cette corde, menée par l'origine des coordonnées avec les diamètres conjugués de $Oy$ dans ces mêmes paraboles.

*École centrale* (Deuxième session). — Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, on demande l'équation générale des hyperboles équilatères admettant une asymptote passant par un point fixe B de l'axe des $y$ et dont le coefficient angulaire soit $m$; telles, en outre, que le produit des abscisses à l'origine des asymptotes soit constant et que le carré du demi-axe transverse soit $2a^2$. Faisant varier $m$ et $a$ :

1° Démontrer que les axes de symétrie de ces hyperboles forment un faisceau passant par deux points fixes, et prouver géométriquement que le lieu des sommets de celles de ces hyperboles, dont les axes transverses sont égaux, est un limaçon de Pascal.

2° On considère les hyperboles du faisceau telles que, l'origine des coordonnées se trouvant avec la courbe dans un même angle des asymptotes, le produit de $m$ et des abscisses à l'origine des asymptotes sont de signe contraire à celui du produit des distances de l'origine aux asymptotes. On démontrera que, par un point du plan, on peut mener deux hyperboles de ce système, ayant un axe transverse donné.

3° Trouver le lieu $\Delta$ des points pour lesquels on peut mener deux de ces hyperboles telles qu'une asymptote, passant par B, ait pour coefficient angulaire $+1$ pour l'une, et $-1$ pour l'autre.

4° On considérera, pour chaque point du lieu $\Delta$, les hyperboles qui répondent, l'une à la valeur maximum, l'autre à la valeur minimum de l'axe transverse; on lui mènera une tangente commune et l'on cherchera le lieu du milieu de la distance des points de contact.

*École navale.* — $Ox$ et $Oy$ étant deux axes rectangulaires, A et B deux points pris respectivement sur ces axes, M et N les milieux respectifs de OA et BA, on considère :

1° L'hyperbole équilatère de centre M, tangente en O à $Oy$;

2° L'hyperbole équilatère de centre N, tangente en B à $Oy$.

Construire les asymptotes de ces hyperboles; elles se coupent deux à deux en quatre points, qui sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle AMN.

Les points d'intersection de ces hyperboles, autres que le point A, sont à l'intersection de la circonférence circonscrite au triangle OAB et de la parallèle à l'axe des $x$ menée par N.

Lieu des points de rencontre de ces hyperboles; lieu des points de rencontre des asymptotes, lorsque, A et B se déplaçant respectivement sur l'axe des $x$ et sur l'axe des $y$, la longueur AB reste constante.

# ADDITIONS[1].

## Conditions pour que six points d'un plan soient sur une conique ou dix points sur une quadrique.

M. Paul Serret a démontré le théorème suivant :

*Pour que six points d'un plan soient sur une conique, il faut et il suffit qu'il existe six constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ non toutes nulles et telles que*

$$(1) \qquad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots + \lambda_6 P_6^2 = 0,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_6$ *désignant ce que devient une forme linéaire quelconque* $P \equiv ux + vy + wz$, *quand on y remplace les coordonnées courantes successivement par celles des six points donnés.*

Ce théorème peut être remplacé par celui-ci :

*Pour que six points d'un plan soient sur une conique, il faut et il suf-*

(1) Les Notes suivantes sont empruntées, presque totalement, au Cours de M. G. Darboux (Sorbonne, 1895-1896).

*fit qu'il existe six constantes non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ telles qu'on ait*

(2) $$\lambda_1 F(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 F(x_2, y_2, z_2) + \ldots + \lambda_6 F(x_6, y_6, z_6) = 0,$$

*quelle que soit la forme quadratique* $F(x, y, z)$; $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, ..., $(x_6, y_6, z_6)$ *désignant les coordonnées des points donnés.*

Effectivement, toute forme quadratique pouvant être mise sous forme d'une somme de carrés, on peut poser

$$F(x, y, z) \equiv A(ux + vy + wz)^2 + A'(u'x + v'y + w'z)^2 + A''(u''x + v''y + w''z)^2,$$

et, par suite, la relation (1) étant vraie pour les trois formes indépendantes P, P′, P″, elle sera vraie pour une forme quadratique quelconque.

Mais on peut établir l'identité (2) directement, ainsi que le fait M. G. Darboux.

Pour que six points $(x_i, y_i, z_i)$ soient sur une conique, il faut et il suffit que leurs coordonnées vérifient une même équation quadratique

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le déterminant dont les lignes se déduisent de

(3) $$|\, x_i^2 \quad y_i^2 \quad z_i^2 \quad y_iz_i \quad z_ix_i \quad x_iy_i \,|,$$

en donnant à l'indice $i$ les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, soit nul. Or, pour que le déterminant (3) soit nul, il faut et il suffit qu'il y ait une même relation linéaire entre les éléments de ses colonnes, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $\lambda_i$ non toutes nulles et telles que

$$\sum_1^6 \lambda_i x_i^2 = 0, \quad \sum_1^6 \lambda_i y_i^2 = 0, \quad \sum_1^6 \lambda_i z_i^2 = 0, \quad \sum_1^6 \lambda_i y_i z_i = 0, \quad \sum_1^6 \lambda_i z_i x_i = 0, \quad \sum_1^6 \lambda_i x_i y_i = 0;$$

d'où l'on tire, A, A′, A″, B, B′, B″ étant six coefficients absolument arbitraires,

$$A\sum_1^6 \lambda_i x_i^2 + A'\sum_1^6 \lambda_i y_i^2 + A''\sum_1^6 \lambda_i z_i^2 + 2B\sum_1^6 \lambda_i y_i z_i + 2B'\sum_1^6 \lambda_i z_i x_i + 2B''\sum_1^6 \lambda_i x_i y_i = 0,$$

c'est-à-dire, précisément, la relation (2).

On voit ainsi que cette relation est nécessaire; il reste à prouver qu'elle est suffisante : supposons par exemple $\lambda_6 \neq 0$ et prenons pour $F(x, y, z)$ le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation d'une conique passant par les cinq premiers points; la relation (2) se réduira à $\lambda_6 f(x_6, y_6, z_6) = 0$, ou, plus simplement, $f(x_6, y_6, z_6) = 0$; ce qui prouve que le sixième point est sur la conique $f$.

*Application.* — Prenons pour forme F successivement les premiers membres des équations de deux coniques passant par les quatre premiers points; on obtient ainsi

$$\lambda_5 f(x_5, y_5, z_5) + \lambda_6 f(x_6, y_6, z_6) = 0,$$
$$\lambda_5 g(x_5, y_5, z_5) + \lambda_6 g(x_6, y_6, z_6) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(x_5, y_5, z_5)}{g(x_5, y_5, z_5)} = \frac{f(x_6, y_6, z_6)}{g(x_6, y_6, z_6)}.$$

Par conséquent, si $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ sont les équations de deux coniques, et si l'on considère sur une conique passant par les quatre points communs aux deux premières, deux points, l'un fixe $(x_5, y_5, z_5)$ et l'autre variable $(x, y, z)$, on aura

$$\frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = \frac{f(x_5, y_5, z_5)}{g(x_5, y_5, z_5)};$$

en d'autres termes, l'équation de cette conique est de la forme

$$\frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = k,$$

$k$ étant une constante.

On voit ainsi que l'équation générale des coniques, passant par les points communs aux deux premières, est

$$f(x, y, z) - k g(x, y, z) = 0,$$

où $k$ désigne un paramètre arbitraire, car l'équation d'une conique passant par les points communs aux deux premières est de cette forme, et réciproquement: quelle que soit la valeur attribuée à $k$, l'équation précédente représente évidemment une conique passant par les points communs aux deux premières.

Cette belle démonstration est due à M. Darboux.

Les considérations précédentes s'étendent tout naturellement à l'espace et l'on démontre de la même manière ce théorème :

*Pour que dix points $(x_i, y_i, z_i, t_i)$ soient sur une quadrique, il faut et il suffit qu'il existe dix constantes non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}$, et telles que, quelle que soit la forme quadratique* $F(x, y, z, t)$, *on ait*

$$(4) \qquad \sum_1^{10} \lambda_i F(x_i, y_i, z_i, t_i) = 0.$$

On trouvera encore l'équation générale des quadriques passant par les points communs à deux quadriques données; soient en effet $f(x, y, z, t) = 0$, $g(x, y, z, t) = 0$ les équations de deux quadriques; considérons une qua-

drique Q passant par l'intersection des deux premières et prenons huit points sur cette intersection et deux autres points sur la quadrique Q ; on aura

$$\lambda_9 f(x_9, y_9, z_9, t_9) + \lambda_{10} f(x_{10}, y_{10}, z_{10}, t_{10}) = 0,$$
$$\lambda_9 g(x_9, y_9, z_9, t_9) + \lambda_{10} g(x_{10}, y_{10}, z_{10}, t_{10}) = 0, \quad \text{etc.}$$

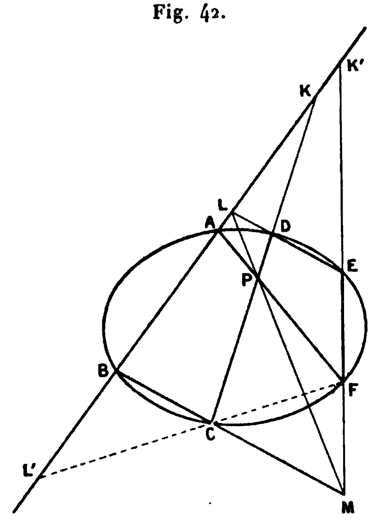
En lisant les équations précédentes en coordonnées tangentielles, on trouve les conditions pour que six droites d'un plan soient tangentes à une conique ou pour que dix plans soient tangents à une quadrique.

---

## Nouvelle démonstration du théorème de Pascal.

Dans son Cours, M. Darboux a déduit le théorème de Mac-Laurin et Braikenridge du théorème de Désargues. En modifiant la rédaction on obtient directement le théorème relatif à l'hexagone de Pascal.

Fig. 42.




Considérons l'hexagone ABCDEF inscrit à une conique. Soient (*fig.* 42) L le point de rencontre des droites AB. DE et M celui des droites BC, EF. Appelons P le point de rencontre de LM et CD, et soit A' le point où FP rencontre AB ; il s'agit de prouver que A' coïncide avec A.

La conique est circonscrite au quadrilatère CDEF. Désignons par L' le point où le côté CF de ce quadrilatère rencontre AB, et par K, K' ceux où les deux autres côtés CD, EF rencontrent AB.

D'après le théorème de Désargues, les six points K, K'; L, L'; B, A sont en involution.

D'autre part, les points K, K'; L, L'; B, A' sont les points de rencontre des côtés et des diagonales du quadrilatère CMFP et de la sécante AB ; ces six points sont donc aussi en involution, ce qui prouve que A' coïncide avec A.

---

## Sur la définition de l'angle de deux demi-droites.

Nous avons démontré (II, 78) que, si les coordonnées de deux points A, A', situés à une distance de l'origine O, égale à un, sont $a$, $b$, $c$ et $a'$, $b'$, $c'$, les

coordonnées de l'extrémité de la perpendiculaire OM aux droites OA, OA′, en supposant OM = 1, sont données par les formules

$$l \sin V = \varepsilon(bc' - cb'), \qquad l \sin V = \varepsilon(ca' - ac'), \qquad l \sin V = \varepsilon(ab' - ba'),$$

V désignant l'angle AOA′, et nous avons montré qu'en prenant $\varepsilon = +1$ le point M est tel que tout observateur, placé les pieds en O et la tête en M, verrait OA à sa gauche et OA′ à sa droite en regardant l'angle AOA′.

M. G. Darboux se sert de ces équations pour introduire le principe des signes dans la définition des angles dans l'espace.

Les points A, A′, M sont sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, et le point M est l'un des pôles du grand cercle passant par A et A′. On peut définir, à un multiple près de $2\pi$, l'angle que OA′ fait avec OA, en convenant de choisir l'un des deux pôles du grand cercle AA′: soit M ce pôle. Il suffit de convenir qu'une rotation effectuée autour de OM de gauche à droite est affectée du signe +, les rotations en sens contraire étant affectées du signe —. S'il en est ainsi, en supposant le trièdre $Oxyz$ des coordonnées disposé de façon qu'une rotation positive de $\frac{\pi}{2}$ autour de $Oz$ amène $Ox$ en $Oy$, les formules

$$l \sin V = bc' - cb', \qquad l \sin V = ca' - ac', \qquad l \sin V = ab' - ba',$$

avec

$$\cos V = aa' + bb' + cc',$$

définiront, à un multiple près de $2\pi$, l'angle V, *en grandeur et en signe.*

Soit ABC un triangle sphérique; on peut attribuer un signe à chacun des arcs de grands cercles BC, CA, AB; cela revient à se donner les pôles A′, B′, C′ de ces arcs. Désignons par $x_1, y_1, z_1$; $x_2, y_2, z_2$; $x_3, y_3, z_3$ les coordonnées de A, B, C, l'origine étant le centre de la sphère, et par $x'_1, y'_1, z'_1$; $x'_2, y'_2, z'_2$; $x'_3, y'_3, z'_3$ celles de A′, B′, C′. On aura, en vertu de ce qui précède,

$$x'_1 \sin BC = y_2 z_3 - z_2 y_3, \quad y'_1 \sin BC = z_2 x_3 - x_2 z_3, \quad z'_1 \sin BC = x_2 y_3 - y_2 x_3$$

et

$$x_1 \sin B'C' = y'_2 z'_3 - z'_2 y'_3, \; y_1 \sin B'C' = z'_2 x'_3 - x'_2 z'_3, \; z_1 \sin B'C' = x'_2 y'_3 - y'_2 x'_3,$$

ainsi que les formules qu'on en déduit par permutations circulaires.

En multipliant les deux membres des premières équations par $x_1, y_1, z_1$ respectivement et ajoutant, on obtient

$$\cos AA' \sin BC = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \delta.$$

On a, par suite,

$$\cos AA' \sin BC = \cos BB' \sin CA = \cos CC' \sin AB = \delta.$$

On trouvera de même

$$\cos A'A \sin B'C' = \cos B'B \sin C'A' = \cos C'C \sin A'B' = \delta',$$

et, en divisant membre à membre, on retrouve la proportion des sinus, etc.

---

## Homologie. — Tétraèdres homologiques.

L'*homologie* est une transformation homographique, due à Poncelet, et définie par les formules suivantes, dans lesquelles $x, y, z, t$ et $x', y', z', t'$ sont les coordonnées de deux points *correspondants* M, M' :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{t'}{ax + by + cz + dt}.$$

On voit qu'à un point M correspond un seul point M' et réciproquement, car les formules précédentes peuvent aussi s'écrire

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{dt}{t' - ax' - by' - cz'}.$$

Soit ABCD le tétraèdre de référence, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ étant respectivement les équations des faces BCD, CDA, DAC, ACB. On voit que deux points correspondants M, M' sont sur une même droite passant par le sommet D, que l'on nomme le *centre d'homologie*.

Cherchons s'il y a des points qui se conservent après la transformation. Si l'on pose

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{t}{t'},$$

on trouve

$$ax + by + cz + (d - 1)t = 0.$$

Tous les points du plan défini par l'équation précédente se correspondent à eux-mêmes; on nomme ce plan le *plan d'homologie*.

L'homologie est définie quand on connaît le centre, le plan d'homologie et un couple de points correspondants. En effet, soient N, N' deux points correspondants et M un point quelconque; le point M' est sur la droite DM. D'autre part, soit R le point de rencontre de la droite MN et du plan d'homologie; à une droite correspond une droite; donc à NR correspond la droite N'R et, par suite, M' est le point d'intersection de DM et de N'R.

On voit ainsi que les rapports anharmoniques $(DMM'M_0)$ et $(DNN'N_0)$ sont égaux, $M_0$ et $N_0$ étant les traces de DM et DN sur le plan d'homologie.

On peut donc définir une transformation homologique en donnant le centre, le plan d'homologie et le rapport anharmonique ($DMM'M_0$).

On peut encore définir une transformation homologique en donnant quatre couples de points correspondants. Soient, en effet, (A, A'), (B, B') (C, C'), (D, D') les quatre couples donnés, situés sur quatre droites issues d'un point O.

Si nous prenons le point O pour l'un des sommets du tétraèdre de référence, on aura, pour déterminer les constantes $a$, $b$, $c$, $d$, quatre équations telles que

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1 = t'_1 \frac{x_1}{x'_1},$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + dt_2 = t'_2 \frac{x_2}{x'_2}, \quad \ldots;$$

le déterminant

$$| x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad t_1 |$$

est différent de zéro, si l'on suppose que les quatre points A, B, C, D forment un tétraèdre; on pourra donc, dans cette hypothèse, déterminer $a$, $b$, $c$, $d$.

Application. — *Si les droites passant par les sommets convenablement associés de deux tétraèdres sont concourantes, les intersections des faces opposées aux sommets correspondants sont dans un même plan.*

En effet, si les droites AA', BB', CC', DD' passent par un même point O, les quatre couples (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D') définissent une homologie. Au plan BCD correspond le plan B'C'D'; l'intersection de ces deux plans se correspond à elle-même et, par suite, est dans le plan d'homologie. Il en est de même des intersections des plans COA, C'O'A', etc. Les deux tétraèdres sont homologiques.

---

## Une application de la théorie des génératrices rectilignes.

Nous avons vu (363) qu'en appelant λ et μ les paramètres qui définissent les génératrices rectilignes d'une quadrique, les coordonnées homogènes d'un point quelconque de cette quadrique s'expriment au moyen de ces paramètres par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d, \\ y &= a'\lambda\mu + b'\lambda + c'\mu + d', \\ z &= a''\lambda\mu + b''\lambda + c''\mu + d'', \\ t &= a'''\lambda\mu + b'''\lambda + c'''\mu + d'''. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement, ces équations définissent une quadrique, pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. En effet, dans cette hypothèse, le système

$$(2)\qquad \begin{cases} a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d\,\delta = x, \\ a'\,\alpha + b'\,\beta + c'\,\gamma + d'\,\delta = y, \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma + d''\delta = z, \\ a'''\alpha + b'''\beta + c'''\gamma + d'''\delta = t \end{cases}$$

admet une solution unique

$$\alpha = \mathrm{P}, \qquad \beta = \mathrm{S}, \qquad \gamma = \mathrm{R}, \qquad \delta = \mathrm{Q};$$

P, Q, R, S étant des fonctions linéaires et homogènes de $x, y, z, t$. Mais le système (2) n'ayant qu'une seule solution, on a, en vertu des équations (1),

$$\mathrm{P} = \lambda\mu, \qquad \mathrm{S} = \lambda, \qquad \mathrm{R} = \mu, \qquad \mathrm{Q} = 1;$$

donc

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{RS}.$$

Ce qui démontre la proposition.

On voit, de plus, que $\lambda$ et $\mu$ sont les paramètres des génératrices rectilignes, car on peut écrire

$$\mathrm{P} = \lambda\mathrm{R}, \qquad \mathrm{S} = \lambda\mathrm{Q}$$

et

$$\mathrm{P} = \mu\mathrm{S}, \qquad \mathrm{R} = \mu\mathrm{Q}.$$

Ces équations définissent précisément les génératrices de la quadrique obtenue.

On reconnaît aisément que, si l'on fait subir à chacun des paramètres $\lambda$ et $\mu$ une transformation homographique, on fera correspondre à un point $\mathrm{M}(\lambda, \mu)$ de la quadrique un point $\mathrm{M}'(\lambda', \mu')$ de la même surface, ces deux points M et M' se correspondant homographiquement; ce qui revient à dire que les coordonnées homogènes de l'un quelconque de ces points sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées de l'autre. On obtient ainsi la transformation homographique la plus générale, qui transforme la quadrique proposée en elle-même. Deux génératrices de chaque système se conserveront. Nous laissons au lecteur le soin de développer cette question.

En remplaçant $\lambda$ et $\mu$ par $\frac{\lambda}{\nu}$ et $\frac{\mu}{\nu}$, on peut, au lieu des équations (1),

écrire

$$(3)\quad \begin{cases} x = a\lambda\mu + b\lambda\nu + c\mu\nu + d\nu^2, \\ y = a'\lambda\mu + b'\lambda\nu + c'\mu\nu + d'\nu^2, \\ z = a''\lambda\mu + b''\lambda\nu + c''\mu\nu + d''\nu^2, \\ t = a'''\lambda\mu + b'''\lambda\nu + c'''\mu\nu + d'''\nu^2. \end{cases}$$

Si, d'une manière plus générale, on pose

$$(4)\quad x = f(\lambda, \mu, \nu), \quad y = f_1(\lambda, \mu, \nu), \quad z = f_2(\lambda, \mu, \nu), \quad t = f_3(\lambda, \mu, \nu),$$

$f, f_1, f_2, f_3$ étant des fonctions homogènes de degré $m$; ces équations définissent une surface du degré $m^2$ au plus. On voit, en effet, que les points communs à la surface et à une droite correspondent aux solutions d'un système de deux équations homogènes de degré $m$ en $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Ces équations définissent deux courbes planes de degré $m$, si l'on regarde $\lambda$, $\mu$, $\nu$ comme des coordonnées trilinéaires; il en résulte que si les courbes définies par les équations $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ ont $p$ points communs, ces points appartiendront à toute courbe dont l'équation sera de la forme

$$Af + A_1f_1 + A_2f_2 + A_3f_3 = 0;$$

mais ces points, étant fixes, ne peuvent correspondre à des points d'intersection de la surface et d'une droite arbitraire; le degré de la surface est donc $m^2 - p$. Ainsi les équations (3) définissent une quadrique, car les coniques, définies en coordonnées trilinéaires par les équations

$$a\lambda\mu + b\lambda\nu + c\mu\nu + d\nu^2 = 0,$$
$$a'\lambda\mu + b'\lambda\nu + c'\mu\nu + d'\nu^2 = 0, \quad \text{etc.},$$

ont en commun deux points définis par les équations $\lambda = 0$, $\nu = 0$ et $\mu = 0$, $\nu = 0$; la surface est donc de degré $4 - 2$ ou $2$.

Dans le cas où $m = 2$, les équations (4) définissent une surface du quatrième degré, qu'on nomme *surface de Steiner*. On vérifie aisément que chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux coniques; pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que si l'on pose $\nu = \alpha\lambda + \beta\mu$, on aura

$$x = m\lambda^2 + 2n\lambda\mu + p\mu^2,$$
$$y = m'\lambda^2 + 2n'\lambda\mu + p'\mu^2,$$
$$z = m''\lambda^2 + 2n''\lambda\mu + p''\mu^2,$$
$$t = m'''\lambda^2 + 2n'''\lambda\mu + p'''\mu^2.$$

Ces équations représentent une conique, car en éliminant $\lambda^2$, $\lambda\mu$, $\mu^2$, on a une équation linéaire en $x$, $y$, $z$, $t$; ce qui prouve que le lieu est plan, et, en outre, un plan quelconque coupe ce lieu en deux points. Or, la section de la surface de Steiner par un plan tangent ayant un point double, qui est le point de contact, la courbe correspondant à cette section, dans le système

$(\lambda, \mu, \nu)$, est une courbe du second degré qui a un point double, c'est-à-dire un système de deux droites, auxquelles correspondent deux coniques, en vertu de ce qui précède.

---

## Étude de la cubique lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère. — Emploi des coordonnées symétriques.

Soient $x, y$ les coordonnées rectangulaires d'un point M. Les *coordonnées symétriques* de ce point sont $u = x + yi$ et $v = x - yi$. Si l'on considère deux points A et B définis par leurs coordonnées symétriques $a$, $b$ et $a'$, $b'$, les droites isotropes menées par A et B ont pour équations $u = a$, $v = b$ et $u = a'$, $v' = b'$. Ces quatre droites forment un quadrilatère complet, dont deux sommets sont les points A, B et deux autres, deux points A', B' ayant pour coordonnées symétriques $(a, b')$ et $(a', b)$. On dit que A et B forment un couple de points associés aux points A', B'. Quand l'un de ces deux couples est formé de deux points réels, l'autre est formé de deux points imaginaires. Les quatre foyers d'une conique forment deux couples de points associés. M. Darboux a tiré un très grand parti de la considération des points associés. Nous renverrons le lecteur au livre important de l'éminent géomètre : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, etc., 2[e] tirage, Paris, Hermann.

En se servant des coordonnées symétriques, M. Darboux a fait une étude approfondie de la cubique lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère. Nous allons en indiquer rapidement les principaux résultats; leur vérification sera un excellent exercice pour les élèves.

Nous avons déjà donné l'équation de cette cubique (t. II, p. 219). On reconnaît immédiatement que le lieu passe par les sommets du quadrilatère ABA'B' donné, et que les tangentes en A et A', par exemple, se coupent en un point F appartenant au lieu, et, de plus, en appliquant le théorème de Poncelet, on voit qu'il existe une conique inscrite au quadrilatère, dont un foyer est en F et l'autre sur AA', au troisième point où cette droite rencontre la cubique.

Voici comment M. Darboux trouve l'équation du lieu : un foyer M d'une conique inscrite au quadrilatère est un point tel que les angles AMA' et BMB' aient les mêmes bissectrices, A et A' étant, ainsi que B et B', deux sommets opposés du quadrilatère. En appliquant les formules (38), (39), (40) de l'Ouvrage cité plus haut, on obtient immédiatement l'équation du lieu sous la forme

$$\frac{(u-a)(u-a')}{(u-b)(u-b')} = \frac{(v-a_1)(v-a'_1)}{(v-b_1)(v-b'_1)},$$

les coordonnées symétriques des points A et A' étant $a, a_1$ et $a', a'_1$, et celles de B, B' : $b, b_1$ et $b', b'_1$.

Or, si $h$ et $k$ désignent deux constantes arbitraires, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{(u-a)(u-a')-h(u-b)(u-b')}{(u-a)(u-a')-k(u-b)(u-b')}=\frac{(v-a_1)(v-a'_1)-h(v-b_1)(v-b'_1)}{(v-a_1)(v-a'_1)-k(v-b_1)(v-b'_1)}.$$

Si l'on remarque que les coefficients de $u^2$ et de $v^2$ sont égaux à $1-h$ dans chacun des numérateurs, et à $1-k$ dans chacun des dénominateurs, on voit que l'équation a conservé la même forme; seulement elle correspond maintenant à une infinité de quadrilatères. On a obtenu ce résultat remarquable : le lieu ne change pas quand on substitue au quadrilatère donné un quelconque des quadrilatères dont les couples de sommets opposés sont définis par les équations

$$(u-a)(u-a')-\lambda(u-b)(u-b')=0,$$
$$(v-a_1)(v-a'_1)-\lambda(v-b_1)(v-b'_1)=0,$$

où $\lambda$ désigne un paramètre arbitraire. La cubique passe par les sommets de tous ces quadrilatères et par les points qui sont associés aux couples de sommets opposés. D'autre part, si l'on remarque que les tangentes menées d'un point cyclique I, par exemple aux coniques inscrites au quadrilatère AA'BB', forment un faisceau involutif défini par les couples (IA, IA'), (IB, IB'), de telle sorte que ce faisceau est défini par l'équation

$$(u-a)(u-a')-\lambda(u-b)(u-b')=0,$$

on arrive à ce résultat : il y a sur la cubique une infinité de couples de points $(\mu, \mu')$ et $(\nu, \nu')$ pouvant remplacer les couples (A, A') et (B, B'), et en outre $\mu$, $\mu'$, par exemple, sont deux foyers conjugués d'une certaine conique inscrite au quadrilatère AA'BB'. De là une première définition du lieu : *Le lieu des points de concours des tangentes menées de* B *et* B' *aux coniques ayant pour foyers* A, A' *coïncide avec le lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère* AA'BB'.

Si l'on considère l'un des quadrilatères formé par les tangentes issues de B et B', soient $\mu$, $\mu'$ et $\nu$, $\nu'$ deux couples de sommets opposés de ce quadrilatère; si la conique est tangente à BB', deux côtés B$\nu'$, B$\nu'$ se confondent, le point de rencontre $\mu'$ de ces côtés devient le point de contact de BB' avec la conique, et B$\nu$, B'$\nu'$ deviennent les tangentes en B et B' à la cubique; on a donc ce résultat : les tangentes en deux points conjugués de la cubique se coupent en un point de cette cubique auquel correspond le troisième point d'intersection de la cubique et de la droite passant par les deux premiers points. Ce résultat se déduirait d'ailleurs de la remarque, faite au début, sur la construction des tangentes en B et B'.

En remarquant que la droite de Newton est une direction asymptotique de la cubique, on construit facilement l'asymptote correspondante.

Pour arriver à une nouvelle définition de la cubique, nous allons étudier un autre lieu. On démontre bien facilement que le lieu des points de contact

des tangentes menées d'un point P à toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère ABCD est une cubique passant par les sommets de ce quadrilatère et par le point P, et tangente en P à la conique définie par ces cinq points. On vérifie ensuite qu'une cubique donnée peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes menées par l'un de ses points P aux coniques passant par les points de contact des quatre tangentes autres que la tangente en P, qu'on peut lui mener par ce point. Nous remarquerons, en passant, que ce mode de définition permet de démontrer ce théorème de Mac-Laurin : *Le rapport anharmonique des quatre tangentes menées d'un point d'une cubique à cette courbe* (*autres que la tangente au point considéré*) *est constant.*

Voici la démonstration de M. Darboux : Si l'on passe d'un point P de la cubique à un point P′ infiniment voisin, la distance PP′ étant du premier ordre, le rapport (P′.ABCD) diffère de (P′.A′B′C′D′) d'un infiniment petit du second ordre, et si P″ est un point de la conique passant par P et les points de contact A, B, C, D, la distance PP″ étant du premier ordre, P′P″ sera du second ordre, de sorte que la différence (P′.ABCD) — (P″.ABCD) sera aussi du second ordre; mais (P.ABCD) = (P″.ABCD), donc enfin (P.ABCD) — (P′.A′B′C′D′) est du second ordre, ce qui démontre que (P.ABCD) demeure invariable quand P se déplace sur la cubique. On démontre encore que les points de concours des diagonales du quadrilatère ABCD sont sur la cubique et que les tangentes en ces points et la tangente en P se coupent en un même point situé également sur cette courbe. Mais revenons au premier lieu.

Parmi les coniques inscrites au quadrilatère AA′BB′, il y en a une dont la droite de Newton est un axe; soient F, F′ ses foyers conjugués situés sur cet axe. Les tangentes en F et F′ à la cubique, lieu des foyers, se coupent au point G; le troisième point de rencontre G′ de la cubique avec FF′ est à l'infini; donc G est le foyer de la parabole du faisceau de coniques considéré. Les quatre tangentes menées de G à la cubique sont GF, GF′ et les droites isotropes GI, GJ. Les coniques passant par F, F′, I, J sont des cercles; donc *la cubique lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère* AA′BB′ *est le lieu des points de contact des tangentes menées par* G *aux cercles passant par* F *et* F′.

Si F et F′ sont imaginaires, les deux autres foyers, qui sont les points associés φ et φ′, sont réels; il suffira de joindre G à un point quelconque Q de la droite de Newton FF′ et de porter sur GQ, à partir de Q, des segments QM et QM′ égaux à Qφ (car le produit QF.QF′ = Qφ.Qφ′) et le lieu des points M, M′ sera la cubique considérée.

# NOTE

SUR

# LES TRANSFORMATIONS EN GÉOMÉTRIE,

**Par M. Émile BOREL,**

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

## SUR LES TRANSFORMATIONS EN GÉOMÉTRIE (¹).

1. Galois (²), en montrant l'importance qu'a en Algèbre la Théorie des groupes de substitutions, a ouvert une voie nouvelle à la Science. C'est un géomètre norvégien déjà illustre, M. Sophus Lie, qui, en créant sa théorie des groupes de transformations, a introduit dans le domaine de l'Analyse et de la Géométrie l'idée de groupe convenablement modifiée et étendue (³).

Le but de cette Note n'est pas d'exposer les idées de M. Lie; l'importance et l'étendue du mouvement scientifique auquel elles ont donné naissance rendraient cette tâche trop lourde, si d'ailleurs c'en était ici le lieu. Notre but, bien plus modeste, est de nous en inspirer le plus possible dans une étude élémentaire des transformations les plus simples de la Géométrie; c'est pourquoi nous avons tenu à rappeler au début de cette Note les noms des deux géomètres qui ont jusqu'ici le plus contribué à mettre en évidence l'utilité de la notion de groupe.

(¹) Cette Note est à peu près la reproduction de Conférences faites à la Faculté des Sciences de Lille pendant l'hiver 1894-1895; j'ai simplement introduit les modifications nécessaires pour ne pas quitter le domaine des *Mathématiques spéciales*. J'avais déjà traité en partie les mêmes sujets dans un Cours libre que j'ai eu l'honneur de professer en 1893 à la Faculté des Sciences de Montpellier.

(²) Évariste Galois, né en 1811, mort en 1832, étant élève à l'École Normale, a laissé des Notes dont la publication, faite en 1846 par les soins de Liouville, a eu la plus grande influence sur l'évolution de la pensée mathématique.

(³) On lira, avec le plus grand intérêt, dans le Livre du *Centenaire de l'École Normale* (Hachette et Cⁱᵉ), quelques pages de M. Sophus Lie sur l'*Influence de Galois sur le développement des Mathématiques*.

Le nombre et l'importance des travaux faits dans notre siècle sur les transformations en Géométrie ne nous permet pas en effet d'en seulement esquisser un historique un peu complet. Contentons-nous de citer les noms de Poncelet, Chasles, Laguerre, Halphen, Darboux en France; de Plücker, Möbius et Klein en Allemagne, de Cayley en Angleterre, de Cremona en Italie, pour nous borner à ceux dont les travaux se rattachent le plus directement aux sujets ici traités.

Nous tenons cependant à faire une remarque importante; nous venons de dire que, dans l'exposition qui va suivre, nous nous inspirerions le plus possible des idées et des méthodes de M. Lie; il serait regrettable que ce procédé d'exposition conduisît le lecteur à méconnaître l'importance des travaux des autres illustres géomètres dont nous venons de citer les noms. En réalité, ce sont eux qui ont trouvé à peu près tout ce qui est essentiel dans les théories élémentaires que nous exposons ici; ils ont le plus souvent appliqué aux cas particuliers les plus intéressants les méthodes générales de la théorie des groupes de transformations avant que ces méthodes aient été systématiquement exposées par M. Lie. Parmi les exemples les plus caractéristiques de ce fait, des plus intéressants au point de vue de l'historique du développement de la pensée, nous signalerons les recherches de M. Darboux sur l'inversion (*voir* plus loin, notamment n° 20) et celles d'Halphen sur les invariants différentiels qu'Ampère avait déjà considérés dans des cas particuliers.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations historiques; dans les courts renseignements bibliographiques que nous donnerons parfois en passant, nous aurons uniquement en vue de signaler à nos lecteurs des Ouvrages pouvant leur être utiles, et nullement la prétention d'être complet. Enfin nous répétons une dernière fois que, par *nos lecteurs,* nous entendons essentiellement des élèves de Mathématiques spéciales; la modestie de notre but est seule une excuse suffisante aux grandes lacunes de cette Note; nous ne prétendons pas apprendre grand'chose aux jeunes gens qui nous liront, mais seulement leur faire connaître l'existence d'un vaste champ de belles connaissances et leur donner le désir de l'explorer.

## I. — Généralités sur les transformations.

2. Transformer une figure, c'est la remplacer par une autre figure qui lui corresponde suivant une loi déterminée. Si cette loi est convenablement choisie, il existe entre les deux figures des rapports simples qui permettent parfois d'en découvrir des propriétés nouvelles. Un exemple bien connu de transformations nous est fourni par les divers systèmes de projections grâce auxquels les géographes représentent sur un plan la surface de la Terre. Ces transformations ont ce caractère spécial d'être seulement définies pour une figure particulière (la Terre supposée sphérique) qui est transformée en un plan ou en une portion de plan, suivant une certaine loi. C'est à ce point de vue qu'on a d'abord considéré une de ces projections les plus usitées : la

projection stéréographique; on a remarqué ensuite qu'on pouvait la regarder comme cas particulier d'une transformation plus générale, l'inversion, laquelle s'applique à tous les points de l'espace. Cette considération permet de démontrer plus simplement bien des propriétés de la projection stéréographique.

Nous sommes ainsi amené à distinguer deux grandes classes de transformations : 1° celles qui sont définies seulement pour une surface ou pour une courbe : telle la projection de Mercator; nous les laisserons de côté [1]; 2° les transformations définies pour tout l'espace, pour tout le plan ou pour toute la droite (suivant que l'on fait de la Géométrie à trois, deux ou une dimension) et que nous considérerons, par suite, non comme des transformations d'une figure particulière, mais comme des *transformations de l'espace (du plan ou de la droite) considéré dans son ensemble*. Pour arriver à cette conception d'une transformation de l'espace, grâce à laquelle sont transformées les diverses figures sises dans cet espace, il est nécessaire de regarder ces figures comme formées d'éléments infiniment petits dont l'ensemble constitue l'espace entier et sur lesquels porte la transformation. Le point de vue le plus habituel et celui auquel nous nous placerons tout d'abord consiste à regarder l'espace comme formé de points qui, associés suivant des lois déterminées, engendrent les figures. Dès lors, une transformation de l'espace est une transformation de tous les points de cet espace et la transformée d'une figure F est la figure formée des points transformés des points de F. Les transformations ainsi définies sont dites transformations *ponctuelles;* nous les étudierons d'abord et verrons ensuite comment on peut arriver à concevoir des transformations plus générales.

**3.** Avant de passer à l'étude de transformations particulières, il est indispensable de présenter quelques remarques générales.

Pour la commodité du langage, nous désignerons souvent une transformation par une seule lettre, par exemple T; si une figure F′ est obtenue en appliquant à une figure F la transformation T, nous dirons que F′ est la transformée de F par T et nous écrirons

$$F' = FT.$$

Soient S une autre transformation, et F″ la transformée de F′ par S; on a

$$F'' = F'S = (FT)S.$$

La figure F″ est déterminée quand on donne F; elle s'en déduit par une certaine transformation que nous conviendrons d'appeler *produit de* T *par* S

---

[1] Les plus intéressantes parmi ces transformations sont les transformations birationnelles de courbe à courbe ou de surface à surface, qui jouent le plus grand rôle dans la théorie des fonctions algébriques. Le problème si important en Analyse de la déformation des surfaces se rattache aussi à ce genre de transformations.

et de désigner par TS. Le symbole TS est ainsi *défini* par l'égalité

$$(1)\qquad (FT)S = F(TS).$$

Nous vérifierons plus tard sur des exemples que l'on n'a pas, en général, TS = ST, c'est-à-dire que la multiplication des transformations *n'est pas commutative*. Il est facile de voir qu'elle est associative, c'est-à-dire que l'on a

$$(TS)U = T(SU);$$

on peut alors désigner chacun de ces produits par TSU. En effet, soit $F'''$ la transformée de $F''$ par U; on a, en appliquant deux fois la définition (1),

$$F''' = F''U = (F'S)U = F'(SU) = (FT)(SU) = F[T(SU)].$$

D'autre part, d'après la même définition,

$$F''' = F''U = [F(TS)]U = F[(TS)U].$$

Les deux transformations T(SU) et (TS)U, appliquées à une même figure quelconque F donnant la même figure $F'''$, sont identiques. C. Q. F. D.

4. Si $F'$ est la transformée de F par T, nous désignerons par $T^{-1}$ la transformation qui remplace $F'$ par F; par définition, les égalités

$$F' = FT, \qquad F = F'T^{-1}$$

sont équivalentes; la transformation $T^{-1}$ est dite la *transformation inverse* de T.

Considérons, dans un espace E, une figure F et sa transformée $F'$ par une transformation S. Appliquons à l'espace E une transformation T qui remplace F et $F'$ respectivement par $\varphi$ et $\varphi'$; la substitution $\sigma$ qui remplace $\varphi$ par $\varphi'$ est dite la *transformée de* S par T. Cherchons son expression symbolique au moyen de S et de T. Pour passer de $\varphi$ à $\varphi'$, on peut passer de $\varphi$ à F, ce qui exige la transformation $T^{-1}$, puis de F à $F'$ à l'aide de S, puis de $F'$ à $\varphi'$ à l'aide de T; on a donc

$$\sigma = T^{-1}ST.$$

On peut remarquer qu'il est possible de multiplier les deux membres d'une telle égalité symbolique par une même transformation à condition de faire les deux multiplications *à droite,* ou toutes deux *à gauche.* On a d'ailleurs

$$TT^{-1} = T^{-1}T = 1,$$

en désignant par 1 la transformation *identique,* c'est-à-dire la transformation qui remplace chaque figure par elle-même [1]. On a donc

$$S = T\sigma T^{-1},$$

[1] On désigne une telle transformation par 1 parce que ce symbole peut être supprimé dans un produit.

c'est-à-dire que S est la transformée de $\sigma$ par la transformation $T^{-1}$ inverse de T. Nous aurions pu obtenir ce résultat directement en observant que $T^{-1}$ remplace $\varphi$ et $\varphi'$ respectivement par F et F'.

5. *On dit qu'un ensemble de transformations forme un groupe lorsque le produit de deux transformations quelconques de l'ensemble appartient à l'ensemble.* Nous supposerons toujours de plus, quoique cette hypothèse ne soit pas indispensable, qu'un groupe renferme les transformations inverses de toutes les transformations qui y figurent. Il en résulte qu'il existe toujours une transformation d'un groupe qui, multipliée par une transformation quelconque S du groupe, en reproduit une transformation également quelconque T; c'est la transformation $S^{-1}T$ ou la transformation $TS^{-1}$ qui appartiennent chacune au groupe, puisque T et $S^{-1}$ lui appartiennent.

Il est clair que l'ensemble des transformations qui laissent invariable un élément donné forme un groupe; car le produit de deux de ces transformations laisse aussi cet élément invariable et appartient par suite à l'ensemble. Il en est de même pour la transformation inverse d'une transformation de l'ensemble. L'élément ainsi invariable est dit un *invariant* du groupe; nous aurons à revenir sur cette définition pour l'éclaircir par des exemples.

Nous terminons ici ces généralités, peut-être un peu abstraites; on pourra utilement les revoir et les mieux comprendre après avoir achevé la lecture de la Note.

## II. — Transformations homographiques.

Avant d'étudier, en général, les transformations ponctuelles, nous allons en approfondir un cas particulier des plus importants, celui des transformations homographiques, que nous considérerons successivement sur la droite, dans le plan et dans l'espace.

### *Transformations de la droite.*

6. Nous fixerons les positions d'un point M sur une droite par deux coordonnées homogènes $x_1$ et $x_2$, proportionnelles aux distances de M à deux points fixes $A_1$ et $A_2$ de la droite, appelés *points fondamentaux*. Nous poserons

$$\rho x_1 = \alpha_1 . \overline{MA_1}, \qquad \rho x_2 = \alpha_2 . \overline{MA_2};$$

$\rho$ est un facteur arbitraire, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ des facteurs déterminés appelés *paramètres de référence;* les coordonnées sont normales si $\alpha_1 = \alpha_2$.

Au lieu de donner $x_1$ et $x_2$, on peut donner leur rapport $\frac{x_1}{x_2} = x$, qui ne dépend pas de l'arbitraire $\rho$.

On appelle *transformation homographique* celle qui est définie par une relation de la forme

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

ou, ce qui revient au même, par les deux relations

$$x'_1 = ax_1 + bx_2,$$
$$x'_2 = cx_1 + dx_2.$$

L'ensemble des transformations homographiques forme un groupe, car il est clair qu'en effectuant successivement deux transformations homographiques on obtient une transformation homographique. Ce groupe est dit *à trois paramètres*, car l'ensemble des transformations qui le composent dépend de trois paramètres arbitraires, à savoir les rapports $a:b:c:d$. Nous l'appellerons souvent, pour abréger, *groupe projectif*.

On voit aisément que de l'équation

$$\text{(S)} \qquad x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

on déduit, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant des nombres quelconques,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta} = \frac{mx+n}{px+q},$$

et que, si $\alpha\delta - \beta\gamma$ n'est pas nul, il en est de même de $mq - np$. Il en résulte immédiatement qu'au point $y = \frac{-n}{m}$ correspond le point $y' = \frac{-\beta}{\alpha}$ et au point $z = \frac{-q}{p}$ le point $z' = \frac{-\delta}{\gamma}$; d'ailleurs, $y$ et $z$ sont différents si $y'$ et $z'$ le sont, et réciproquement.

L'équation (1) peut dès lors s'écrire, en posant $k = \frac{m\gamma}{p\alpha}$,

$$\text{(2)} \qquad \frac{x'-y'}{x'-z'} = k\,\frac{x-y}{x-z}.$$

Nous avons supposé $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ assujettis à la seule condition que $\alpha\delta - \beta\gamma$ ne soit pas nul; donc $y'$ et $z'$ sont les coordonnées de deux points quelconques *distincts*, et, par suite, $y$, $y'$ et $z$, $z'$ sont *les coordonnées de deux couples quelconques de points correspondants*. Donc, l'équation (2) a lieu sous cette seule condition; la constante $k$ dépend du choix des deux couples.

Il est aisé de la déterminer, si l'on connaît un troisième couple $t$, $t'$ de points correspondants; on doit avoir

$$\frac{t'-y'}{t'-z'} = k\,\frac{t-y}{t-z}:$$

on en déduit la valeur de $k$; l'équation de la transformation homographique

peut alors être mise sous la forme

$$\frac{x-y}{x-z}:\frac{t-y}{t-z}=\frac{x'-y'}{x'-z'}:\frac{t'-y'}{t'-z'}.$$

Sous cette forme, elle est susceptible d'une interprétation géométrique très simple : elle exprime que le rapport anharmonique de quatre points quelconques est égal au rapport anharmonique des quatre points transformés.

Nous voyons ainsi que, pour déterminer une transformation homographique, il est nécessaire et suffisant de donner trois couples de points correspondants; *il existe toujours une transformation homographique transformant trois points,* distincts, *donnés, en trois autres points,* également distincts, *choisis arbitrairement.*

7. *Nous appellerons* invariants d'une figure F *par rapport à un groupe de transformations ponctuelles une fonction des coordonnées des points de* F *qui a la même valeur pour la figure* F *et pour les diverses figures qui s'en déduisent par les transformations du groupe.* Il est clair que si I, I′, ... sont des invariants, toute fonction de I, I′, ... sera aussi un invariant. Nous appellerons *système d'invariants fondamentaux de* F un ensemble d'invariants distincts tels que tous les invariants s'expriment au moyen de ceux-là.

Nous allons rechercher un système d'invariants fondamentaux, par rapport au groupe projectif, de la figure F formée de $n$ points en ligne droite. Je dis qu'un tel système est donné par les $n-3$ rapports anharmoniques de $n-3$ de ces points $x_4, x_5, \ldots, x_n$ avec les trois autres $x_1, x_2, x_3$. Il est bien clair d'abord que ces rapports anharmoniques sont des invariants; car si $x'_1$, $x'_2, \ldots, x'_n$ sont les points transformés de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par une transformation homographique quelconque, on a, par exemple,

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)=\frac{x'_4-x'_1}{x'_4-x'_2}:\frac{x'_3-x'_1}{x'_3-x'_2}=\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}:\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Je dis maintenant que tout invariant s'exprime au moyen de ceux-là; soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

un invariant; on a, par hypothèse,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n). \tag{1}$$

Posons

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=\rho_4, \qquad (x_1, x_2, x_3, x_5)=\rho_5, \qquad \ldots, \qquad (x_1, x_2, x_3, x_n)=\rho_n;$$

on aura aussi

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)=\rho_4, \qquad \ldots, \qquad (x'_1, x'_2, x'_3, x'_n)=\rho_n.$$

Si nous tirons de ces relations $x_4, x_5, \ldots, x_n$; $x'_4, \ldots, x'_n$ et si nous por-

tons ces valeurs dans l'expression de l'invariant

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

nous obtenons

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \rho_4, \ldots, \rho_n),$$
$$f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = F(x'_1, x'_2, x'_3, \rho_4, \ldots, \rho_n).$$

Je dis que F ne dépend pas de $x_1$, $x_2$, $x_3$; en effet, on peut trouver une transformation homographique qui donne à $x_1$, $x_2$, $x_3$ des valeurs constantes quelconques $a$, $b$, $c$; et l'on a, par hypothèse,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1 x_2, x_3, \rho_4, \ldots, \rho_n) = F(a, b, c, \rho_4, \ldots, \rho_n);$$

mais F $(a, b, c, \rho_4, \ldots, \rho_n)$ est une fonction $\varphi(\rho_4, \ldots, \rho_n)$, puisque $a, b, c$ sont des constantes; on a donc

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\rho_4, \ldots, \rho_n), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, un système de trois points n'a pas d'invariant; un système de quatre points a un seul invariant fondamental : le rapport anharmonique des quatre points.

8. Nous avons ainsi complètement défini les invariants d'un système fini quelconque de points; mais on peut considérer aussi un système continu de points : par exemple, les positions successives d'un mobile qui parcourt la droite suivant une loi donnée; $x$ est alors une fonction d'une variable indépendante $t$ (qu'on peut supposer représenter le temps). Si l'on fait la transformation

$$(1) \qquad y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

$y$ sera aussi une fonction de $t$, et il est aisé de constater qu'il y a des fonctions de $y$ et de ses dérivées qui sont égales aux fonctions correspondantes de $x$ et de ses dérivées. De telles fonctions sont dites *invariants différentiels* du groupe projectif. En désignant les dérivées par des accents, la relation (1) donne

$$y' = \frac{(ad - bc)x'}{(cx + d)^2},$$

d'où

$$\frac{cx + d}{\sqrt{ad - bc}} = \left(\frac{x'}{y'}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{cx'}{\sqrt{ad - bc}} = \left(\frac{x'}{y'}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x''y' - y''x'}{y'^2}.$$

Enfin, prenant la dérivée logarithmique des deux membres,

$$\frac{x''}{x'} = \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'} - \frac{x''}{x'}\right) - \frac{2y''}{y'} + \frac{x'''y' - y'''x'}{x''y' - y''x'},$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'} + \frac{y''}{y'}\right) = \frac{\dfrac{x'''}{x'} - \dfrac{y'''}{y'}}{\dfrac{x''}{x} - \dfrac{y''}{y'}},$$

et enfin

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2.$$

Chacun des deux membres de cette égalité est l'*invariant différentiel* le plus simple du groupe projectif; il joue un grand rôle dans d'importantes questions d'Analyse.

Il était bien clair qu'en différentiant plusieurs fois l'équation (1) on devait finir par avoir assez d'équations pour éliminer les constantes $a : b : c : d$ et, par suite, obtenir une relation où ne figurent que $x$, $y$ et leurs dérivées. Mais ce qui est remarquable, c'est que, *grâce au fait que l'ensemble des transformations* (1) *forme un groupe, cette relation entre $x$, $y$ et leurs dérivées peut être écrite sous une forme telle que, dans le premier membre, ne figurent que $x$ et ses dérivées et, dans le second membre, que $y$ et ses dérivées.*

Nous devons nous contenter de signaler sans démonstration ce fait important, ainsi que le suivant :

*Tous les invariants différentiels du groupe projectif s'obtiennent en dérivant indéfiniment, par rapport à $t$, l'invariant précédent, ou en combinant entre eux les divers résultats ainsi obtenus.*

### *Transformations du plan.*

**9.** Dans le plan, en désignant par $x_1$, $x_2$, $x_3$ les coordonnées trilinéaires (t. I, n° **171**), les formules de la transformation homographique sont

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_1 = a x_1 + b x_2 + c x_3, \\ x'_2 = a' x_1 + b' x_2 + c' x_3, \\ x'_3 = a'' x_1 + b'' x_2 + c'' x_3, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ces transformations dépendent de *huit* constantes, les rapports des neuf quantités $a$, $b$, ..., $c''$. Elles engendrent un groupe à *huit* paramètres, le groupe projectif. En posant $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$, les équations de la transformation peuvent s'écrire

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''};$$

nous emploierons indifféremment, suivant les cas, l'une ou l'autre de ces notations.

La transformation homographique remplace des points en ligne droite par des points en ligne droite; on peut donc dire qu'elle remplace des droites par des droites; soient

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

l'équation d'une droite et

$$u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 = 0$$

l'équation de la droite transformée. En supposant les $u$ multipliés par un facteur convenable, on doit avoir identiquement

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3.$$

Remplaçant les $x'$ par leurs valeurs tirées des formules de transformations et égalant les coefficients de $x_1, x_2, x_3$ dans les deux membres, on obtient les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 = a\,u'_1 + a'\,u'_2 + a''\,u'_3, \\ u_2 = b\,u'_1 + b'\,u'_2 + b''\,u'_3, \\ u_3 = c\,u'_1 + c'\,u'_2 + c''\,u'_3, \end{cases}$$

qui font connaître comment se transforment les coordonnées des droites. On peut les résoudre par rapport à $u'_1, u'_2, u'_3$; en supprimant le facteur $\Delta$, puisque les rapports seuls des $u'$ importent, on obtient

$$\begin{aligned} u'_1 &= \mathrm{A}\,u_1 + \mathrm{B}\,u_2 + \mathrm{C}\,u_3, \\ u'_2 &= \mathrm{A}'\,u_1 + \mathrm{B}'\,u_2 + \mathrm{C}'\,u_3, \\ u'_3 &= \mathrm{A}''\,u_1 + \mathrm{B}''\,u_2 + \mathrm{C}''\,u_3. \end{aligned}$$

On aurait de même

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{A}\,x'_1 + \mathrm{A}'\,x'_2 + \mathrm{A}''\,x'_3, \\ x_2 &= \mathrm{B}\,x'_1 + \mathrm{B}'\,x'_2 + \mathrm{B}''\,x'_3, \\ x_3 &= \mathrm{C}\,x'_1 + \mathrm{C}'\,x'_2 + \mathrm{C}''\,x'_3, \end{aligned}$$

en désignant les mineurs de $\Delta$ relatifs à ses divers éléments par les grandes lettres correspondantes.

La composition de ces divers systèmes de formules est remarquable et intéressante. Ajoutons-y les remarques suivantes. Soit, identiquement, en vertu de (1),

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{F}(x'_1, x'_2, x'_3),$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_2}\frac{\partial x'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_3}\frac{\partial x'_3}{\partial x_1} \\ &= a\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_1} + a'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_2} + a''\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'_3}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ se déduisent de $\frac{\partial F}{\partial x'_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x'_2}$, $\frac{\partial F}{\partial x'_3}$ par des formules semblables aux formules (2) donnant $u_1$, $u_2$, $u_3$ en fonction de $u'_1$, $u'_2$, $u'_3$ [1]. Si, empruntant une locution à la théorie des formes algébriques, nous dénommons les $x$ variables *covariantes* et les $u$ variables *contravariantes*, nous pourrons dire que les dérivées partielles d'une fonction, par rapport aux variables covariantes, sont transformées comme les variables contravariantes. La réciproque est également vraie.

10. On appelle *sous-groupe d'un groupe donné* un groupe comprenant une partie des transformations du groupe donné. Il est clair, par exemple, que celles des transformations du groupe projectif dans lesquelles les paramètres ont des valeurs rationnelles en forment un sous-groupe. Mais un tel sous-groupe ne peut être représenté explicitement par des équations renfermant des paramètres arbitraires; nous exclurons complètement de nos considérations les groupes de ce genre, quelle que puisse être leur importance dans les recherches algébriques et arithmétiques. Mais il est facile d'indiquer d'autres sous-groupes du groupe projectif. Par exemple, il est manifeste que les transformations qui laissent invariante une droite donnée forment un groupe; supposons les coordonnées choisies de telle sorte que cette droite soit $x_3 = 0$; les équations de ce groupe seront

$$\begin{aligned} x'_1 &= ax_1 + bx_2 + cx_3, \\ x'_2 &= a'x_1 + b'x_2 + c'x_3, \\ x'_3 &= \phantom{a'x_1 + b'x_2 +} c''x_3. \end{aligned}$$

Puisque $c'' \neq 0$, on peut supposer $c'' = 1$ et écrire, en changeant les notations,

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= a'x + b'y + c'. \end{aligned}$$

Ce sous-groupe, que nous appellerons *groupe linéaire général*, est à *six* paramètres.

Désignons par la lettre L, avec un indice quelconque, une transformation de ce groupe, et par P une transformation déterminée du groupe projectif.

Je dis que les transformations de la forme $P^{-1}LP$ forment un groupe, qui est précisément le groupe laissant invariante la droite D transformée de $x_3 = 0$ par la transformation P. Il est clair en effet que la transformation $P^{-1}LP$ laisse invariante la droite D, car la transformation $P^{-1}$ remplace D

(1) Ce fait analytique correspond à cette propriété géométrique : *la transformation homographique remplace la tangente à une courbe par la tangente à la courbe transformée.* Par suite, *elle remplace deux courbes tangentes par deux courbes tangentes;* nous verrons que cette propriété appartient à toutes les transformations ponctuelles.

par $x_3 = 0$, L laisse invariante $x_3 = 0$ et enfin P la remplace par D. Inversement si S laisse invariante D, par le même raisonnement on voit que $PSP^{-1}$ laisse invariante $x_3 = 0$; on a donc

$$PSP^{-1} = L_i$$

et par suite

$$S = P^{-1} L_i P.$$

Donc l'ensemble des transformations $P^{-1}LP$ est identique avec l'ensemble des transformations laissant invariante D, ensemble qui forme manifestement un groupe.

On peut voir autrement que les transformations $P^{-1}LP$ forment un groupe en même temps que les transformations L; on a en effet

$$(P^{-1}L_iP)(P^{-1}L_kP) = P^{-1}L_i(P^{-1}P)L_kP = P^{-1}(L_iL_k)P = P^{-1}L_jP,$$

si $L_iL_k = L_j$. Cette démonstration montre en outre qu'on peut faire correspondre deux à deux les transformations de ces deux groupes, de manière que les produits de transformations correspondantes soient deux transformations correspondantes. Deux tels groupes sont dits *isomorphes.* De plus le groupe $P^{-1}LP$ est dit *transformé du groupe* L *par la transformation* P, et dans le cas où le groupe L est un sous-groupe d'un groupe G auquel appartient P, les sous-groupes L et $P^{-1}LP$ sont dits *homologues dans* G. Lorsque tous les sous-groupes homologues dans G à un sous-groupe L de G sont identiques à L, L est dit sous-groupe *invariant* de G. Le groupe projectif n'a pas de sous-groupe invariant; le groupe linéaire L, par contre, en possède un. Pour nous en rendre compte remarquons que les deux transformations

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = a\,x + b\,y + c, \\ y' = a'x + b'y + c', \end{cases}$$

et

$$x'' = a_1 x' + b_1 y' + c_1,$$
$$y'' = a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1,$$

effectuées successivement, donnent une transformation de la forme

$$x'' = \alpha x + \beta y + \gamma,$$
$$y'' = \alpha' x + \beta' y + \gamma'$$

et que l'on a

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = (ab' - ba')(a_1 b'_1 - b_1 a'_1).$$

D'après cela, appelant $ab' - ba'$ déterminant de la transformation (S), considérons celles des transformations du groupe L dont le déterminant est égal à $+1$; elles forment visiblement un sous-groupe $\Sigma$ (à cinq paramètres) du groupe L; car le produit de deux d'entre elles a encore un déterminant égal à $+1$; de plus, si S est l'une d'elles, et L une transformation quelconque du groupe L, la transformation $L^{-1}SL$ a un déterminant égal à $+1$, car le dé-

terminant de $L^{-1}$ est l'inverse du déterminant de L puisque leur produit $L^{-1}L$ est la transformation identique

$$x' = x, \qquad y' = y$$

de déterminant $+1$.

Le sous-groupe $\Sigma$, formé des substitutions de L de déterminant $+1$, est donc invariant dans L; c'est aussi un sous-groupe de G, mais il n'est pas invariant dans G. En considérant les transformations de déterminant $+1$ et $-1$, on obtiendrait un sous-groupe invariant de L d'une nature particulière, analogue au groupe $\Gamma$ dont il sera question tout à l'heure.

On peut expliquer par la Géométrie les résultats précédents; l'effet d'une transformation de L est, comme on le voit par la formule donnant l'aire d'un triangle, de multiplier les aires par $ab' - ba'$.

Si $ab' - ba' = 1$, les aires restent invariables; les transformations satisfaisant à cette condition forment donc un groupe.

**11.** Un sous-groupe des plus intéressants de L et par suite de G est le *groupe des mouvements* que nous désignerons par $\Gamma$. Supposons les axes rectangulaires; chacune des deux transformations

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b \end{cases}$$

remplace manifestement une figure par une figure *egale,* avec cette différence que la transformation (1) donne une figure qui peut s'obtenir en faisant simplement glisser la première sur son plan, tandis que la transformation (2) exige un retournement. L'ensemble $\Gamma_1$ des transformations (1) forme un groupe (à trois paramètres) comme la Géométrie et le calcul le montrent aisément. L'ensemble $\Gamma_2$ des transformations (2) ne forme pas un groupe; il est, en effet, aisé de voir que le produit de deux transformations $\Gamma_2$ est une transformation $\Gamma_1$. Mais l'ensemble $\Gamma_1 + \Gamma_2$ où $\Gamma$ forme un groupe, dit *groupe complexe,* parce qu'il offre cette curieuse particularité de ne pouvoir être représenté par un seul système d'équations, mais seulement par l'ensemble des systèmes (1) et (2). C'est le groupe des mouvements; nous allons dire un mot de ses invariants, ne pouvant, sans excéder les limites que nous nous sommes tracées, parler des invariants du groupe projectif général.

Les transformations de $\Gamma$ remplacent toute figure par une figure égale, mais située différemment; ses invariants sont donc évidemment les fonctions des coordonnées dont la valeur ne dépend que de la *figure elle-même* et non de sa *situation dans le plan* ou, ce qui revient au même, du *choix des axes rectangulaires.* La plus simple et en même temps la plus importante de ces fonctions est *le carré de la distance de deux points*

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Il est évident géométriquement que cette expression est invariante lorsqu'on transforme respectivement $x_1, y_1; x_2, y_2$, par une même transformation de $\Gamma$. La Géométrie nous montre de plus que l'invariance de cette expression caractérise ce groupe $\Gamma$, car deux figures, dans lesquelles toutes les distances sont égales, sont évidemment égales, comme pouvant être décomposées en triangles égaux. Il en résulte qu'on pourrait de la connaissance de cet invariant déduire par le calcul tous les autres invariants de $\Gamma$; nous nous contenterons de cette indication, qu'il serait trop long de développer et rechercherons directement les invariants différentiels de $\Gamma$. Nous pouvons, soit supposer $x$ et $y$ fonctions d'une même variable $t$, soit regarder $y$ comme fonction de $x$; nous nous en tiendrons à ce dernier point de vue, laissant le premier à développer à nos lecteurs; de plus, pour plus de netteté, nous nous bornerons à la considération des transformations de $\Gamma_1$, que nous écrirons

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi + a,$$
$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi + b,$$

réservant les accents pour indiquer les dérivées respectives de $y$ et Y par rapport à $x$ et X. On a les relations, évidentes par la Géométrie et aisément vérifiables par le calcul,

$$dx^2 + dy^2 = (1 + y'^2)\,dx^2 = dX^2 + dY^2 = (1 + Y'^2)\,dX^2,$$
$$\operatorname{arc\,tang} y' = \operatorname{arc\,tang} Y' + \varphi;$$

la seconde relation donne, en tenant compte de la première,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tang} y' = \left(\frac{d}{dX}\operatorname{arc\,tang} Y'\right)\frac{dX}{dx},$$

$$\frac{y''}{1+y'^2} = \frac{Y''}{1+Y'^2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{1+Y'^2}},$$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Y''}{(1+Y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous obtenons ainsi l'invariant différentiel le plus simple du groupe $\Gamma_1$; il est du second ordre; sa propriété d'invariance est d'ailleurs évidente, si l'on se reporte à sa signification géométrique; on sait, en effet (t. II, § 23) qu'il n'est autre chose que la *courbure* de la courbe donnée. On obtiendra d'autres invariants en dérivant de nouveau par rapport à $x$ et X les deux membres de la dernière équation et en multipliant par $\frac{dX}{dx}$; on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{d}{dx}\left[\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+Y'^2}}\frac{d}{dx}\left[\frac{Y''}{(1+Y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

En posant

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad dS = \sqrt{1+Y'^2}\,dX,$$

on peut dire que le nouvel invariant

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{d}{dx}\left[\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)$$

s'obtient en dérivant le précédent par rapport à $s$. On démontrerait aisément que tous les invariants différentiels de $\Gamma_1$ s'expriment au moyen du rayon de courbure R et de ses dérivées par rapport à l'arc $s$; il est d'ailleurs évident géométriquement que ces diverses expressions sont des invariants de $\Gamma_1$ puisqu'elles ne dépendent que de la courbe donnée et non de sa situation dans le plan.

Pour une conique, il est clair que l'on peut prendre comme invariants fondamentaux les carrés des longueurs des demi-axes ou de leurs inverses, ou mieux leur somme et leur produit, qui sont des fonctions rationnelles des coefficients. En adoptant les notations habituelles, les invariants d'une conique par rapport au groupe $\Gamma_1$ sont, en axes rectangulaires,

$$\frac{(A-C)\delta}{\Delta}, \quad \frac{\delta^3}{\Delta^2}.$$

La considération des invariants du groupe $\Gamma_1$ est le fondement des importantes recherches de M. Lie sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.

### *Transformations de l'espace.*

**12.** Nous bornerons là pour le moment nos remarques sur le groupe projectif dans le plan; nous y reviendrons et en signalerons de nouveaux sous-groupes en le considérant à un autre point de vue; mais, auparavant, nous allons dire quelques mots du groupe projectif dans l'espace; c'est un groupe à quinze paramètres, formé des transformations (homographiques) représentées par les formules générales

$$\begin{aligned} x'_1 &= a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4,\\ x'_2 &= a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4,\\ x'_3 &= a'' x_1 + b'' x_2 + c'' x_3 + d'' x_4,\\ x'_4 &= a''' x_1 + b''' x_2 + c''' x_3 + d''' x_4, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\\ a'' & b'' & c'' & d''\\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \neq 0.$$

En posant $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : z : 1$, on peut les écrire sous la forme

$$x = \frac{ax+by+cz+d}{a'''x+b'''y+c'''z+d'''}, \quad \ldots;$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ désignent des coordonnées tétraédriques quelconques. On formerait, de même que dans la Géométrie à deux dimensions pour la droite,

les équations de transformation des coordonnées d'un plan dont nous écrirons l'équation sous l'une des deux formes

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$
$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

On a, par exemple,

$$u_1 = au'_1 + a'u'_2 + a''u'_3 + a'''u'_4$$

et des équations analogues.

Supposons, d'autre part, qu'en vertu des formules de la transformation on ait identiquement

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4);$$

on en conclut

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a\frac{\partial F}{\partial x'_1} + a'\frac{\partial F}{\partial x'_2} + a''\frac{\partial F}{\partial x'_3} + a'''\frac{\partial F}{\partial x'_4};$$

c'est-à-dire que les dérivées partielles d'une fonction des variables *covariantes* sont transformées comme variables *contravariantes;* la réciproque est également vraie.

Pour faire une application de ce principe, prenons la formule qui donne en axes rectangulaires le cosinus de l'angle de deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \qquad g(x, y, z) = 0.$$

On a

$$\cos V = \frac{(f, g)}{\sqrt{(f, f)(g, g)}},$$

en posant

$$(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}.$$

Supposons que l'on effectue une transformation homographique quelconque; il s'agit de savoir ce que devient l'expression de $\cos V$. Il nous suffit pour cela de rechercher ce que devient l'expression

$$u^2 + v^2 + w^2,$$

car, en vertu des propriétés des formes quadratiques, on saura facilement alors ce que devient l'expression

$$uU + vV + wW,$$

dans laquelle $u$, $v$, $w$, U, V, W sont les coordonnées de deux plans.

Or l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

représente le cercle imaginaire à l'infini; ce cercle devient une conique qui a une équation de la forme

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

et l'on a évidemment

$$u^2+v^2+w^2=\lambda\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4);$$

on en conclut immédiatement qu'en posant

$$f(x,y,z)=\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$g(x,y,z)=\mathrm{G}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=\lambda\varphi\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_4}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}}\right)+\ldots,$$

en désignant par $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}}$ la dérivée partielle par rapport à $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}$ de

$$\varphi\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_4}\right).$$

On a donc

$$\cos\mathrm{V}=\frac{\varphi\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\middle|\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}\right)}{\sqrt{\varphi\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)\varphi\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}\right)}},$$

en posant

$$\varphi(\mathrm{X})=\varphi(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4),$$
$$\varphi(\mathrm{X}\mid\mathrm{Y})=\frac{1}{2}\left(\mathrm{X}_1\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{Y}_1}+\ldots\right).$$

Nous indiquons à la fin du paragraphe comment on peut se servir de cette formule en considérant les transformations homographiques comme des changements de coordonnées.

**13.** Disons maintenant quelques mots des sous-groupes du groupe projectif.

Le plus simple est le groupe linéaire général; c'est un groupe à *douze* paramètres, formé des transformations

$$\begin{aligned} x' &= ax+by+cz+d, \\ y' &= a'x+b'y+c'z+d', \\ z' &= a''x+b''y+c''z+d'', \end{aligned} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

qui laissent invariant le plan $x_4=0$. Ce groupe admet comme sous-groupe invariant le groupe formé des transformations pour lesquelles $\Delta=\pm 1$; on pourrait répéter ici pour les volumes, en supposant les coordonnées carté-

siennes, ce que nous avons dit dans le plan pour les surfaces. Ce groupe admet des sous-groupes homologues auxquels on peut appliquer ce qui a été dit dans le cas de deux variables.

Enfin, le groupe des mouvements, en coordonnées rectangulaires, est formé des transformations du groupe linéaire pour lesquelles chaque élément du déterminant $\Delta$ est égal au mineur correspondant. Ces transformations dépendent de six paramètres; les $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ sont liées par six relations indépendantes (*voir* t. III, n° 36); on peut les exprimer au moyen des trois angles d'Euler, ou au moyen de trois paramètres (ou quatre paramètres figurant d'une manière homogène) par les formules d'Olinde Rodrigues (*voir* aux Exercices).

Si chaque mineur de $\Delta$ était égal et de signe opposé au mineur correspondant, la transformation remplacerait chaque figure par une figure symétrique (non superposable).

Les invariants du groupe des mouvements jouent, dans la théorie des propriétés géométriques des groupes et des surfaces, un rôle très important que peut faire pressentir l'étude sommaire faite en Géométrie plane, mais qu'il serait trop long de développer.

### *Emploi des transformations de coordonnées.*

**14.** Nous allons terminer ce qui concerne les transformations projectives du plan et de l'espace en indiquant de quelle utilité peut être pour leur étude l'emploi des transformations de coordonnées. Si nous n'avons pas placé au début ce point de vue des plus importants, c'est parce qu'il est spécial à la transformation homographique et ne peut s'étendre à toutes les transformations; or nous nous sommes surtout attaché à signaler, à propos de cette transformation particulière, les idées générales susceptibles d'extension.

Remarquons d'abord que les formules les plus générales de transformations des coordonnées ayant la même forme que la transformation homographique, on peut écrire toute transformation homographique :

$$x_1 = X_1, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3, \qquad x_4 = X_4,$$

en supposant que $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ d'une part, $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ d'autre part, désignent des coordonnées tétraédriques par rapport à deux tétraèdres *différents*. On en conclut qu'étudier les transformées homographiques d'une surface, par exemple, représentée par l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

revient à étudier les diverses surfaces que représente cette même équation, lorsque le tétraèdre de référence varie de toutes les manières possibles.

Par exemple, dans l'application que nous avons faite au n° 12, nous pourrions, au lieu de supposer que nous transformons les surfaces en d'autres

surfaces, supposer que les surfaces restent les mêmes, mais que nous prenons des coordonnées quelconques. L'équation

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$$

représente alors le cercle de l'infini par rapport à ce nouveau système de coordonnées et, sous cette seule hypothèse, l'angle de deux surfaces en coordonnées tétraédriques est donné par la formule

$$\cos V = \frac{\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\middle|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)}{\sqrt{\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\varphi\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)}}.$$

15. Il est souvent commode d'utiliser ce rapprochement entre les transformations homographiques et les changements de coordonnées, lorsqu'on a à composer deux ou plusieurs transformations homographiques.

Nous allons d'abord résoudre la question suivante : Quelle relation y a-t-il entre les deux transformations

$$(s)\qquad \begin{cases} x'_1 = a\,x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4, \\ x'_2 = a' x_1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$(S)\qquad \begin{cases} X'_1 = a\,X_1 + b X_2 + \ldots, \\ X'_2 = a' X_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients sont les mêmes, mais où les $x$ et les $x'$ désignent les coordonnées par rapport à un certain tétraèdre, tandis que les X et les X' désignent les coordonnées par rapport à un autre tétraèdre? Il est clair qu'en désignant par H la transformation

$$x_1 = X_1, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3, \qquad x_4 = X_4,$$

on a

$$S = H^{-1} s H.$$

En effet, la transformation $H^{-1}$ remplace les X' par les $x'$, la transformation $s$ remplace les $x'_1$ par les $x$ et la transformation H, enfin, les $x$ par les X. Il en résulte que si l'on effectue, dans les formules d'une transformation homographique, un changement de coordonnées, cela revient à *transformer la transformation homographique* par la transformation homographique correspondant à ce changement de coordonnées.

Les propriétés des transformations S, transformées de certaines transformations $s$, étant, au point de vue de leur composition entre elles, les mêmes que celles des transformations $s$, il en résulte que lorsqu'on aura à composer plusieurs transformations homographiques on pourra toujours, au moyen d'un

changement de coordonnées, les ramener à une forme plus simple. Ce raisonnement s'appliquerait d'ailleurs, sous une forme à peine modifiée, à des transformations non homographiques; effectuer, dans les formules d'une transformation quelconque, un changement de coordonnées, c'est toujours transformer la transformation donnée par une transformation homographique; mais ici, le fait que toutes les transformations considérées sont homographiques donne des résultats particulièrement simples.

16. Considérons, par exemple, la transformation

$$x'_1 = a\,x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4,$$
$$x'_2 = a' x_1 + \dots\dots\dots\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et cherchons les points qu'elle laisse invariants; on doit avoir

$$x'_1 = \sigma x_1, \qquad x'_2 = \sigma x_2, \qquad x'_3 = \sigma x_3, \qquad x'_4 = \sigma x_4.$$

On en conclut sans peine que $\sigma$ est racine de l'équation du quatrième degré

$$\begin{vmatrix} a-\sigma & b & c & d \\ a' & b'-\sigma & c' & d' \\ a'' & b'' & c''-\sigma & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d'''-\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Nous n'étudierons que le cas, évidemment le plus général, où cette équation a ses racines distinctes; nous les désignerons par $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$. On voit aisément alors que quatre points distincts formant un véritable tétraèdre restent invariables par la transformation. Dès lors, si l'on prend ce tétraèdre comme tétraèdre de référence, les équations de la transformation deviendront

$$X'_1 = \sigma_1 X_1, \qquad X'_2 = \sigma_2 X_2, \qquad X'_3 = \sigma_3 X_3, \qquad X'_4 = \sigma_4 X_4,$$

comme il est aisé de s'en rendre compte.

Il importe de ne pas confondre ce résultat avec le fait, beaucoup moins important, signalé au début du n° 14 (la forme $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$, $x_4 = X_4$); ici les X et les X' désignent les coordonnées par rapport à un même tétraèdre.

Recherchons, par exemple, *en nous bornant toujours au cas où les $\sigma$ sont distincts,* si, en répétant $m$ fois une transformation homographique, on peut obtenir la transformation identique

$$X'_1 = X_1, \qquad X'_2 = X_2, \qquad X'_3 = X_3, \qquad X'_4 = X_4.$$

Il est clair que l'on doit avoir pour cela

$$\sigma_1^m = \sigma_2^m = \sigma_3^m = \sigma_4^m.$$

Comme on peut, en multipliant tous les X' par un facteur constant, multiplier les $\sigma$ par un facteur constant, nous pourrons supposer que l'on a

$$\sigma_1^m = \sigma_2^m = \sigma_3^m = \sigma_4^m = 1.$$

Comme les $\sigma$ sont distincts, on devra prendre $m$ au moins égal à *quatre*, et pour les $\sigma$ quatre racines $m^{\text{ièmes}}$ distinctes de l'unité. Il ne faudrait pas se hâter d'en conclure que la transformation est imaginaire, car rien ne suppose le tétraèdre de référence réel. Par exemple, soit $m = 4$; on pourra prendre

$$X'_1 = iX_1, \qquad X'_2 = -iX_2, \qquad X'_3 = -X_3, \qquad X'_4 = X_4$$

et en posant

$$X_1 = x + iy, \qquad X_2 = x - iy, \qquad X_3 = z, \qquad X_4 = t = 1,$$

on aura

$$x' + iy' = i(x + iy), \qquad x' - iy' = -i(x - iy), \qquad z' = -z, \qquad t' = t = 1,$$

c'est-à-dire

$$x' = -y, \qquad y' = x, \qquad z' = -z.$$

## III. — Transformations ponctuelles (¹).

**17.** Une transformation ponctuelle dans l'espace est représentée par des équations de la forme

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z), \\ y' &= g(x, y, z), \\ z' &= h(x, y, z). \end{aligned}$$

On suppose que ce système d'équations peut être résolu par rapport à $x$, $y$, $z$; on démontre qu'il est pour cela nécessaire et suffisant que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)}$ ne soit pas identiquement nul; les points pour lesquels il est nul sont les points *singuliers* de la transformation. En un point non singulier, on voit que si l'on regarde $x, y, z$ comme fonctions d'un paramètre $t$; $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$ sont des fonctions linéaires homogènes de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ à déterminant non nul. On en conclut qu'à deux courbes ou deux surfaces tangentes correspondent deux courbes ou deux surfaces tangentes, et de plus que l'ensemble des tangentes et des plans tangents en deux points

(¹) Dans ce paragraphe, sauf indication expresse du contraire, nous supposerons, pour plus de netteté, les coordonnées cartésiennes rectangulaires. Nos lecteurs verront aisément quels calculs et raisonnements s'étendraient à des coordonnées quelconques.

correspondants sont en correspondance homographique; d'où l'on peut tirer plusieurs conséquences intéressantes (*voir* aux Exercices).

En général, si $f$, $g$, $h$ sont des fonctions rationnelles de $x, y, z$, à un point $(x, y, z)$ correspond un seul point $(x', y', z')$; mais à un point $(x', y', z')$ correspondent plusieurs points $(x, y, z)$. On appelle *birationnelles* les transformations telles qu'à un point $(x', y', z')$ ne corresponde aussi qu'un point $(x, y, z)$ (¹). En nous bornant, pour plus de simplicité, au cas de deux variables, considérons donc la transformation

$$x' = \frac{\varphi(x, y)}{\varpi(x, y)}, \qquad y' = \frac{\psi(x, y)}{\varpi(x, y)},$$

$\varphi$, $\psi$ et $\varpi$ étant des polynomes en $x, y$ de degré au plus égal à $n$. Il est clair qu'à un point $(x', y')$ correspondent, en général, $n^2$ points $x, y$, intersections des deux courbes

$$\varphi - x'\varpi = 0, \qquad \psi - y'\varpi = 0.$$

On peut présenter ce résultat d'une manière plus symétrique. Soit

(1) $$ux' + vy' + w = 0$$

l'équation d'une droite; il lui correspond la courbe

(2) $$u\varphi(x, y) + v\psi(x, y) + w\varpi(x, y) = 0.$$

Si la droite (1) passe par un point fixe P', $u$, $v$, $w$ sont liés par une relation linéaire; la courbe (2), de degré $n$, dépendant d'un paramètre au premier degré passe, en général, par $n^2$ points fixes, qui correspondent au point P'. Cette conclusion est en défaut, si, quels que soient $u$, $v$, $w$, la courbe (2) passe par $r$ points fixes, qui sont alors communs aux trois courbes,

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \varpi = 0.$$

En dehors de ces $r$ points, $n^2 - r$ seulement correspondent au point P'. Les $r$ points sont d'ailleurs singuliers et correspondent, si l'on veut, à un point quelconque $(x', y')$. Car $\varphi$, $\psi$, $\varpi$ étant nuls, $x'$ et $y'$ sont indéterminés; mais on peut en faire abstraction, et à un point $(x', y')$ correspondent alors $n^2 - r$ points $x, y$. Si, en particulier, $r = n^2 - 1$ (²), *un seul point* $(x', y')$ correspond au point $(x, y)$ : la transformation est *birationnelle;* l'Algèbre nous apprend, en effet, que, dans ce cas, on peut déterminer $x$, $y$ en fonction rationnelle de $x'$, $y'$. Un exemple particulièrement simple nous est fourni par les relations

(T) $$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{1}{y}$$

---

(¹) Dans l'espace il y aurait à distinguer entre les transformations *biunivoques* et les transformations *birationnelles;* ce n'en est point ici le lieu.

(²) On ne peut avoir $r = n^2$, sinon les trois courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varpi = 0$ coïncideraient.

ou

$$x' = \frac{y}{xy}, \quad y' = \frac{x}{xy}.$$

M. Cremona, qui a étudié particulièrement les transformations birationnelles auxquelles on donne quelquefois son nom, a montré que toute transformation birationnelle à deux variables pouvait être ramenée à un produit de transformations (T) et de transformations homographiques. Ce théorème, que nous ne démontrerons pas, donne un intérêt particulier à l'étude de la transformation (T) qu'on appelle *transformation quadratique*. Par des raisonnements analogues à ceux du n° 15, on montrerait aisément que la *transformée* de (T) par une transformation homographique est de la forme

$$X' = \frac{1}{X}, \quad Y' = \frac{1}{Y}, \quad Z' = \frac{1}{Z},$$

ou, ce qui revient au même,

$$X' = YZ, \quad Y' = ZX, \quad Z' = XY,$$

les coordonnées étant maintenant des coordonnées trilinéaires *transformées* des coordonnées primitives par la transformation homographique ([1]).

18. Dans le cas où le triangle de référence admet pour sommets les deux points cycliques, cette transformation devient

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy}, \quad x' - iy' = \frac{1}{x - iy}$$

ou

$$x' + iy' = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad x' - iy' = \frac{x + iy}{x^2 + y^2},$$

et enfin

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

En y ajoutant une symétrie par rapport à $Ox$ :

$$y'' = -y',$$

on a

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

formule de la transformation par rayons vecteurs réciproques ou *inversion*. La théorie générale des transformations ponctuelles planes nous conduit ainsi

---

([1]) Pour une étude sommaire de cette transformation et son application à un problème intéressant, on pourra lire : *Solution géométrique de la question posée en 1874 à l'École Polytechnique* (*Nouvelles Annales de Mathematiques*, 1889).

naturellement à cette importante transformation. Dans l'espace, son importance est due surtout à ce remarquable théorème de Liouville, que c'est, avec les déplacements, la seule transformation conservant les angles. Nous allons étudier tout particulièrement l'inversion dans l'espace; nos lecteurs verront aisément ce qui, dans cette théorie, peut être transporté au plan, *mutatis mutandis*.

### *Inversion.*

19. L'inversion [1], par rapport à un *pôle* pris pour origine, avec une *puissance* positive $R^2$, est représentée par les formules

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$z' = \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

auxquelles on peut joindre la suivante

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{R^4}{x^2 + y^2 + z^2},$$

qui est, comme nous le verrons d'après M. Darboux, de la plus grande importance dans cette théorie.

Cette inversion est géométriquement définie par la sphère S de rayon R; on peut dire que deux points correspondants M et M′ sont sur un même diamètre de cette sphère et divisés harmoniquement par ses extrémités; ou que M et M′ sont des sphères de rayon nul coupant la sphère S suivant un même cercle (imaginaire); ou que tous les cercles passant par M et M′ coupent S orthogonalement.

Un avantage important de cette définition géométrique est de rendre intuitif le résultat suivant :

Transformons la sphère S par une inversion ou un déplacement, de manière qu'elle devienne une sphère Σ; les deux points M et M′ deviennent μ et μ′; *ces deux points sont inverses par rapport à* Σ. En effet, les cercles passant par μ et μ′ coupent orthogonalement Σ. Si nous désignons par T la transformation qui remplace S par Σ et S et Σ′ les inversions par rapport aux sphères de même nom, on a

$$\Sigma = T^{-1} S T,$$

[1] Sur tout ce qui concerne l'inversion, on lira avec le plus grand fruit l'Ouvrage classique de M. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, Ouvrage d'ailleurs important à bien d'autres titres et auquel nous avons fait de nombreux emprunts. On pourra consulter aussi Kœnigs, *Leçons de l'Agrégation classique de Mathématiques*.

c'est-à-dire que la transformée d'une inversion par une transformation T (T est une inversion ou un déplacement) admet pour sphère fondamentale la transformée de la sphère fondamentale de l'inversion considérée.

**20.** Supposons maintenant que T soit une inversion dont le pôle soit sur S; $\Sigma$ est alors un plan et les points $\mu$ et $\mu'$ sont tels que ces cercles, passant par $\mu$ et $\mu'$, sont orthogonaux à $\Sigma$ : *$\mu$ et $\mu'$ sont symétriques par rapport au plan.* La symétrie par rapport à un plan (*ou inversion plane*) apparaît ainsi comme un cas particulier de l'inversion (*ou symétrie par rapport à une sphère*).

Ceci posé, considérons deux sphères S et S' se coupant suivant un cercle réel [1], et soit M un point de ce cercle. En le prenant pour pôle de l'inversion T, S et S' deviendront deux plans P et P', se coupant suivant une droite D qui ne passe pas par M. En continuant à désigner une symétrie par rapport à une sphère ou un plan par la même lettre que cette sphère ou ce plan, nous avons

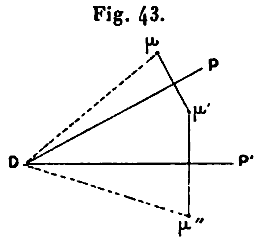
$$P = T^{-1}ST, \qquad P' = T^{-1}S'T$$

et, par suite,

$$PP' = T^{-1}SS'T', \qquad SS' = TPP'T^{-1}.$$

Or, le produit PP' (*fig.* 43) de deux symétries planes peut être étudié très simplement par la Géométrie. Figurons les plans P et P' par leurs traces sur un plan perpendiculaire à leur intersection D; soit $\mu'$ le symétrique de $\mu$ par rapport à P, $\mu''$ le symétrique de $\mu'$ par rapport à P'; $\mu''$ est transformé de $\mu$ par la transformation PP'. On voit immédiatement que l'angle $\widehat{\mu D \mu''}$ est égal, *en grandeur et en signe*, au double de l'angle $\widehat{PDP'}$. Il en résulte que si $P_1$ et $P'_1$ sont deux plans passant par D et faisant le même angle que P et P' et dans le même sens, on a

Fig. 43.




$$P_1 P'_1 = PP'.$$

Désignons par $S_1$ et $S'_1$ les transformées de $P_1$ et $P'_1$ par la transformation inverse de T [2]; ces sphères passent par l'intersection de S et S'; on a

$$S_1 S'_1 = TP_1P'_1T^{-1} = TPP'T^{-1} = SS'.$$

---

(1) Le cas où ce cercle serait imaginaire n'est pas distinct de celui-ci et peut se traiter de même; si l'on veut éviter d'introduire une inversion à un pôle imaginaire, on peut transformer les deux sphères en sphères concentriques $\Sigma$ et $\Sigma'$ et l'on voit aisément qu'on peut remplacer $\Sigma$ et $\Sigma'$ par des sphères concentriques $\Sigma_1$ et $\Sigma'_1$ *dont les rayons aient le même rapport.* En faisant passer $\Sigma_1$, par exemple, par le pôle, le raisonnement s'achève aisément.

(2) L'inversion étant une transformation *involutive,* c'est-à-dire telle que si M correspond à M', M' correspond à M, elle coïncide toujours avec la transformation inverse. Il est cependant préférable de les distinguer pour la clarté et la généralité du raisonnement.

D'ailleurs, l'une des sphères $S_1$ ou $S'_1$ peut être prise arbitrairement (de même que l'un des plans $P_1$ ou $P'_1$). Ainsi l'on peut remplacer deux inversions successives par deux autres inversions successives par rapport à deux sphères passant par l'intersection des deux premières, et dont l'une peut être choisie arbitrairement. En particulier, on peut supposer que l'une des sphères $S_1$ ou $S'_1$ se réduit à un plan; il suffit que le plan $P_1$ ou $P'_1$ passe en M. Donc, étant données deux inversions S et S', on peut déterminer deux sphères $S_2$ et $S_3$ et deux plans $P_2$ et $P_3$ passant par leur intersection, tels que l'on ait

$$SS' = S_2 P_2 = P_3 S_3.$$

Cette détermination n'est d'ailleurs possible que d'une seule manière ([1]).

Nous avons exclu le cas où ces deux sphères S et S' seraient concentriques; dans ce cas, il est clair que le produit SS' équivaut à une transformation homothétique. Remarquons, d'autre part : 1° que deux symétries planes P équivalent à un déplacement ([2]); 2° qu'une transformation homothétique et un déplacement ou une symétrie plane équivalent à une transformation homothétique de pôle arbitraire et un déplacement; 3° qu'une inversion et une homothétie de même pôle, effectuées dans un ordre quelconque, équivalent à une inversion de même pôle; 4° que deux homothéties équivalent à une inversion.

### *Définition géométrique du groupe* G.

**21.** Désignons maintenant par S les inversions sphériques, par P les inversions planes, par D les déplacements et par H les homothéties; je dis que l'ensemble des transformations

$$S, \quad P, \quad D, \quad H, \quad SP, \quad SD, \quad HD$$

forme un groupe que j'appellerai G.

On vérifie en effet aisément que le produit de deux transformations de l'un de ces types est encore une transformation de l'un de ces types. Pour abréger la démonstration, nous pouvons réduire le nombre des types à trois,

$$SP, \quad SD, \quad HD,$$

en supposant que l'une des lettres S, P, D, H puisse désigner la transformation identique. Or on a, par exemple,

$$S_a P_b . S_c P_d = S_a (P_b S_c) P_d.$$

---

([1]) Les considérations précédentes s'appliquent sans modification et en n'introduisant que des éléments réels, pour le cas où l'intersection est imaginaire; dans ce qui suit, pour ce qui concerne l'angle de deux sphères, il y aurait lieu d'ajouter quelques remarques nouvelles.

([2]) Plus généralement, un nombre pair de symétries équivalent à un déplacement et un nombre impair à une symétrie.

Mais

$$P_b S_c = S_e P_f$$

et

$$S_a S_e = S_g P_k,$$

donc

$$S_a P_b S_c P_d = S_g P_k P_f P_d = S_g P_l.$$

De même

$$SP.HD = S(PH)D = SH'P'D,$$

H' étant une homothétie de même pôle que S; donc

$$SP.HD = S'P''.$$

Les autres vérifications se feraient de même; en permutant, ce que l'on peut faire, les lettres S et H avec les lettres P et D, on amènera les lettres S et H à occuper les premiers rangs et les lettres P et D à occuper les derniers; de plus, on pourra toujours supposer que l'homothétie et l'inversion ont même centre. Pour ce dernier point, le cas le plus difficile est le suivant : on a

$$HS = PH'.S = PS' = S''P'$$

en désignant par H' une homothétie de même centre que S et telle que PH' soit équivalente à H.

Les transformations

$$SP, \quad SD, \quad HD$$

ne sont pas toutes distinctes; laissons démontrer à nos lecteurs qu'on les obtiendra toutes en combinant de toutes les manières possibles :

1° Une seule inversion;
2° Toutes les homothéties directes ou inverses ayant un pôle donné;
3° Les rotations autour de trois axes non situés dans un même plan;
4° Les translations parallèles à trois axes non situés dans un même plan;

En supprimant l'inversion, on aurait un groupe plus simple, sous-groupe du groupe G.

**22.** Revenons à la composition de deux inversions S et S'; en se reportant à la démonstration donnée plus haut, on voit qu'on peut les remplacer par deux inversions $S_1$ et $S'_1$, telles que $S_1$ et $S'_1$, passant par l'intersection de S et de S', fassent le même angle et dans le même sens. On conclut aisément de cela, ou de la considération des plans P et P', que l'on a

$$SS' = S'S,$$

*dans le cas et seulement dans le cas où les sphères* S *et* S' *sont orthogonales.*

Si les sphères F et F' se coupent sous un angle $\alpha$ qui soit une partie aliquote de $\pi$, il en est de même des plans P et P' en lesquels on peut les transformer. On voit dès lors aisément qu'en combinant de toutes les manières

possibles les inversions S et S′, on obtient un *nombre limité* d'inversions par rapport à des sphères faisant entre elles des angles égaux à la plus grande commune mesure entre $\alpha$ et $\pi$. Si, au contraire, $\alpha$ et $\pi$ étaient incommensurables entre eux, on obtiendrait en combinant S et S′ une infinité de transformations.

Ces remarques sont fort importantes pour la recherche des sous-groupes du groupe G renfermant un nombre limité de transformations, ou sous-groupes *finis discontinus*, suivant la terminologie en usage ([1]). Nous voyons que les sphères ou plans fondamentaux des diverses symétries figurant dans ces groupes doivent nécessairement se couper suivant des angles commensurables avec $\pi$. Ce théorème simplifie beaucoup les recherches de ces sous-groupes; nous ne nous occuperons cependant pas du cas général ([2]) et nous nous bornerons à celui où le groupe ne renferme pas de mouvements non décomposables en symétries faisant elles-mêmes partie du groupe et où il ne passe pas plus de deux sphères ou plans fondamentaux par un même cercle; ces éléments fondamentaux se coupent alors nécessairement à angle droit.

Nous pouvons avoir deux sphères orthogonales, qu'une inversion transforme en deux plans rectangulaires, ou trois sphères orthogonales deux à deux qu'une inversion convenable transforme en un trièdre trirectangle. Une quatrième sphère peut être orthogonale aux trois faces du trièdre ou, par transformation, à trois sphères orthogonales deux à deux. Peut-on avoir une cinquième sphère orthogonale à ces quatre-là? Il est aisé de le constater par le calcul dans le cas du trièdre trirectangle; si

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0 \tag{1}$$

est une sphère orthogonale aux plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, la sphère

$$x^2+y^2+z^2+R^2=0 \tag{2}$$

est orthogonale aux mêmes plans et à la sphère (1). C'est d'ailleurs la seule sphère remplissant ces conditions; elle est imaginaire, mais définit une inversion réelle ([3]). Nous obtenons ainsi un cas particulier du système *de cinq*

---

([1]) Il semble regrettable que M. Lie ait employé le mot *fini* (endlich) pour désigner des groupes (continus) renfermant une *infinité de transformations* (à un nombre *fini* de paramètres); de sorte que nous soyons obligé d'employer deux épithètes pour éviter toute confusion. Pour cette terminologie, Cf. : Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens* (*Acta Mathematica*, t. I); Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I.

([2]) On peut consulter : Jordan, *Sur les groupes de mouvements* (*Annali di Matematica*, 1868); Klein, *Vorlesungen über das Icosaeder;* Goursat, *Sur les surfaces admettant les plans de symétrie d'un polyèdre régulier* (*Annales de l'École Normale*, 1887).

([3]) En combinant cette inversion avec celle que définit la sphère (1), on obtient une homothétie dans laquelle le rapport d'homothétie est $-1$, c'est-à-dire une symétrie par rapport à l'origine; c'est la seule homothétie pouvant figurer dans un groupe *fini* discontinu de transformations réelles, car on voit aisément que le rapport d'homothétie doit être une racine de l'unité, Cf n° 16.

*sphères orthogonales;* on obtiendrait le plus général en faisant varier $R^2$ et en transformant par inversion.

Relativement aux groupes que forment ces diverses inversions, on voit aisément que les symétries par rapport à deux ou trois plans rectangulaires, forment un groupe, de même que les inversions par rapport aux cinq sphères. En combinant convenablement les inversions par rapport à quatre sphères orthogonales, par exemple

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

on retrouve la *cinquième*. Nous obtenons ainsi des groupes renfermant deux, trois ou *cinq* inversions. Il existe des figures invariables par rapport à chacun de ces groupes; il est aisé de former l'équation générale des figures symétriques par rapport à deux ou trois plans rectangulaires et de la transformer par inversion. Pour les figures invariables par rapport à *cinq inversions*, ou *anallagmatiques* de cinq manières différentes, nous renverrons à l'Ouvrage cité de M. Darboux; en appelant l'attention de nos lecteurs sur la théorie *des pôles secondaires,* où ils trouveront une intéressante application des considérations précédentes.

## IV. — Coordonnées pentasphériques.

23. Nous allons revenir au groupe G déjà signalé et chercher une expression analytique de ses transformations. Les formules déjà rappelées de l'inversion peuvent s'écrire

$$x' = \frac{R^2 x}{u}, \qquad y' = \frac{R^2 y}{u}, \qquad z' = \frac{R^2 z}{u}, \qquad u' = \frac{R^4}{u},$$

en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 = u, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = u'.$$

D'autre part, pour une rotation autour de l'origine, on a

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= a'x + b'y + c'z, \\ z' &= a''x + b''y + c''z, \\ u' &= u, \end{aligned}$$

pour une translation

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0, \qquad z' = z + z_0,$$
$$u' = u + 2x_0 x + 2y_0 y + 2z_0 z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

et enfin, pour une homothétie,

$$x' = kx, \qquad y' = ky, \qquad z' = kz, \qquad u' = k^2 u.$$

Nous voyons que ces diverses transformations peuvent être considérées

comme des transformations homographiques aux *quatre* variables $x, y, z, u$. Ces transformations homographiques ont la propriété commune que la relation

$$x^2+y^2+z^2=u$$

entraîne

$$x'^2+y'^2+z'^2=u'.$$

Autrement dit, ces transformations *laissent invariante l'équation*

$$x^2+y^2+z^2-u=0.$$

Pour plus de symétrie, nous rendrons cette équation homogène et écrirons

$$x^2+y^2+z^2=uv;$$

les formules de l'inversion pourront alors s'écrire

$$(1) \qquad x'=x, \qquad y'=y, \qquad z'=z, \qquad u'=R^2v, \qquad v'=\frac{1}{R^2}u.$$

D'ailleurs $x', y', z', u', v'$ peuvent être multipliés par un facteur constant; les coordonnées rectangulaires du point sont $\frac{x'}{v'}, \frac{y'}{v'}, \frac{z'}{v'}$. Les formules relatives à une translation s'écrivent alors

$$(2) \qquad \begin{cases} x'=x+x_0v, \qquad y'=y+y_0v, \qquad z'=z+z_0v, \\ u'=u+2x_0x+2y_0y+2z_0z+(x_0^2+y_0^2+z_0^2)v, \qquad v'=v, \end{cases}$$

et les formules relatives à une rotation autour de l'origine

$$(3) \qquad \begin{cases} x'=ax+by+cz, \\ y'=a'x+b'y+c'z, \\ z'=a''x+b''y+c''z, \\ u'=u, \qquad v'=v. \end{cases}$$

### *Définition analytique du groupe* G.

**24.** Je dis que toute transformation homographique aux cinq variables $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, ayant la propriété de laisser invariante la forme quadratique

$$x^2+y^2+z^2-uv$$

peuvent s'obtenir en combinant entre elles des transformations des types (1), (2), (3). Remarquons que les $x', y', z', u', v'$ n'étant définis qu'à un facteur près, on peut supposer ce facteur choisi de manière que l'on ait identiquement

$$x^2+y^2+z^2-uv=x'^2+y'^2+z'^2-u'v',$$

en vertu des formules de la transformation donnée

$$\text{(T)}\quad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u + a_{15}v, \\ y' = a_{21}x + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ v' = a_{51}x + a_{52}y + \ldots \qquad\qquad + a_{55}v, \end{cases}$$

dont le déterminant est nécessairement différent de zéro.

Supposons d'abord $a_{55} \neq 0$ et considérons la transformation appartenant au type (2)

$$\text{(T}_1\text{)}\quad \begin{cases} x'' = x' - \dfrac{a_{15}}{a_{55}}v', \qquad y'' = y' - \dfrac{a_{25}}{a_{55}}v', \qquad z'' = z' - \dfrac{a_{35}}{a_{55}}v', \\ \qquad\qquad u'' = u' + \ldots, \qquad v'' = v'. \end{cases}$$

Nous obtiendrons $TT_1 = S$, la transformatian (S) étant la suivante

$$\text{(S)}\quad \begin{cases} x'' = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u, \\ y'' = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u, \\ z'' = b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u, \\ u'' = b_{41}x + b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u + b_{45}v, \\ v'' = b_{51}x + b_{52}y + b_{53}z + b_{54}u + b_{55}v. \end{cases}$$

D'ailleurs $b_{55} = a_{55}$ est différent de zéro. Nous avons, par hypothèse, identiquement

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 - u''v'' = x^2 + y^2 + z^2 - uv.$$

En écrivant que le coefficient de $v^2$ est nul dans le premier membre comme dans le second, nous obtenons $b_{45}b_{55} = 0$ et, par suite, $b_{45} = 0$.

En écrivant maintenant que les coefficients de $vx, vy, vz$ sont nuls, nous obtiendrons $b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0$.

D'ailleurs, en égalant les coefficients de $uv$, on a $b_{44}b_{55} = 1$; donc $b_{44} \neq 0$.

Soit $T_2$ la transformation du type (1) :

$$\text{(T}_2\text{)}\quad x''' = x'', \qquad y''' = y'', \qquad z''' = z'', \qquad u''' = b_{44}v'', \qquad v''' = b_{55}u''.$$

On aura $ST_2 = S'$ et la transformation S' s'écrira, en tenant compte des relations précédentes,

$$\text{(S')}\quad \begin{cases} x''' = b_{11}x + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{14}u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u''' = c_{41}x + c_{42}y + c_{43}z + c_{44}u + v, \\ v''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u, \end{cases}$$

Nous considérons maintenant la transformation $T_3$ du type (2) :

$$\text{(T}_3\text{)}\quad \begin{cases} x_1 = x''' - b_{14}v''', \qquad y_1 = y''' - b_{24}v''', \qquad z_1 = z''' - b_{34}v''', \\ u_1 = u''' + \ldots, \qquad v_1 = v''', \end{cases}$$

et nous aurons $S'T_3 = S''$ :

$$(S'') \qquad \begin{cases} x_1 = ax \;\; + by \;\; + cz, \\ y_1 = a'x + b'y + c'z, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z, \\ u_1 = \alpha x \;\; + \beta y \;\; + \gamma z + \delta u + v, \\ v_1 = u. \end{cases}$$

D'ailleurs l'identité

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - u_1 v_1 = x^2 + y^2 + z^2 - uv$$

montre que l'on a

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$$

de sorte que la transformation $S''$ s'obtient en combinant une transformation du type (3) avec une transformation du type (1).

Nous avons donc prouvé que la transformation donnée (T) était, avec l'hypothèse $a_{55} \neq 0$, un produit de transformations des types (1), (2) et (3). Dans le cas où $a_{55}$ serait nul et $a_{45}$ différent de zéro, on ferait, au préalable, une transformation (1); enfin, si $a_{45}$ était nul en même temps que $a_{55}$, la transformation

$$x = X, \qquad y = Y, \qquad z = Z, \qquad u = V, \qquad v = U,$$

faite *avant* la transformation (S), ramènerait à considérer $a_{44}$ et $a_{54}$; enfin, si l'on avait aussi $a_{44} = a_{54} = 0$, il suffirait de faire une transformation du type (2) pour les rendre différents de zéro, à moins que l'on n'ait aussi

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = 0,$$

ce qui serait absurde.

La discussion précédente serait d'ailleurs considérablement simplifiée si l'on supposait les transformations réelles; car il suffirait de considérer le coefficient de $v^2$ pour montrer que, si l'on a $a_{45} = a_{55} = 0$, il en résulte

$$a_{15}^2 + a_{25}^2 + a_{35}^2 = 0$$

et, par suite,

$$a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{45} = a_{55} = 0,$$

ce qui est absurde.

Nous avons ainsi défini, pour déterminer la position d'un point dans l'espace, un système de cinq coordonnées homogènes $x, y, z, u, v$ qui ont la propriété fondamentale suivante : elles sont liées par la relation quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 = uv,$$

et toute transformation homographique qui laisse invariante cette relation équivaut à une combinaison d'inversions et de déplacements, en un mot, à une transformation du groupe que nous avons appelé G. Cette dernière propriété est très importante dans l'étude des propriétés anallagmatiques des figures.

c'est-à-dire des propriétés qui se conservent par l'inversion et par le déplacement; en effet, quand on emploie ces coordonnées particulières, on est ramené à étudier les propriétés des fonctions de $x, y, z, u, v$ qui se conservent par certaines transformations homographiques.

### *Formules fondamentales en coordonnées pentasphériques.*

**25.** On peut généraliser cette définition des coordonnées et obtenir la notion la plus générale des coordonnées pentasphériques, due aussi à M. Darboux. Posons

$$(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{array}{l} x = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{15}x_5, \\ y = a_{21}x_1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = a_{51}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{55}x_5, \end{array}\right.$$

les $a$ étant des quantités réelles ou imaginaires quelconques, dont le déterminant n'est pas nul et $x_1, x_2, \ldots, x_5$ étant les nouvelles coordonnées.

On a identiquement

$$x^2 + y^2 + z^2 - uv = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_5),$$

$\varphi$ étant une forme quadratique aux cinq variables $x_1, x_2, \ldots, x_5$ que nous appellerons *forme fondamentale*. En effet, les cinq coordonnées homogènes d'un point sont nécessairement liées par la relation

$$\varphi = 0.$$

D'autre part, il est clair que si une transformation S effectuée sur $x, y, z, u, v$ laisse invariante la forme $x^2 + y^2 + z^2 - uv$, la transformation $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}$ effectuée sur $x_1, \ldots, x_5$ laissera invariante la forme $\varphi$. Une telle transformation équivaut à une composition d'inversions et de déplacements. Pour établir les formules relatives au système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_5$, il suffira de se servir des formules, aisées à établir directement, relatives au système $x, y, z, u, v$ et des propriétés d'invariance des formes quadratiques. Cherchons, par exemple, la formule donnant l'angle de deux surfaces représentées par les équations

$$f(x, y, z, u, v) = 0, \qquad g(x, y, z, u, v) = 0.$$

Si l'on suppose $v = 1$, ce qui est permis, puisque les équations sont homogènes, on aura

$$f(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, 1) = f_1(x, y, z),$$
$$g(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2, 1) = g_1(x, y, z),$$

et l'angle des deux surfaces $f_1 = 0$, $g_1 = 0$ est donné par la formule, déjà écrite au n° **12**,

$$\cos\theta = \frac{(f_1, g_1)}{\sqrt{(f_1, f_1)(g_1, g_1)}}.$$

Or on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Donc

$$(f_1, g_1) = \mathbf{S}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial x} = \mathbf{S}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{S}x\frac{\partial g}{\partial x} + 2\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{S}x\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ 4(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u},$$

le signe $\mathbf{S}$ de Lamé indiquant une sommation étendue aux trois axes de coordonnées.

Les fonctions $f$ et $g$ étant homogènes en $x, y, z, u, v$, on a, en vertu des équations $f = 0$, $g = 0$,

$$\mathbf{S}x\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

$$\mathbf{S}x\frac{\partial g}{\partial x} + u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

et, de plus,

$$x^2+y^2+z^2 = uv;$$

il en résulte

$$\mathbf{S}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial x} = \mathbf{S}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial u}\left(u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$- 2\frac{\partial g}{\partial u}\left(u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}\right) + 4uv\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u},$$

ou, en faisant $v = 1$,

$$\mathbf{S}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} - 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}.$$

On trouverait de même

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - 4\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Or, si nous désignons par

$$\Psi(X, Y, Z, U, V)$$

la forme quadratique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 4UV,$$

adjointe de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - uv,$$

ces formules peuvent s'écrire

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 = \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

et

$$\mathrm{S}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\middle|\frac{\partial g}{\partial x}\right),$$

en posant

$$\Psi(X_1 | X_2) = X_1\frac{\partial\Psi}{\partial X_2} + Y_1\frac{\partial\Psi}{\partial Y_2} + \ldots + V_1\frac{\partial\Psi}{\partial V_2}.$$

Or nous avons vu que si l'on a identiquement, en vertu de ces transformations homographiques (T),

$$f(x, y, z, u, v) = F(x_1, x_2, \ldots, x_5),$$

$$g(x, y, z, u, v) = G(x_1, x_2, \ldots, x_5),$$

les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial v}$ sont transformées comme variables *contravariantes*. Or, si la transformation T remplace

$$x^2 + y^2 + z^2 - uv$$

par

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_5),$$

la transformation adjointe remplace

$$\Psi = X^2 + Y^2 + Z^2 - 4UV$$

par la fonction adjointe de $\varphi$ :

$$\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_5).$$

Il en résulte que l'angle des deux surfaces $F = 0$, $G = 0$ est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)}{\sqrt{\Phi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Phi\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)}}.$$

26. Cette formule va nous permettre d'étudier de plus près la signification géométrique de notre système de coordonnées. Remarquons qu'en résolvant les formules T, et faisant $v = 1$, on trouve, par exemple,

$$x_1 = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta y + \gamma y + \delta z + \varepsilon.$$

Nous voyons que $x_1 = 0$ représente une sphère $S_1$ et que la coordonnée $x_1$ d'un point est proportionnelle à la puissance de ce point par rapport à la sphère $S_1$; on a

$$x_1 = \rho K_1 S_1, \qquad x_2 = \rho K_2 S_2, \qquad \ldots, \qquad x_5 = \rho K_5 S_5,$$

$\rho$ étant un facteur arbitraire, les K des constantes données et $S_1, \ldots, S_5$ les puissances d'un point par rapport aux cinq sphères $S_1, \ldots, S_5$ [1].

Une équation linéaire

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_5 x_5 = 0$$

représente évidemment une sphère (ou un plan); cherchons l'angle qu'elle fait avec la sphère coordonnée

$$x_1 = 0.$$

Nous aurons

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)}{\sqrt{\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)\,\Phi(1, 0, \ldots, 0)}}.$$

En particulier, si l'on pose

$$\Phi(x_1, \ldots, x_5) = \Sigma A_{ik} x_i x_k \qquad (A_{ik} = A_{ki}):$$

on a, pour l'angle des sphères coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, l'expression

$$\cos\theta_{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11} A_{22}}}.$$

Les sphères coordonnées seront donc orthogonales deux à deux quand on aura

$$A_{ik} = 0,$$

si

$$i \angle k;$$

et, par suite,

$$\Phi = A_1 x_1^2 + \ldots + A_5 x_5^2;$$

on a d'ailleurs alors

$$\rho = \frac{x_1^2}{A_1} + \ldots + \frac{x_5^2}{A_5},$$

c'est-à-dire que les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales deux à deux sont liées par une relation quadratique ne contenant pas les rectangles des variables.

Dans le cas de ces *coordonnées pentasphériques rectangulaires*, on a

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{A_1}\,\alpha_1}{\sqrt{A_1 \alpha_1^2 + \ldots + A_5 \alpha_5^2}},$$

et, par suite,

$$\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{A_1}\,\alpha_1} = \frac{\cos\theta_2}{\sqrt{A_2}\,\alpha_2} = \ldots = \frac{\cos\theta_5}{\sqrt{A_5}\,\alpha_5},$$

[1] On a des relations géométriques particulièrement simples en supposant $K_i = \frac{1}{R_i}$, $R_i$ étant le rayon de la sphère $S_i$. (*Voir* Darboux, *loc. cit.*)

D'ailleurs on aperçoit immédiatement la relation

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \ldots + \cos^2\theta_5 = 1$$

qui lie les cosinus des angles d'une sphère arbitraire avec cinq sphères deux à deux orthogonales.

On obtient les formules les plus symétriques et les plus simples en supposant que l'on ait

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_5 = 1,$$

et, par suite,

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2,$$
$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2.$$

On obtient par exemple un tel système de coordonnées en posant

$$x_1 = x,$$
$$x_2 = y,$$
$$x_3 = z,$$
$$x_4 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2} = \frac{u - v}{2},$$
$$x_5 = i\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2} = i\frac{u + v}{2}.$$

Les équations

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0$$

représentent alors le système particulier de sphères orthogonales qui comprend trois plans rectangulaires et dont nous avons parlé plus haut. On obtiendra tous les systèmes de coordonnées pentasphériques rectangulaires en soumettant $x_1, x_2, \ldots, x_5$ à une transformation homographique *orthogonale,* c'est-à-dire laissant invariante la forme

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2.$$

Nous avons alors, pour les angles que fait, avec les sphères coordonnées, la sphère

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_5 x_5 = 0,$$

les formules

$$\cos\theta_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\Sigma\alpha_i^2}}, \qquad \ldots.$$

On voit de plus aisément que l'angle de deux sphères

$$\Sigma\alpha_1 x_1 = 0, \qquad \Sigma\alpha'_1 x_1 = 0$$

est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{\Sigma\alpha_i\alpha'_i}{\sqrt{\Sigma\alpha_i^2\,\Sigma\alpha_i'^2}} = \Sigma\cos\theta_i\cos\theta'_i,$$

tout à fait analogue à celle qui donne l'angle de deux directions en fonction des angles qu'elles font avec trois directions rectangulaires.

*Coordonnées de la sphère.*

27. De même que l'on a appelé les coefficients de l'équation d'un plan *coordonnées du plan*, de même nous appellerons *coordonnées de la sphère* les coefficients de l'équation de la sphère, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$. Nous voyons que ces coordonnées sont proportionnelles aux cinq cosinus des angles de la sphère avec les cinq sphères coordonnées; on peut prendre pour coordonnées ces cosinus eux-mêmes en divisant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ par

$$\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_5^2}.$$

Il se présente une exception dans le cas où l'on a

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_5^2=0;$$

il est aisé de voir que dans ces cas la sphère se réduit à un point dont les coordonnées homogènes sont précisément ([1])

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_5.$$

En effet, nous avons vu qu'en posant

$$F=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_5 x_5=f_1(x, y, z),$$

on a

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2=\Sigma\alpha_1^2=0.$$

Donc l'équation $f_1=0$ représente une surface dont tous les plans tangents sont isotropes et qui, étant du second degré, est un cône isotrope ou sphère-point. On peut remarquer qu'une telle sphère fait en général un angle infini avec une autre sphère quelconque

$$(S) \qquad \Sigma\beta_i x_i=0,$$

---

([1]) Il y a ici une simplification due à ce que la forme fondamentale est identique avec son adjointe; dans le cas général le point $x_1, x_2, \ldots, x_5$ est représenté par l'équation

$$X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\ldots+X_5\frac{\partial\varphi}{\partial x_5}=0,$$

et l'on a d'ailleurs

$$\Phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_5}\right)=0.$$

car on a

$$\cos\theta = \frac{\Sigma \alpha_i \beta_i}{\sqrt{\Sigma \alpha_i^2 \Sigma \beta_i^2}},$$

et l'on a

$$\Sigma \alpha_i^2 = 0.$$

Il y a exception dans le cas où

$$\Sigma \alpha_i \beta_i = 0;$$

l'angle est alors indéterminé; la sphère S passe alors par le centre P de la sphère-point; ces résultats sont évidents par la Géométrie.

Cherchons le rayon R de la sphère

$$\Sigma \alpha_i x_i = 0.$$

Si l'on a identiquement

$$\Sigma \alpha_i x_i = A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Bx + 2Cy + 2Dz + H;$$

on sait que

$$R^2 = \frac{B^2 + C^2 + D^2 - AH}{A^2}.$$

Or A, B, C, D, H sont des fonctions linéaires des $\alpha$; on a donc

$$R^2 = \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5)}{\psi^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5)},$$

$\varphi$ étant une forme quadratique et $\psi$ une forme linéaire. D'ailleurs le rayon est nul si $\varphi = 0$ et infini si $\psi = 0$; donc l'équation $\varphi = 0$ exprime que la sphère se réduit à un point et $\psi = 0$ qu'elle se réduit à un plan; donc $\varphi$ en particulier est ici la forme fondamentale

$$\varphi = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2,$$

et nous avons

$$R^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2}{(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha_4 + l_5\alpha_5)^2}.$$

Dans bien des théories, il y a avantage à pouvoir donner un signe au rayon d'une sphère, c'est-à-dire à pouvoir considérer comme distinctes deux sphères de même centre et de rayons égaux, en supposant ces rayons de signes contraires; on peut ainsi distinguer plus aisément les centres d'homothétie, etc. (*Voir* plus loin, n° 40.) On y parvient aisément ici en posant

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = -\alpha_6^2,$$

et l'on a

$$R = \frac{i\alpha_6}{(l_1\alpha_1 + \ldots + l_5\alpha_5)}.$$

Le signe de $\alpha_6$ est déterminé par le signe du rayon de la sphère; deux sphères qui coïncident et ont leurs rayons de signes contraires ont toutes

leurs coordonnées égales, sauf $\alpha_6$; une sphère a ainsi six coordonnées homogènes liées par la relation symétrique

$$\Sigma \alpha_i^2 = 0.$$

On a pour l'angle de deux sphères

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_6\beta_6}{\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots}\sqrt{\beta_1^2 + \ldots}} = \frac{\pm\sum_1^5 \alpha_i\beta_i}{\alpha_6\beta_6}.$$

Nous conviendrons de prendre le signe — de manière que deux sphères qui coïncident fassent un angle nul; on a alors

$$(1) \qquad \cos\theta = \frac{-(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_5\beta_5)}{\alpha_6\beta_6}.$$

On a, entre la distance des centres, les rayons et l'angle des sphères, la relation

$$d^2 = R^2 + R'^2 \pm 2RR'\cos\theta,$$

relation dans laquelle on doit prendre le signe + ou le signe — suivant la convention que l'on fait pour définir l'angle. Ici, dans le cas de deux sphères coïncidentes, nous devons prendre le signe —; donc, par raison de continuité, l'angle $\theta$ défini par la formule (1) satisfait à la relation

$$d^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta,$$

les rayons ayant leur signe d'après les formules

$$R = \frac{i\alpha_6}{\Sigma l_i\alpha_i}, \qquad R' = \frac{i\beta_6}{\Sigma l_i\beta_i}.$$

Dans le cas où R et R' sont nuls, c'est-à-dire où les sphères sont des points, on a

$$d^2 = -2RR'\cos\theta = \frac{-2(\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_5\beta_5)}{\Sigma l_i\alpha_i \Sigma l_i\beta_i}.$$

Comme d'ailleurs, dans ce cas,

$$\Sigma\alpha_i^2 = 0, \qquad \Sigma\beta_i^2 = 0,$$

on peut écrire aussi

$$d^2 = \frac{\Sigma(\alpha_i - \beta_i)^2}{\Sigma l_i\alpha_i \Sigma l_i\beta_i},$$

et la distance de deux points infiniment voisins est donnée par la formule [1]

$$ds^2 = \frac{\Sigma d\alpha_i^2}{(\Sigma l_i\alpha_i)^2}.$$

---

[1] Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ satisfaisaient aux deux relations $\Sigma\alpha_i^2 = 0$, $\Sigma l_i\alpha_i = 0$, ce ne seraient pas les coordonnées d'un point, mais d'un plan isotrope. Nous laisserons de

**28.** La condition pour que deux sphères soient tangentes est donnée par la formule

$$\cos V = 1$$

ou

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_6 = 0;$$

on exclut le cas où $\cos V = -1$; les sphères ne sont pas alors considérées comme tangentes; quand $\cos V = 1$, on a $d = \pm(R - R')$; si $\cos V = -1$, $d = \pm(R + R')$.

Si l'on effectue sur les $\alpha$ une transformation homographique H qui laisse invariante l'équation

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_5^2 + \alpha_6^2 = 0,$$

deux cas peuvent se présenter. Si la transformation n'altère pas $\alpha_6$, la transformation sur $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ devant donner lieu à l'identité

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_5^2 = \alpha_1'^2 + \ldots + \alpha_5'^2,$$

nous savons qu'elle se réduit à une combinaison d'inversions et de déplacements. Nous pouvons d'ailleurs prendre, lorsque les signes de $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_5$ sont choisis, soit

$$\alpha_6 = \alpha'_6,$$

soit

$$\alpha_6 = -\alpha'_6.$$

Cela revient à changer le signe des rayons des sphères après l'inversion. Or, c'est un fait remarquable, depuis longtemps mis en évidence par M. Darboux, que dans une inversion, le rayon de la sphère transformée s'exprime rationnellement au moyen du rayon de la sphère donnée. Si $a$, $b$, $c$, $\rho$ sont les coordonnées du centre et le rayon d'une sphère, on trouve aisément pour la sphère transformée,

$$a' = \frac{K^2 a}{a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2},$$

$$b' = \frac{K^2 b}{a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2},$$

$$c' = \frac{K^2 c}{a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2},$$

$$\rho' = \frac{K^2 \rho}{a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2};$$

c'est en vertu d'une *convention* que nous prenons le signe + dans cette dernière formule; on aurait pu aussi bien prendre le signe —; d'ailleurs, on a aussi

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 - \rho'^2 = \frac{K^4}{a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2}.$$

---

côté ce cas d'exception où l'on n'a pas $R = 0$, ainsi que celui où le point est dans le plan de l'infini, au sujet duquel on peut consulter l'Ouvrage cité de M. Darboux.

On pourrait déduire de ces formules la théorie des coordonnées de la sphère en procédant comme nous l'avons fait plus haut pour les coordonnées des points. On poserait

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \frac{R}{\rho} = \frac{U}{a^2 + b^2 + c^2 - \rho^2} = \frac{V}{1},$$

et l'on aurait les formules de transformation

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z, \qquad R' = R, \qquad U' = K^2 V, \qquad V' = \frac{U}{K^2}$$

qui laisseraient invariable la relation fondamentale

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 - UV = 0.$$

En posant

$$X = x_1, \quad Y = x_2, \quad Z = x_3, \quad U - V = 2x_4, \quad i(U + V) = 2x_5, \quad R = ix_6,$$

la forme fondamentale s'écrit

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

et le rayon $\rho$ d'une sphère est donné par la formule

$$\rho = \frac{R}{V} = \frac{-ix_6}{x_4 + ix_5}.$$

Revenons aux transformations homographiques H, conservant la forme

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_6^2 = 0.$$

Nous venons de voir que, dans le cas où $\alpha_6$ reste invariable, elles équivalent à une inversion, au signe près pour le rayon, mais que ce signe est parfaitement déterminé dans chaque cas; nous reviendrons plus loin sur ce point. On déduit aisément des formules précédentes que toutes les transformations H s'obtiennent en combinant les inversions et déplacements avec les *dilatations,* transformations qui consistent à augmenter d'une quantité constante le rayon de chaque sphère. Il suffit de combiner les transformations qui laissent $x_6$ invariable avec la transformation particulière

$$(\mathrm{T}) \quad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= x_1, \\ x'_2 &= x'_2, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 + ix'_5 &= x_4 + ix_5, \\ x'_6 &= x_6 + ih(x_4 + ix_5), \\ x'_4 - ix'_5 &= x_4 - ix_5 + h^2(x_4 + ix_5) - 2hx_6. \end{aligned} \right.$$

On voit, en effet, aisément que l'on a identiquement, en conservant les notations précédentes,

$$\Sigma x_i'^2 = \Sigma x_i^2,$$

$$a' = a, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad \rho' = \rho + h.$$

D'ailleurs toute transformation H s'obtient en combinant la transformation (T) avec les transformations qui laissent $x_6$ invariable. Nous nous contenterons, pour le moment, de ces indications, nous réservant de revenir sur les transformations (T) après avoir parlé des transformations de contact (*voir* n° 41).

## V. — Transformations corrélatives.

**29.** On sait que, au lieu de regarder une figure comme formée de points, on peut la considérer comme enveloppe de plans (n° 200). Se placer à ce dernier point de vue revient à considérer l'espace comme formé de plans, tandis que d'habitude on le considère comme formé de points. Dès lors, au lieu de considérer des transformations ponctuelles par lesquelles à un point correspond un point, on peut considérer des transformations tangentielles par lesquelles à un plan correspond un plan. Pour avoir la transformée d'une figure par une telle transformation il suffit de prendre l'enveloppe des plans transformés de ses plans tungents. On peut aussi considérer des transformations mixtes faisant correspondre aux points d'un espace les plans d'un autre espace. Mais il n'y a pas lieu d'étudier, en général, les transformations que nous venons de signaler, bien que certaines d'entre elles soient intéressantes et méritent à ce titre une étude particulière; en effet, ces transformations tangentielles ou mixtes peuvent s'obtenir en combinant avec les transformations ponctuelles la transformation simple :

$$u'_1 = x_1, \qquad u'_2 = x_2, \qquad u'_3 = x_3, \qquad u'_4 = x_4.$$

C'est cette transformation que nous allons étudier tout d'abord.

Nous désignons par $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ les coordonnées ponctuelles et par $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ les coordonnées tangentielles de sorte que l'équation d'un plan est

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

D'ailleurs, les lettres non accentuées se rapportent à la figure primitive et les lettres accentuées à la figure transformée.

Aux divers points du plan

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

correspondent des plans dont les coordonnées $u'_1$, $u'_2$, $u'_3$, $u''_4$ satisfont à la relation

$$u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_4 u'_3 + u_4 u'_4 = 0,$$

c'est-à-dire les plans passant par le point :

$$x'_1 = u_1, \qquad x'_2 = u_2, \qquad x'_3 = u_3, \qquad x'_4 = u_4.$$

On voit que la transformation précédente est *involutive*, c'est-à-dire reste la même si l'on permute les lettres accentuées et les lettres non accentuées.

On peut remarquer qu'un point et le point correspondant sont pôle et polaire par rapport à la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

d'où le nom de *transformation par polaires réciproques* que Poncelet a donné à la transformation considérée. Il est facile de constater que, si un point $x$ décrit une surface S. le plan correspondant $u'$ enveloppe une surface S' et que le point de contact $x'$ de $u'$ avec S' correspond au plan $u$ tangent à S en $x$. Le plan $u'$ a, en effet, pour équation

$$(1) \qquad x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0,$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ coordonnées d'un point de S étant liés par la relation homogène

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Le point de contact $x'$ du plan (1) avec son enveloppe est défini par les équations (n° 201)

$$(3) \qquad \frac{x'_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{x'_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{x'_3}{\frac{\partial f}{\partial x_3}} = \frac{x'_4}{\frac{\partial f}{\partial x_4}}.$$

C'est bien le point correspondant au plan $u$ tangent à la surface (2).

En éliminant $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ entre les équations homogènes (2) et (3), on obtiendra l'enveloppe du plan (1) qui sera, en général, une surface. Dans le cas où les rapports

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

qui figurent dans les équations (3) ne dépendraient que d'*un* paramètre au lieu de *deux*, ce qui a lieu quand la surface (2) est développable [1], on obtiendrait, par l'élimination de cet unique paramètre, deux relations entre $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$, c'est-à-dire une courbe. Réciproquement, si l'on part d'une courbe définie comme lieu de points, il lui correspondra un plan dépendant d'un paramètre, lequel enveloppera une développable.

Nous reviendrons sur cette transformation d'une courbe en une développable après avoir étudié à fond la transformation des lignes droites; mais auparavant nous désirons dire quelques mots de *la transformation corrélative générale*, représentée par les formules

$$\begin{aligned}
u'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
u'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
u'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
u'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,
\end{aligned}$$

---

(1) On tient compte toujours, bien entendu, de l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

le déterminant des $a_{ik}$ étant essentiellement supposé différent de zéro. On voit que si le plan $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$ passe par le point $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$, on a

$$x'_1(a_{11}x_1+\ldots+a_{14}x_4)+x'_2(a_{21}x_1+\ldots)+\ldots=0,$$

ou, en abrégé,

$$\Sigma a_{ik}x_k x'_i=0,$$

ce qui équivaut à

$$\Sigma a_{ki}x_i x'_k=0,$$

de sorte que le point $x_1, x_2, x_3, x_4$ est situé dans le plan

$$u_1=a_{11}x'_1+a_{21}x'_2+a_{31}x'_3+a_{41}x'_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_4=a_{14}x'_1+\ldots.$$

On voit que la transformation n'est pas, en général, involutive; pour qu'elle le soit, il faut que les relations

$$x_1:x_2:x_3:x_4=x'_1:x'_2:x'_3:x'_4$$

entraînent

$$u'_1:u''_2:u'_3:u'_4=u_1:u_2:u_3:u_4.$$

On reconnaît aisément que pour cela on doit avoir

(1) $$\frac{a_{11}}{a_{11}}=\frac{a_{12}}{a_{21}}=\ldots=\frac{a_{21}}{a_{12}}=\ldots.$$

La valeur commune de ces rapports peut être l'unité; le déterminant des $a_{ik}$ est alors symétrique; c'est le discriminant d'une certaine forme quadratique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\Sigma a_{ik}x_i x_k,$$

et l'on a

$$u'_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},\qquad u'_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},\qquad \ldots.$$

*La transformation est une transformation par polaires réciproques par rapport à la quadrique $f=0$.*

Mais on peut satisfaire d'une autre manière aux équations (1), en supposant la valeur commune des rapports égale à $-1$; on a alors

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=0,\qquad a_{12}+a_{21}=0,\qquad \ldots.$$

Le déterminant des $a$ est un *déterminant symétrique gauche;* comme il est de *degré pair,* il n'est pas nul en général; en Géométrie plane, la solution correspondante à celle-ci serait à rejeter, car tout déterminant symétrique gauche de degré *impair* est nul. Si nous restons dans l'espace, nous pouvons, en changeant les notations, écrire les équations de la transformation

$$u'=bz-cy+\alpha,$$
$$v'=cx-az+\beta,$$
$$w'=ay-bx+\gamma,$$
$$s'=-(\alpha x+\beta y+\gamma z),$$

l'équation d'un plan étant mise sous la forme

$$u'x' + v'y' + w'z' + s' = 0.$$

Cette équation devient

$$a(yz' - zy') + b(zy' - xz') + c(xy' - yx') \\ + \alpha(x' - x) + \beta(y' - y) + \gamma(z' - z) = 0.$$

On voit que ce plan, qui correspond au point $x, y, z$, passe par ce point; en posant

$$yz' - zy' = \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad z' - z = c_1,$$

on peut écrire la relation précédente :

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0.$$

On voit que la droite de coordonnées $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ appartient à un certain complexe linéaire; le plan correspondant d'un point donné est son plan polaire dans ce complexe et la transformation est dite : ***transformation par polaires réciproques par rapport au complexe***. Le déterminant de la transformation est

$$\begin{vmatrix} 0 & -c & h & \alpha \\ c & 0 & -a & \beta \\ -b & a & 0 & \gamma \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix} = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2.$$

Le fait qu'il est différent de zéro exprime que $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne sont pas les coordonnées d'une droite, ou que le complexe n'est pas ***spécial***, c'est-à-dire n'est pas formé des droites rencontrant une droite donnée. On aura le cas le plus simple en supposant $c = \gamma = 1$; les équations de la transformation sont alors

$$\begin{aligned} u' &= -y, & u'_1 &= -x_2, \\ v' &= x, & u'_2 &= x_1, \\ w' &= 1, & u'_3 &= x_4, \\ s' &= -z, & u'_4 &= -x_3. \end{aligned}$$

Il est intéressant de récrire à côté de ces formules celles de la transformation par polaires réciproques par rapport à une quadrique, dans le cas le plus simple

$$(\mathrm{P}) \qquad \left\{ \begin{aligned} u'_1 &= x_1, \\ u'_2 &= x_2, \\ u'_3 &= x_3, \\ u'_4 &= x_4. \end{aligned} \right.$$

On verrait aisément que toute transformation corrélative peut s'obtenir en

effectuant successivement une transformation homographique convenablement choisie et une de ces transformations particulières; cette proposition est un cas particulier de la suivante qui est évidente : la transformation

$$\begin{aligned} u'_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ u'_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ u'_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ u'_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

est le produit de la transformation

$$x''_1 = f_1, \qquad x''_2 = f_2, \qquad x''_3 = f_3, \qquad x''_4 = f_4$$

et de la transformation

$$u'_1 = x''_1, \qquad u'_2 = x''_2, \qquad u'_3 = x''_3, \qquad u'_4 = x''_4.$$

30. Recherchons maintenant quelle est la transformée $\Pi$ de la transformation P par une transformation homographique H

$$\Pi = H^{-1}PH.$$

Appelons $(c)$ la conique qui a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

et $\Gamma$ la transformée de $c$ par H ; je dis que la transformation $\Pi$ est une transformation par polaires réciproques par rapport à $\Gamma$. Soit en effet $\alpha$ un point et $\mathcal{A}$ son plan polaire par rapport à $\Gamma$; la transformation $H^{-1}$ remplace $\Gamma$ par C, $\alpha$ et $\mathcal{A}$ respectivement par un point $a$ et un plan A, qui sont pôle et polaire par rapport à C. Nous voyons donc que $H^{-1}$ remplace $\alpha$ par $a$, P remplace $a$ par A et H remplace A par $\mathcal{A}$ ; donc $\Pi = H^{-1}PH$ remplace $\alpha$ par $\mathcal{A}$.

C. Q. F. D.

La démonstration par le calcul ne présente pas non plus de difficultés ([1]).

Ces propositions ont une grande importance au point de vue de l'emploi de la transformation par polaires réciproques pour la démonstration de propriétés des figures. Nous voyons que, *si l'on se place au point de vue projectif,* le choix de la quadrique directrice (ou de la conique directrice dans le plan) est complètement indifférent.

On peut transformer par rapport à une quadrique particulière et effectuer

---

([1]) On verrait de même que la transformation P' se transforme par une transformation homographique en une transformation par polaires réciproques par rapport au complexe linéaire transformé du complexe

$$xy' - yx' + z - z' = 0.$$

ensuite une transformation homographique générale. Lorsqu'il s'agit de transformer des propriétés métriques, il semble que le choix de la surface directrice influe et, effectivement, la transformation de certaines de ces propriétés acquiert un énoncé particulièrement simple lorsque cette surface est une sphère (dans le plan on choisit un cercle et quelquefois une parabole). En réalité, la simplification ainsi obtenue est plus apparente que réelle, et l'on aura souvent avantage à procéder autrement : on énoncera la propriété métrique sous une forme projective; on transformera par rapport à une conique quelconque, par exemple, et ensuite on choisira dans la nouvelle figure la droite de l'infini et les points cycliques parmi les éléments qui jouent un rôle important, de manière à avoir un énoncé métrique.

31. Il résulte des remarques précédemment faites, que l'ensemble des transformations corrélatives et des transformations homographiques forme un groupe, que nous appellerons, dans ce qui suit, *groupe* $\mathcal{G}$.

*Coordonnées de la droite. — Groupe* $\mathcal{G}$.

Ce groupe est représenté par des équations de deux natures très différentes : les équations de la transformation homographique et celles de la transformation corrélative; il y a avantage à simplifier cette représentation, notamment si l'on désire étudier les propriétés invariantes par ce groupe; nous obtiendrons ce résultat par l'emploi des coordonnées de la droite, en même temps que nous rendrons intuitive l'existence du groupe $\mathcal{G}$.

On sait que l'on peut attribuer à une droite six coordonnées homogènes liées par la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

les coordonnées de la droite qui joint deux points : $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ et $y_1$, $y_2$, $y_3$ $y_4$ sont données par les relations

$$\frac{a}{x_1y_4 - x_4y_1} = \frac{b}{x_2y_4 - x_4y_2} = \frac{c}{x_3y_4 - x_4y_3}$$
$$= \frac{\alpha}{x_2y_3 - x_3y_2} = \frac{\beta}{x_3y_1 - x_1y_3} = \frac{\gamma}{x_1y_2 - x_2y_1}$$

et les coordonnées de la droite intersection des deux plans $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ et $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ par les formules

$$\frac{a}{u_2v_3 - u_3v_2} = \frac{b}{u_3v_1 - u_1v_3} = \frac{c}{u_1v_2 - u_2v_1}$$
$$= \frac{\alpha}{u_1v_4 - u_4v_1} = \frac{\beta}{u_2v_4 - u_4v_2} = \frac{\gamma}{u_3v_4 - u_4v_3}.$$

Cherchons comment les coordonnées de la droite sont transformées par

une transformation homographique :

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{vmatrix}.$$

On a, par exemple,

$$\begin{aligned} & x'_1 y'_4 - x'_4 y'_1 \\ & = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)(a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4) - \dots \\ & = (a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41})(x_1y_4 - x_4y_1) + \dots \\ & \quad + (a_{11}a_{42} - a_{12}a_{41})(x_1y_2 - x_2y_1); \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad a' = A^{23}_{23}a + A^{31}_{23}b + A^{12}_{23}c + A^{14}_{23}\alpha + A^{24}_{23}\beta + A^{34}_{23}\gamma,$$

en désignant par $A^{i'k'}_{ik}$ le mineur de $\delta$, qui s'obtient en supprimant les lignes de rangs $i$ et $k$ et les colonnes de rangs $i'$ et $k'$. En se servant de la règle de Laplace pour le développement des déterminants, on voit aisément que l'on a

$$(2) \qquad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \Delta(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Le discriminant de $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma'$ est égal par suite à celui de $a\alpha + b\beta + c\gamma$ multiplié par $\Delta^6$, d'où l'on conclut que le module de la substitution qui remplace les $a$ par les $a'$ est $\Delta^3$.

On trouverait de même, pour la transformation corrélative,

$$u'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots,$$

les formules

$$(1)' \qquad \begin{cases} \alpha' = A^{23}_{23}a + \dots + A^{34}_{23}\gamma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c' = A^{23}_{34}a + \dots + A^{34}_{34}\gamma, \end{cases}$$

donnant lieu encore à l'identité (2). Je dis que si, réciproquement, on transforme des droites de l'espace par des formules *linéaires* et *homogènes*

$$(3) \qquad a' = f(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \dots, \qquad \gamma' = g(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma),$$

donnant lieu à l'identité

$$(4) \qquad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = k(a\alpha + b\beta + c\gamma);$$

la transformation (3) appartient au groupe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire est une transformation homographique ou une transformation corrélative. Cette proposition supposée démontrée met bien en évidence la propriété des transformations homographiques et corrélatives de former un groupe, car il est évident que

l'ensemble des transformations (3), qui donnent lieu à l'identité (4), forme un groupe.

32. Pour démontrer cette proposition, nous pouvons observer qu'une forme quadratique à 6 variables ayant 21 coefficients, l'identité (4) établit 20 relations entre les 36 coefficients des relations (3); ces relations sont précisément celles qui existent identiquement entre les 36 coefficients des relations (1) et (1)', lesquels s'expriment au moyen des 16 coefficients $a_{ik}$. Si l'on admet, ce qui est à peu près évident, que ces 20 relations sont indépendantes, on peut en conclure réciproquement que, lorsqu'elles sont vérifiées, les 36 coefficients des relations (3) peuvent être identifiés avec les 36 $A_{ik}^{i'k'}$ qui figurent dans (1) ou dans (1)', et qui dépendent seulement des 16 paramètres $a_{ik}$. Cette démonstration a l'avantage d'être très simple, mais il faut convenir qu'elle n'a pas toute la rigueur désirable et, de plus, elle ne fait pas bien comprendre pourquoi le système (3) se ramène tantôt à la forme (1) et tantôt à la forme (1)'.

Pour abréger, nous ne nous étendrons pas ici sur ces explications complémentaires, qui seront inutiles après la lecture du paragraphe qui concerne les transformations dans l'espace à plusieurs dimensions (n°48). Signalons seulement le fait capital sur lequel elles s'appuient : l'identité (4) et la forme linéaire des formules (3) permettent d'écrire

$$\Sigma(a' + a'_1)(\alpha' + \alpha'_1) = k\Sigma(a + a_1)(\alpha + \alpha_1),$$

en supposant que l'indice 1 se rapporte à une seconde droite; on en conclut, à cause de (4),

$$\Sigma(a'\alpha'_1 + a'_1\alpha') = k\Sigma(a\alpha_1 + a_1\alpha),$$

c'est-à-dire que la transformation (3) considérée remplace deux droites qui se coupent par deux droites qui se coupent. Un ensemble de droites dépendant de deux paramètres et tel que chacune de ses droites rencontre toutes les autres, c'est-à-dire un hyperfaisceau, sera donc remplacé par un hyperfaisceau; seulement deux cas peuvent se présenter : la transformation remplace une gerbe par une gerbe et un système plan par un système plan, ou bien elle remplace la gerbe par le système plan et le système plan par la gerbe. Dans le premier cas, elle est homographique et, dans le second cas, corrélative.

On voit que le groupe $\mathcal{G}$ est ici représenté par un seul système d'équations; mais il faut ajouter que les coefficients sont assujettis à certaines conditions, et que, si l'on voulait les expliciter, le système se décomposerait en deux; c'est ce que feront apparaître plus clairement les remarques suivantes.

33. Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} a = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma = f_6(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6), \end{cases}$$

les $f$ étant les symboles de *formes linéaires* à déterminant non nul; on a identiquement

$$(2)\qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = \omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6) = \omega(\xi),$$

$\omega(\xi)$ étant une forme quadratique aux variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ dont le déterminant n'est pas nul.

Il est clair que six quantités

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_6$$

satisfaisant à la relation

$$\omega(\mu) = 0$$

peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes d'une droite, laquelle aura pour coordonnées ordinaires

$$a = f_1(\mu), \qquad \ldots, \qquad \gamma = f_6(\mu).$$

D'ailleurs la condition pour que deux droites $\mu$ et $\nu$ se rencontrent est, en vertu de l'identité (2) et de la forme linéaire des équations (1), que le coefficient de $\lambda$ dans

$$\omega(\mu + \lambda\nu)$$

soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\nu_1 \frac{\partial\omega}{\partial\mu_1} + \nu_2 \frac{\partial\omega}{\partial\mu_2} + \ldots + \nu_6 \frac{\partial\omega}{\partial\mu_6} = 0.$$

Il est clair qu'en choisissant convenablement la transformation (1), on pourra supposer que $\omega(\xi)$ est une forme quadratique quelconque à discriminant non nul. Nous pourrons supposer par exemple

$$\omega(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2.$$

Il est évident que lorsqu'on remplace les variables $a, b, \ldots, \gamma$ par les variables $\xi$, le groupe $\mathcal{G}$ devient le groupe des transformations homographiques donnant lieu à l'identité

$$\omega(\xi') = k\omega(\xi).$$

D'ailleurs, on peut toujours supposer le coefficient de proportionnalité par lequel il est permis de multiplier les $\xi'$ choisi de manière que l'on ait

$$\omega(\xi') = \omega(\xi).$$

La transformation est alors, dans le cas où $\omega$ a la forme particulière (3), une transformation orthogonale à six variables; écrivons-la

$$(\mathrm{T})\qquad \begin{cases} \xi'_1 = a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{16}\xi_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi'_6 = a_{61}\xi_1 + \ldots + a_{66}\xi_6. \end{cases}$$

La relation

$$\xi_1'^2 + \ldots + \xi_6'^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_6^2$$

donne

$$a_{11}^2 + \quad a_{12}^2 + \ldots + \quad a_{16}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \ldots + a_{16}a_{26} = 0,$$

et les relations analogues; on démontre, de même que dans le cas de trois variables (p. 31), que le déterminant des $a_{ik}$ est égal à $\pm 1$, de sorte que les transformations ($\Gamma$) se divisent en deux classes suivant que le déterminant est $+1$ ou est $-1$. D'ailleurs le produit de deux transformations a un déterminant égal au produit des deux déterminants; on peut en induire, et cette induction sera pleinement justifiée plus loin (nº 48) que les transformations de déterminant $+1$ sont des transformations homographiques et les transformations de déterminant $-1$ des transformations corrélatives, car le produit de deux transformations de même espèce (homographiques ou corrélatives) est une transformation homographique, tandis que le produit de deux transformations d'espèces différentes est une transformation corrélative.

34. On voit que les transformations du groupe $\mathcal{G}$ ont ce caractère commun de remplacer par lui-même l'ensemble des droites de l'espace; seulement une distinction s'établit immédiatement entre les transformations homographiques et les transformations corrélatives. Les premières sont des transformations ponctuelles et font correspondre aux divers points d'une droite les divers points de la droite transformée; mais les secondes font correspondre aux points d'une droite les *plans* qui contiennent la droite transformée, et réciproquement.

Considérons une droite qui soit tangente à une surface S ou qui *coupe* une courbe C; on peut dire dans ces deux cas qu'il y a sur cette droite un point M et qu'il passe par cette droite un plan P, *tels que* P *soit tangent en* M *à* S *ou à* C. Cela posé, soit d'abord une surface non développable S; une transformation homographique ou corrélative lui fait correspondre une surface non développable S′ et de manière qu'à l'ensemble d'un point et d'un plan tangents de S correspondra l'ensemble d'un point et d'un plan tangents de S′. Donc aux tangentes de S correspondent les tangentes de S′. Dans le cas où la surface S serait développable, le raisonnement subsiste pour la transformation homographique; la transformation corrélative lui fait correspondre une courbe et à l'ensemble de ses tangentes l'ensemble des droites qui rencontrent cette courbe. D'ailleurs, aux génératrices de la développable, c'est-à-dire aux droites telles que tous leurs points soient sur la surface, correspondent les tangentes de la courbe, c'est-à-dire des droites telles que tous leurs plans soient tangents à la courbe. Les quelques détails que nous allons donner sur les transformations de contact éclairciront encore ces considérations.

## VI. — Transformations de contact.

Le moment est, en effet, venu d'exposer aussi complètement que le permet l'exiguïté de notre cadre, la notion fondamentale d'*élément de contact,* due à M. Lie.

### *Éléments de contact.*

35. On appelle *élément de contact* l'ensemble d'un point $x, y, z$ et d'un plan

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

passant par ce point. Les cinq quantités $x, y, z, p, q$ sont les cinq coordonnées de l'élément de contact; on voit que l'ensemble des éléments de contact de l'espace dépend de *cinq* paramètres; on dit quelquefois qu'un tel ensemble forme une infinité *quintuple,* ce que l'on exprime par le symbole $\infty^5$.

Un élément de contact est dit appartenir à une surface, s'il est formé d'un point de cette surface et du plan tangent en ce point à la surface; à une courbe, s'il est formé d'un point de cette courbe et d'un des plans tangents à cette courbe en ce point; à un point s'il est formé de ce point et d'un plan quelconque passant par ce point. Avec ces conventions de langage, les divers faits géométriques suivants :

Deux surfaces sont tangentes;
Une surface et une courbe sont tangentes;
Deux courbes se coupent;
Une surface passe par un point;
Une courbe passe par un point;
Deux points coïncident,

peuvent être exprimés de la même manière.

*Les deux êtres géométriques considérés* (surface, courbe ou point) *ont un élément de contact commun.*

Nous désignerons sous le nom de *multiplicité* l'ensemble doublement infini des éléments de contact qui appartiennent à une même surface, à une même courbe ou à un même point, et deux multiplicités ayant un élément de contact commun seront dites *tangentes.*

Si l'une des multiplicités est une courbe et l'autre un point, par exemple, dire qu'elles sont tangentes signifiera que la courbe passe par le point.

Avec ce langage abrégé, diverses propriétés de la transformation corrélative peuvent être réunies en un seul énoncé : *cette transformation remplace deux multiplicités tangentes par deux multiplicités tangentes.* Toute transformation ayant cette propriété fondamentale s'appelle *transformation de contact;* nous allons nous proposer de rechercher la forme géné-

rale de toutes les transformations de contact; nous retrouverons en particulier toutes les transformations dejà étudiées dans les Chapitres précédents.

Une transformation de contact doit remplacer toutes les multiplicités ayant un élément de contact commun E par des multiplicités ayant en commun un autre élément de contact commun E'. Il est bien clair que l'on peut considérer une telle transformation comme faisant correspondre E' à E, c'est-à-dire que les coordonnées $x', y', z', p', q'$ de E' sont certaines fonctions des coordonnées $x, y, z, p, q$ de E :

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = f(x, y, z, p, q), \\ y' = g(x, y, z, p, q), \\ z' = h(x, y, z, p, q), \\ p' = k(x, y, z, p, q), \\ q' = l(x, y, z, p, q). \end{cases}$$

D'ailleurs, ces équations (1) doivent pouvoir être résolues par rapport à $x, y, z, p, q$ (n° 17, p. 501), c'est-à-dire établissent, entre ces cinq variables, cinq relations distinctes. En particulier, les trois premières de ces équations sont distinctes et, par suite, si l'on élimine entre ces trois équations distinctes les deux variables $p$ et $q$, on obtiendra *au moins* [1] une relation entre $x$, $y, z, x', y', z'$. D'après cela, trois cas peuvent se présenter :

1° L'élimination de $p$ et de $q$ entre les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = f, \\ y' = g, \\ z' = h \end{cases}$$

donne trois relations distinctes entre $x, y, z, x', y', z'$; cela revient à dire que ces trois équations ne renferment pas $p$ et $q$; la transformation est donc une transformation ponctuelle et il n'y a pas lieu de s'y arrêter plus longuement.

2° L'élimination de $p$ et de $q$ entre les équations (2) donne deux relations distinctes :

$$(3)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, x', y', z') = 0, \\ G(x, y, z, x', y', z') = 0. \end{cases}$$

3° L'éliminination de $p$ et de $q$ donne une seule relation entre $x, y, z$, $x', y', z'$ :

$$(4)\qquad \omega(x, y, z, x', y', z') = 0.$$

Nous allons parler d'abord de ce dernier cas; nous étudierons ensuite le précédent.

---

(1) Ces trois équations sont distinctes par rapport aux cinq variables $x, y, z, p, q$, mais ne le sont pas nécessairement par rapport aux deux variables $p$ et $q$.

*Transformations de contact de la première classe.*

36. Nous partons donc de l'hypothèse suivante : une certaine transformation T fait toujours correspondre à deux multiplicités tangentes *deux multiplicités* tangentes; de plus, entre les coordonnées $x, y, z, p, q$ ; $x', y', z', p', q'$ de deux éléments de contact correspondants existe *la seule relation indépendante de* $p, q, p', q'$

$$\omega(x, y, z, x', y', z') = 0.$$

Nous allons voir que ces conditions suffisent pour déterminer la transformation (T). Considérons, en effet, un point

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

Les éléments de contact de ce point ont pour coordonnées $a, b, c, p, q$ et l'on doit supposer $p$ et $q$ quelconques. D'après cela, les coordonnées $x', y', z', p', q'$ des éléments de contact correspondant aux éléments de contact du point $(a, b, c)$ seront liées *par la seule relation indépendante de* $p'$ et $q'$

$$(5) \qquad \omega(a, b, c, x', y', z') = 0.$$

En d'autres termes, la transformation considérée fait correspondre au point $a, b, c$ la surface représentée par l'équation (5).

Considérons maintenant une surface S

$$(6) \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

et soit $(a, b, c)$ un point de cette surface.

La surface S et le point $(a, b, c)$ sont deux multiplicités tangentes; il doit donc leur correspondre deux multiplicités tangentes, c'est-à-dire que la multiplicité S' qui correspond à S est tangente à la surface (5); comme le même raisonnement peut être répété pour tout point $(a, b, c)$ de S, l'on en conclut que l'on obtient S' en cherchant l'enveloppe de la surface

$$(4) \qquad \omega(x, y, z, x', y', z') = 0,$$

$x, y, z$ étant des paramètres liés par la relation (S). On sait que l'on obtient cette enveloppe en éliminant $x, y, z$ entre les relations (6), (4) et les suivantes :

$$(7) \qquad \frac{\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

Si l'on pose

$$p = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}},$$

les équations (7) s'écriront

$$(7)' \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial\omega}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y} + q\,\dfrac{\partial\omega}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

On peut remarquer que $p$ et $q$ sont les coefficients de l'équation du plan tangent à (S), écrite sous la forme

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

En d'autres termes, $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ sont les coordonnées d'un élément de contact de S et l'on obtient les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ de l'élément correspondant en résolvant les équations (4) et (7)'. On voit que ces coordonnées ne dépendent que des coordonnées de l'élément de contact et non de la surface (S).

Il en résulte qu'à une surface (S) correspond généralement une surface (S') définie par les équations

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega(x, y, z, x', y', z') = 0, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial\omega}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y} + q\,\dfrac{\partial\omega}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles $x, y, z, p, q$ sont les coordonnées dépendant de deux paramètres d'un élément de contact de S. Il est aisé de calculer les coordonnées d'un élément de contact de S'; nous pouvons regarder les équations (7) comme définissant $x'$, $y'$, $z'$ comme fonctions de $x$ et $y$, $z$ y étant considéré comme fonction de $x$ et $y$, dont les dérivées partielles sont $p$ et $q$. En différentiant la première des équations (8), successivement par rapport à $x$ et $y$, on obtient (¹)

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial z}p + \frac{\partial\omega}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z}q + \frac{\partial\omega}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = 0.$$

En tenant compte des équations (8), on voit que l'on a

$$\frac{\partial\omega}{\partial x'} : \frac{\partial\omega}{\partial y'} : \frac{\partial\omega}{\partial z'} = \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x} : \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} - \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial x} : \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}.$$

Or les trois quantités écrites dans le second membre sont proportionnelles

---

(¹) Le calcul se fait plus simplement par l'emploi des différentielles totales, emploi que j'ai tenu à éviter dans tout ce Chapitre.

aux coefficients de l'équation du plan tangent écrit sous la forme

$$A(X'-x')+B(Y'-y')+C(Z'-z')=0.$$

On en conclut

$$\frac{\partial\omega}{\partial x'}:\frac{\partial\omega}{\partial y'}:\frac{\partial\omega}{\partial z'}=p':q':-1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\omega}{\partial x'}+p'\frac{\partial\omega}{\partial z'}=0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y'}+q'\frac{\partial\omega}{\partial z'}=0.$$

Ces équations montrent que $p'$ et $q'$, de même que $x'$, $y'$, $z'$, ne dépendent que de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$; d'ailleurs leur analogie avec les équations $(7)'$ montrent bien que la transformation est définie d'une manière symétrique par rapport aux lettres accentuées et non accentuées, ce qui devait être puisque l'on peut, en partant de l'équation (4), raisonner d'une manière analogue sur ces deux systèmes de variables.

37. Nous avons fait une seule hypothèse restrictive, mais elle est essentielle; les équations (8) sont des équations distinctes en $x'$, $y'$, $z'$, c'est-à-dire peuvent être résolues par rapport à ces trois variables, et donnent en général, c'est-à-dire si la surface S est quelconque, pour $x'$, $y'$, $z'$, des fonctions de deux variables; d'ailleurs pour des surfaces S particulières, $x'$, $y'$, $z'$ peuvent être des fonctions d'une seule variable ou même des constantes; à ces surfaces il correspond une courbe ou un point.

Inversement, nous aurions pu partir d'une courbe C; $x$, $y$, $z$ auraient alors été des fonctions d'un seul paramètre et nous aurions été amené à chercher dans ces conditions l'enveloppe de la surface (4); en désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la tangente à C, nous aurions eu à éliminer le paramètre qui définit C entre l'équation (4) et l'équation

$$\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x}+\beta\frac{\partial\omega}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\omega}{\partial z}=0$$

obtenue en dérivant (4) par rapport à ce paramètre. Cette dernière équation est une conséquence des équations (6') et de l'équation

$$p\alpha+q\beta-\gamma=0$$

qui exprime que le plan de tout élément de contact de C, c'est-à-dire tout plan tangent à C, contient la tangente à C; nous pouvons donc conserver les équations $(7)'$ dans tous les cas.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant : une première classe de transfor-

mations de contact est définie par les formules

$$\begin{aligned}
\omega(x, y, z, x', y', z') &= 0, \\
\frac{\partial\omega}{\partial x} + p\,\frac{\partial\omega}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial\omega}{\partial y} + q\,\frac{\partial\omega}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial\omega}{\partial x'} + p'\,\frac{\partial\omega}{\partial z'} &= 0, \\
\frac{\partial\omega}{\partial y'} + q'\,\frac{\partial\omega}{\partial z'} &= 0,
\end{aligned}$$

que l'on suppose essentiellement pouvoir être résolues, soit par rapport à $x, y, z, p, q$, soit par rapport à $x', y', z', p', q'$. Il faut pour cela que la *fonction caractéristique* $\omega$ soit convenablement choisie. L'interprétation géométrique de ces formules est facile.

38. Des exemples éclairciront cette proposition générale; dans le cas où $\omega$ est bilinéaire,

$$\omega = a_{11}xx' + a_{12}xy' + a_{21}yx' + \ldots + a_{34}z + a_{43}z' + a_{44},$$

on retrouve la transformation corrélative; nous n'y reviendrons pas.

Supposons maintenant

$$\omega = x^2 + y^2 + z^2 - xx' - yy' - zz'.$$

Si l'on regarde $x, y, z$ comme fixes, l'équation

$$\omega = 0$$

représente un plan P passant par le point $(x, y, z)$ et perpendiculaire à la droite qui joint ce point à l'origine. Au lieu du point $(x, y, z)$ correspond l'enveloppe de ce plan; si le point $(x, y, z)$ décrit une surface S, le plan P enveloppe une surface S', et S est la podaire de S' par rapport au point O. Si M' est un point $(x', y', z')$ de S', S est l'enveloppe de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xx' + yy' + zz') = 0$$

décrite sur OM' comme diamètre. Cette proposition est aisée à démontrer géométriquement; on examinera aussi aisément les cas particuliers où S ou S' se réduit à une courbe.

On peut remarquer que la transformation que nous venons d'étudier rentre dans la classe de celles que nous avons appelées *mixtes;* en mettant l'équation d'un plan sous la forme

$$u'x' + v'y' + w'z' + 1 = 0,$$

on pourrait l'écrire

$$u' = \frac{-x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$v' = \frac{-y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$w' = \frac{-z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Elle est le produit de l'inversion

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

et de la transformation corrélative

$$u' = -X, \qquad v' = -Y, \qquad w' = -Z.$$

Cette proposition est d'ailleurs connue et peut se démontrer aisément par la Géométrie.

On obtient une autre transformation de contact très intéressante en prenant

$$\omega = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - a^2.$$

Cette transformation est involutive puisque $x$ et $x'$ figurent symétriquement dans $\omega$; à une surface S elle fait correspondre l'enveloppe des sphères de rayon $a$ ayant leurs centres sur S; c'est la surface parallèle à S à une distance $\pm a$, c'est-à-dire la surface obtenue en prenant sur les normales à S une longueur égale à $\pm a$. Nous reviendrons plus loin sur cette transformation pour l'étudier d'une manière plus approfondie (n° 41).

*Transformations de contact de la deuxième classe.*

39. Nous allons maintenant étudier le cas où il y a entre $x, y, z, x', y', z'$ deux relations distinctes

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y, z, x', y', z') = 0, \\ G(x, y, z, x', y', z') = 0. \end{cases}$$

On verrait, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, qu'à un point $M(x = a,\ y = b,\ z = c)$ correspond la courbe C' représentée par les équations

$$(C') \quad \begin{cases} F(a, b, c, x', y', z') = 0, \\ G(a, b, c, x', y', z') = 0, \end{cases}$$

et à un point $M'(x'=a', y'=b', z'=c')$ correspond la courbe (C) représentée par les équations

$$(C) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, a', b', c') = 0, \\ G(x, y, z, a', b', c') = 0. \end{cases}$$

Si le point M décrit une courbe A, la courbe C′ engendre une surface A′ qui correspond à A ; si le point M′ décrit une courbe B′, la courbe C engendre une surface B qui correspond à B′. Si le point M décrit une surface S, on peut considérer cette surface comme formée de courbes A et prendre l'enveloppe des surfaces correspondantes A′ ; c'est une surface S′ qui correspond à S. On peut aussi raisonner de la manière suivante : soit S′ la surface qui correspond à S et M′ un point de S′ ; la courbe (C) qui correspond à M′ doit être tangente à S ; on obtiendra donc le lieu de M′ en exprimant que la courbe (C) est tangente à S ; on aura ainsi, en général, une relation entre $a'$, $b'$, $c'$. Nous n'insistons pas sur ces généralités, car nous allons, dans le paragraphe suivant, étudier une transformation particulière très importante, qui appartient précisément à la seconde classe.

## VII. — Transformation de M. Lie.

40. Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour faire une étude sommaire de la belle transformation due à M. Lie et qui est, selon l'expression de M. Darboux, l'une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne. Rappelons d'abord certains résultats obtenus.

### *Éléments de contact en coordonnées pentasphériques.*

Nous avons vu que les sphères de l'espace dépendent de quatre paramètres et qu'on peut les déterminer par *six* coordonnées homogènes liées par une relation quadratique fondamentale

$$(1) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0.$$

D'ailleurs, le rayon d'une sphère est donné par une relation de la forme

$$R = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_6 x_6}{l_1 x_1 + \ldots + l_6 x_6};$$

deux sphères qui coïncident, mais dont les rayons sont considérés comme de signes contraires, ont des coordonnées différentes ; enfin, on a un point dans le cas où les coordonnées satisfont à la relation

$$(2) \qquad \psi = m_1 x_1 + \ldots + m_6 x_6 = 0.$$

On peut d'ailleurs effectuer sur les $x$ une transformation linéaire quel-

conque, et simplifier ainsi les relations (1) et (2); par exemple, on peut prendre

$$\varphi = \Sigma x_i^2,$$
$$\psi = x_6.$$

La condition pour que deux sphères $x_1, x_2, \ldots, x_6$ et $y_1, y_2, \ldots, y_6$ soient tangentes, est

$$(3) \qquad \mathsf{S}\, y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Si l'une des deux sphères se réduit à un point, cela revient à dire que l'autre sphère passe par ce point.

Deux sphères tangentes définissent un élément de contact, et toutes les sphères ayant pour coordonnées

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i$$

ont en commun cet élément de contact. Je dis d'abord que les quantités $z_i$ sont les coordonnées d'une sphère, si $x_i$ et $y_i$ sont les coordonnées de deux sphères tangentes. En effet, on a

$$\varphi(z_i) = \lambda^2 \varphi(x_i) + \lambda\mu\, \mathsf{S}\, y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu^2 \varphi(y_i),$$

et chacun des termes du second membre est nul. De plus, deux sphères quelconques $z_i$ et $z'_i$ sont tangentes; en posant

$$z'_i = \lambda' x_i + \mu' y_i,$$

on a

$$\mathsf{S}\, z'_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 2\lambda\lambda' \varphi(x_i) + (\lambda\mu' + \mu\lambda')\, \mathsf{S}\, x_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + 2\mu\mu' \varphi(y_i)$$

et chacun des termes du second membre est nul.

Or, il est bien clair que des sphères dépendant d'un paramètre ne peuvent être tangentes deux à deux que si elles ont un élément de contact commun. Quand on emploie des coordonnées pentasphériques, on ne regarde deux sphères comme tangentes que si le carré de la distance des centres est égal au carré de la différence des rayons, chacun des rayons ayant un signe; il en résulte qu'un élément de contact définit deux séries de sphères, telles que les sphères de chaque série soient tangentes entre elles, mais non avec celles de l'autre série. Prenons, par exemple, $x, y, z$ étant les coordonnées cartésiennes du centre et R le rayon,

$$(2) \qquad \frac{x_1}{x} = \frac{x_2}{y} = \frac{x_3}{z} = \frac{x_4}{R} = \frac{x_5}{x^2 + y^2 + z^2 - R^2} = \frac{x_6}{1};$$

de sorte que

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5 x_6.$$

Il est clair que les sphères tangentes à l'origine au plan des $xy$ sont définies par les relations

$$x_1 = x_2 = x_5 = 0, \qquad x_3 = \pm x_4,$$

et deux d'entre elles ne sont tangentes que si l'on prend le même signe dans le second membre de la dernière égalité. Les relations

$$(1) \qquad z_1 = z_2 = z_5 = 0, \qquad z_3 = z_4 = \lambda a + \mu b, \qquad z_6 = \lambda + \mu$$

définissent un des deux systèmes de sphères tangentes entre elles deux à deux et les relations

$$(2) \qquad z_1 = z_2 = z_5 = 0, \qquad z_3 = -z_4 = \lambda a + \mu b, \qquad z_6 = \lambda + \mu$$

en définissent un autre. Nous pouvons *convenir de considérer les relations* (1) *et* (2) *comme définissant deux éléments de contact différents,* que nous appellerons *opposés*, pour indiquer qu'ils ne diffèrent que par le sens. Les relations (1) définissent un élément de contact appartenant aux sphères de rayon *positif*, ayant leurs centres sur la partie positive de $Oz$; nous regarderons la partie convexe de ces sphères comme leur *endroit*, de sorte que les relations (1) définissent un élément de contact dont l'endroit est au-dessous et l'envers au-dessus du plan des $xy$. C'est le contraire pour les équations (2). Il est à peine besoin d'ajouter que pour une sphère de rayon négatif, l'endroit sera la partie concave et l'envers la partie convexe [1]. Lorsqu'on peut distinguer analytiquement les deux côtés d'une surface, on regardera de même l'un comme l'endroit, l'autre comme l'envers, et l'on fixera ainsi les éléments de contact de la surface. Au point de vue auquel nous nous plaçons ici, il y aura lieu de regarder les points et les courbes comme possédant à la fois les éléments de contact opposés; pour une courbe on pourrait être amené, dans certaines théories, à donner un signe au rayon de courbure et à regarder comme appartenant à la courbe les éléments de contact qu'elle a en commun avec les sphères passant par le cercle osculateur et dont le rayon a même signe que le rayon de courbure; l'élément de contact correspondant au plan osculateur serait seul double.

**41.** Avec ces notions, on peut étudier avec plus de détails la transformation de contact dont nous avons déjà parlé et qui correspond à la fonction

$$\omega = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - a^2 = 0.$$

---

(1) M. Darboux a souvent insisté sur l'importance de la distinction des signes des rayons des sphères dans l'étude des problèmes de contact; la théorie des cycles de Laguerre se rattache au même ordre d'idées; les coordonnées pentasphériques ne sont pas les seules qui permettent cette distinction, comme on le verra en lisant, dans le premier Volume de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux, les développements consacrés aux systèmes de coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\xi$ et $u$, $v$, $w$, $p$ et notamment leur application aux surfaces minima. Les idées que nous exposons sont donc loin d'être nouvelles dans le fond; ce qui est peut-être nouveau, c'est la forme que nous leur donnons en introduisant la notion d'*élément de contact ayant un côté*.

Elle fait correspondre à un élément de contact, formé d'un point A et d'un plan P, deux éléments de contact dont les plans P′ et P″ sont parallèles à P et les points A′ et A″ situés sur la normale à P en A, à la même distance $a$, mais de côtés opposés. Il est bien clair que si rien ne distingue les deux côtés du plan P, rien ne distinguera non plus les deux éléments A′, $p'$ et A″, $p''$, et l'on ne pourra pas les considérer indépendamment l'un de l'autre. Si, au contraire, l'élément de contact (A, P) a un *endroit* et un *envers*, on pourra attribuer un signe à la longueur $a$ et la porter positivement, par exemple, du côté de l'endroit, négativement du côté de l'envers.

Pour plus de clarté, prenons le système particulier de coordonnées pentasphériques défini par les formules ($\alpha$); notre transformation de contact se décomposera en les deux transformations

$$\begin{aligned} &x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3,\\ &x'_4 = x_4 \pm a x_6,\\ &x'_5 = x_5 \mp 2 a x_4 - a^2 x_6,\\ &x'_6 = x_6, \end{aligned}$$

qui remplacent toute sphère par une sphère concentrique et dont le rayon est *augmenté* ou *diminué* de $a$. [Cf. les formules (T) page 522 en ayant égard à la différence des notations.]

Si l'on applique cette transformation à une surface dont on distingue les deux côtés, on obtiendra deux surfaces différentes, suivant le côté que l'on aura choisi, et chacune de ces deux surfaces aura elle-même un côté. Si l'on part, au contraire, d'une surface dont on ne distingue pas les deux côtés, on obtiendra deux surfaces ou, plus exactement, deux nappes formant analytiquement une seule surface, mais chaque nappe ayant un côté.

Par exemple, à une sphère de rayon $\pm$ R correspondront deux sphères concentriques de rayons parfaitement déterminés, à savoir : $R + a$ et $-R + a$. A un point correspond une seule sphère de rayon $+a$; à deux éléments opposés du point correspondent deux éléments de contact diamétralement opposés de la sphère, ayant chacun son côté.

Ces remarques permettraient une étude plus approfondie du groupe dont il a été question à la fin du paragraphe IV.

**42.** D'autre part, nous avons vu que les droites de l'espace dépendent de quatre paramètres, et qu'on peut les déterminer par six coordonnées homogènes liées par une relation quadratique

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0.$$

La condition pour que deux droites $y$ et $z$ se rencontrent est

$$\mathrm{S}\, y_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0$$

et si cette relation est vérifiée, de même que les relations

$$\varphi(y) = 0, \qquad \varphi(z) = 0,$$

les droites ayant pour coordonnées $\lambda y_i + \mu z_i$ forment un faisceau plan, c'est-à-dire passent par un même point dans un même plan. Nous pouvons dire qu'elles définissent un élément de contact.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on s'arrange pour que les formes fondamentales de la sphère et de la droite soient identiques, et si l'on fait correspondre les droites et les sphères de *mêmes coordonnées,* on aura défini une *transformation de contact;* car à des droites qui se coupent correspondront des sphères tangentes, et réciproquement; à une surface considérée comme enveloppe de sphères correspondra une surface enveloppe de droites et réciproquement. Il est d'ailleurs facile de ramener cette transformation de contact à l'un des types considérés au paragraphe précédent.

### *Équations de la transformation de M. Lie.*

**43.** Nous devons pour cela chercher le lieu des points des éléments de contact qui correspondent aux éléments de contact ayant en commun un point $(x, y, z)$.

Supposons que le point $(x, y, z)$ soit dans l'espace des *droites;* les droites passant par ce point forment un hyperfaisceau; elles rencontrent, en particulier, toutes les droites issues de ce point A dans un certain plan P. Or, à ce faisceau plan correspondent des sphères S tangentes entre elles en un même point; aux autres droites de l'hyperfaisceau doivent correspondre des sphères tangentes à toutes les sphères S. Or, il est clair qu'une sphère ne peut être tangente à *toutes* les sphères S que si elle contient l'une des deux génératrices rectilignes qui leur sont communes. Réciproquement, soit $\Sigma$ une sphère renfermant une des deux génératrices rectilignes D et $D_1$ communes aux sphères S; il lui correspond une droite qui rencontre toutes les droites du faisceau plan correspondant aux sphères S; c'est donc une droite passant par A ou située dans le plan P.

Une raison évidente de continuité prouve qu'aux sphères $\Sigma$ renfermant l'une des génératrices, que nous pouvons appeler D, correspondent les droites passant par A et aux sphères $\Sigma$ renfermant $D_1$ les droites situées dans le plan P. En résumé, au point A correspond une génératrice rectiligne D d'une sphère, c'est-à-dire une droite isotrope.

Prenons maintenant un point A', $(x', y', z')$, dans l'espace des sphères; nous pouvons le regarder comme une sphère de rayon nul, c'est-à-dire dont les coordonnées satisfont à la relation

$$\mathrm{S}\, m_i x_i = 0;$$

il lui correspond une droite dont les coordonnées satisfont à la même relation, c'est-à-dire une droite d'un certain complexe linéaire *non spécial.*

Ainsi notre transformation de contact est nécessairement définie par un système de deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_1(x, y, z, x', y', z') = 0, \\ \omega_2(x, y, z, x', y', z') = 0 \end{cases}$$

représentant, si l'on regarde $x, y, z$ comme des constantes, une droite isotrope, et, si l'on regarde $x', y', z'$ comme des constantes, une droite appartenant à un certain complexe linéaire.

M. Lie, dans un Mémoire fondamental, à bien des titres (*Math. Annalen*, t. V), a étudié le cas plus général où l'on suppose seulement que les équations (1) représentent toujours une droite, c'est-à-dire sont bilinéaires. Dans le cas particulier qui nous occupe, on voit aisément que, par un choix convenable des notations et des axes, on peut donner aux équations (1) la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} X + iY - Zz - x = 0, \\ z(X + iY) + Z - y = 0. \end{cases}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que cette transformation a bien la propriété de transformer les droites en sphères; soient

$$(3)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations d'une droite; nous savons qu'on obtient la surface correspondante en éliminant $x, y, z$ entre les équations (2) et (3), ce qui donne

$$(X + iY - p)(X - iY - b) + (Z + a)(Z - q) = 0,$$

c'est-à-dire

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (b + p)X - i(b - p)Y + (a - q)Z + bp - aq = 0,$$

sphère ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= b + p, \\ x_2 &= i(b - p), \\ x_3 &= a - q, \\ x_4 &= \pm(a + q), \\ x_5 &= bp - aq, \\ x_6 &= 1, \end{aligned}$$

avec la forme fondamentale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 4x_5x_6 = 0.$$

On pourrait d'ailleurs prendre les mêmes coordonnées pour la droite considérée.

Nous voyons que la transformation définie par les formules (2) est un peu moins précise que celle dont il était question auparavant, puisqu'elle ne détermine pas le signe du rayon de la sphère correspondant à une droite donnée; nous pouvons choisir ce signe arbitrairement, *une fois pour toutes*, en prenant, par exemple,

$$x_4 = Rx_6 = a + q.$$

La transformation obtenue offre alors cette particularité remarquable de faire correspondre à un espace *non orienté,* c'est-à-dire où les éléments de contact n'ont pas de *sens,* un espace *orienté,* c'est-à-dire où chaque élément de contact a un endroit et un envers. A cet endroit et à cet envers correspondent deux éléments de contact différents du premier espace.

Considérons deux éléments de contact opposés dans l'espace des sphères; la seule sphère à laquelle ils appartiennent tous deux est la sphère de rayon nul ayant son centre en leur point; donc la seule droite qui renferme les deux éléments de contact qui leur correspondent est la droite renfermant l'un d'eux et dont les coordonnées vérifient la relation

$$\mathbf{S}\, m_i x_i = 0,$$

c'est-à-dire qui appartient au complexe linéaire fondamental.

On en conclut que les figures qui correspondent à deux figures formées de sphères, deux à deux égales, mais de rayons contraires, sont polaires réciproques par rapport à ce complexe linéaire.

Nous pouvons exprimer ceci de la manière suivante : *La transformation de M. Lie transforme la transformation par polaires réciproques, par rapport au complexe linéaire fondamental, en la transformation de contact consistant à remplacer chaque élément de contact par l'élément opposé.*

Le cadre restreint de cette Note ne nous permet pas de donner ici des applications de cette belle transformation; nous en indiquons quelques-unes dans les exercices.

## VIII. — Transformations dans l'espace à plus de trois dimensions.

**44.** Nous allons, dans ce dernier paragraphe, étudier sommairement des transformations dont la nature particulière va être éclaircie par un exemple simple.

Nous avons vu que l'on peut prendre pour éléments de l'espace les sphères ou les droites, c'est-à-dire représenter une surface ou une courbe par une relation entre les coordonnées des sphères ou des droites qui ont avec elle un élément de contact commun, tandis qu'en coordonnées ponctuelles ou tangentielles on écrit une ou deux relations entre les coordonnées des points ou des plans qui ont un élément de contact commun avec la courbe ou la surface considérée.

De même, on pourrait regarder les cercles comme éléments du plan et introduire des coordonnées *tétracycliques* analogues aux coordonnées *pentasphériques.* Un point aurait quatre coordonnées et un cercle en aurait cinq. Mais, sans passer par ces coordonnées particulières, il est aisé de montrer

qu'on peut établir une correspondance très simple entre les cercles du plan et les points de l'espace; soient

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad z=0$$

les équations d'un cercle; nous lui ferons correspondre le point

$$x=a, \qquad y=b, \qquad z=ri.$$

On peut remarquer que, si l'on change le signe du rayon, le point représentatif est remplacé par son symétrique par rapport au plan des $xy$. Cette représentation permet d'étudier bien des problèmes sur les cercles, comme l'a montré M. Darboux, si l'on a soin de remarquer que deux cercles sont tangents lorsque la distance des points qui les représentent est nulle, et réciproquement. D'ailleurs, on peut remarquer que le point qui correspond à un cercle est le centre d'une des deux sphères de rayon nul contenant ce cercle.

On voit de quelle nature particulière est la transformation qui remplace les cercles du plan par les points de l'espace; il est manifeste qu'une transformation de cette nature ne peut être une transformation de contact, car les éléments de contact du plan dépendent de trois paramètres, et ceux de l'espace de cinq paramètres. Aux cercles tangents à une courbe plane, en un point A, correspondent les divers points d'une droite isotrope menée par A dans le plan normal en A à la courbe; les deux droites isotropes se distinguent l'une de l'autre dans le cas où l'on peut distinguer le signe des rayons des cercles, ou, ce qui revient au même, un sens sur la normale. Ces droites isotropes sont les génératrices de la développable (isotrope) circonscrite à la courbe et au cercle de l'infini.

Malgré l'intérêt que présenteraient ces questions, nous allons laisser cet exemple, pour aborder le sujet que nous avons en vue.

Il est d'abord nécessaire de définir succinctement ce qu'on appelle un *espace à plus de trois dimensions*.

Une lecture, même superficielle, des premiers chapitres d'une Géométrie analytique plane et d'une Géométrie analytique de l'espace, ne peut manquer de frapper l'esprit par un certain nombre d'analogies de raisonnements et de calculs. Si l'on regarde d'un peu plus près, on remarque que bien de ces raisonnements et de ces calculs, qui sont les mêmes pour deux et trois variables, seraient encore les mêmes s'il y avait $n$ variables. Le langage géométrique permettant, d'ailleurs, d'énoncer très simplement des faits analytiques parfois compliqués, on a été conduit à introduire ce langage dans le cas d'un plus grand nombre de variables.

Prenons, par exemple, quatre variables, et, pour plus de netteté, bornons-nous tout d'abord à la considération d'axes rectangulaires. Quatre longueurs $x, y, z, t$ seront dites les *coordonnées rectangulaires* d'un point; une équation telle que

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0$$

sera dite *représenter un plan ;* la distance des deux points sera, par définition,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + (t - t')^2,$$

et l'angle V de deux directions sera donné par la formule

$$\cos V = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta',$$

en désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ les cosinus directeurs de ces directions. La distance d'un point à un plan sera

$$\partial = \pm \frac{Ax + By + Cz + Dt + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}},$$

et ainsi de suite.

Ces *définitions* étant posées, on verra aisément (si l'on ne le considère comme évident par l'analogie des calculs) qu'elles ne sont pas contradictoires entre elles et permettent de généraliser divers théorèmes de Géométrie : une droite sera normale à un plan si elle est perpendiculaire à *trois* droites du plan ; deux plans seront rectangulaires si chacun d'eux renferme la normale à l'autre ; les équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ représentent quatre plans rectangulaires deux à deux, etc. On pourra, d'ailleurs, définir des coordonnées obliques et tétraédriques sans aucune difficulté.

Notre but n'est pas d'insister sur ces préliminaires évidents et auxquels divers auteurs ont donné plus de développements qu'ils ne paraissent en mériter ; nous espérons que ce qui précède suffira pour l'usage que nous avons à faire de l'espace à plus de trois dimensions.

**45.** Considérons un espace à $n - 1$ dimensions et $n$ coordonnées homogènes quelconques (on pourrait les supposer tétraédriques ; le lecteur peut les regarder comme rectangulaires si cela lui paraît plus net). Soient $k$ équations linéaires indépendantes

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kn} x_n = 0;$$

nous dirons que ces équations représentent un plan à $n - k - 1$ dimensions que nous désignerons par $P_{n-k-1}$ ; d'après cela, dans l'espace ordinaire où $n = 4$, un plan est représenté par $P_2$, une droite par $P_1$. Si $k = n - 1$, les équations définissent un point unique $P_0$ ; enfin, si $k \geqq n$, les équations n'admettent pas de solutions non toutes nulles, de sorte que $n - k - 1$ est négatif, nous sommes amenés à regarder dans ce cas $P_{n-k-1}$ comme symbolisant l'absence de tout point.

Pour faire comprendre les avantages de cette notation, considérons $k'$ autres équations linéaires indépendantes, représentant par suite un plan $P_{n-k'-1}$ ; si elles sont indépendantes des précédentes (ce qui est le cas général) leur ensemble représente un plan $P_{n-k-k'-1}$. Nous pouvons donc dire que *dans un*

*espace à* $n-1$ *dimensions l'intersection de deux plans* $P_\alpha$ *et* $P_\beta$ *est en général un plan* $P_{\alpha+\beta-(n-1)}$. Il suffit de prendre $\alpha = n-k-1$ et $\beta = n-k'-1$. Par exemple dans l'espace ordinaire, $n-1=3$; l'intersection de deux plans $P_2$ est $P_{2+2-3} = P_1$, c'est-à-dire une droite; l'intersection de deux plans $P_1$, c'est-à-dire de deux droites, est $P_{1+1-3} = P_{-1}$, c'est-à-dire, en général, l'absence de tout point.

Considérons une surface du second degré, c'est-à-dire le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une équation quadratique homogène

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Nous disons que la surface n'est pas dégénérée si le discriminant de $\varphi$ n'est pas nul, et alors on peut ramener $\varphi$ à une somme de $n$ carrés. Nous allons nous borner au cas où $n$ est pair et poser $n = 2m$; nous pourrons alors supposer que l'on a

$$\varphi = x_1 x_{m+1} + x_2 x_{m+2} + \ldots + x_m x_{2m}.$$

Il est aisé de voir qu'il y a des plans $P_{m-1}$ situés tout entiers sur la surface; ces plans sont analogues aux génératrices rectilignes des quadriques; posons

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{m+1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m, \\ x_{m+2} = a_{21}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2m}x_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{2m} \;= a_{m1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mm}x_m. \end{cases}$$

Pour que l'on ait identiquement $\varphi = 0$, en vertu de ces équations, il suffit de poser

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0,$$

c'est-à-dire de supposer que le déterminant des $a$ est un déterminant symétrique gauche. On n'obtient d'ailleurs pas ainsi tous les *plans générateurs* $P_{m-1}$; une discussion approfondie, dont ce n'est point ici le lieu, montre que ces plans forment deux familles dont les équations (1) représentent une seule; *deux plans générateurs d'une même famille ont en commun un plan* $P_{m-1-2k}$ *et deux plans de familles différentes, un plan* $P_{m-2k}$. D'ailleurs le cas *le plus général* est celui où $m-2k$ et $m-2k-1$ sont égaux à *zéro* ou à *moins un*, c'est-à-dire où les plans $P_{m-1}$ ont un seul point commun ou n'en ont pas; d'où une distinction importante suivant que $m$ est pair ou impair [1]. Rappelons que l'espace considéré a $2m-1$ dimensions.

---

[1] Je suis en possession de ces résultats depuis 1891; j'en ai publié une partie dans un Mémoire *Sur l'équation adjointe, etc.* (*Annales de l'École Normale*, 1892). Le dernier résultat énoncé a pour fondement ce théorème d'Algèbre :

*Dans un déterminant symétrique gauche* le déterminant principal (*au sens qu'on attache d'habitude à ce mot dans la théorie des équations linéaires*) est de degré pair.

J'ai démontré ce théorème dans la *Revue de Mathématiques spéciales* de M. Niewenglowski (avril 1891).

1° $m = 2h$ : espace à $4h - 1$ dimensions; c'est le cas de l'espace ordinaire pour $h = 1$; deux plans générateurs $P_{2h-1}$ d'un même système ont en commun un plan $P_{2(h-k)-1}$; le cas général est $h = k$; *en général ils ne se rencontrent pas;* deux plans de systèmes différents, au contraire, ont en commun un plan $P_{2(h-k)}$, c'est-à-dire (pour $h = k$) *au moins un point unique.*

2° $m = 2h + 1$ : espace à $4h + 1$ dimensions; pour $h = 1$ c'est le cas de l'espace à cinq dimensions dont nous nous occuperons tout à l'heure; les conclusions sont opposées : deux plans générateurs d'un même système ont au moins un point commun, et deux plans de systèmes différents n'en ont, en général, aucun. Pour $h = 1$, on a des plans générateurs $P_2$; deux plans d'un même système ont en commun $P_2$ ou $P_0$, c'est-à-dire coïncident ou ont *un seul point* commun; deux plans de systèmes différents ont en commun un plan $P_1$ ou $P_{-1}$, c'est-à-dire ont une droite commune ou ne se coupent pas. Nous établirons directement ces résultats. Les considérations précédentes étaient destinées à montrer qu'ils ne sont qu'en contradiction apparente avec les propriétés connues des génératrices rectilignes des quadriques, et que, si l'on regarde au fond des choses, ils sont la conséquence d'une même loi générale.

**46.** Écrivons les équations d'une droite sous la forme :

$$(1) \qquad \begin{cases} x_2 Z - x_3 Y = x_4, \\ x_3 X - x_1 Z = x_5, \\ x_1 Y - x_2 X = x_6, \end{cases}$$

de sorte que les coordonnées homogènes de la droite soient les quantités $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, liées par la *relation fondamentale*

$$\varphi = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0.$$

Nous regarderons cette équation comme représentant une surface du second degré dans l'espace à *cinq* dimensions, de sorte qu'à toute droite correspond un point de cette surface, et réciproquement.

Considérons deux droites $x$ et $y$. Nous savons déjà que pour qu'elles se coupent il est nécessaire et suffisant que, en posant $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$, les $z$ soient les coordonnées d'une droite D. Or, dans l'espace à cinq dimensions, les équations

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i$$

représentent manifestement la droite $d$ qui joint les points $x$ et $y$; si les $z$ sont les coordonnées d'une droite D [1], la droite $d$ est située tout entière sur la quadrique fondamentale $\varphi = 0$. C'est, d'ailleurs, ce que le calcul

[1] Pour éviter toute confusion, nous réservons les grandes lettres pour l'espace ordinaire et les petites lettres pour l'espace à cinq dimensions; les coordonnées d'une droite de l'espace ordinaire, étant les coordonnées d'un point de l'espace à cinq dimensions, sont figurées par de petites lettres.

montre immédiatement. Donc, pour que deux droites se rencontrent, il est nécessaire et suffisant que la droite qui joint leurs points représentatifs soit située tout entière sur la quadrique fondamentale.

Considérons maintenant toutes les droites D issues d'un point : chacune d'elles coupe toutes les autres; donc les points qui leur correspondent sont tels que les droites $d$, les joignant deux à deux, sont toutes situées sur la quadrique fondamentale: ces points dépendent de deux paramètres, ils ne sont donc pas tous sur une même droite $d$. D'après cela, soient $a$, $b$, $c$ trois d'entre eux, non en ligne droite, et $d$ la droite $bc$; les droites joignant $a$ aux divers points de $d$ sont situées tout entières sur la quadrique fondamentale : elles engendrent un plan générateur $p_2$ de cette quadrique. C'est, d'ailleurs, ce qui résulte des équations (1).

On peut encore le prouver ainsi; si $x$, $y$, $z$ sont trois droites formant un véritable trièdre, on a

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(y) = 0, \qquad \varphi(z) = 0,$$

$$\mathbf{S}\, y_i \frac{\partial\varphi}{\partial z_i} = 0, \qquad \mathbf{S}\, z_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0, \qquad \mathbf{S}\, x_i \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = 0,$$

et l'on en conclut

$$\varphi(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0,$$

quels que soient $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

Réciproquement, considérons un plan générateur $p_2$ de $\varphi$; à ses divers points correspondent des droites dépendant de deux paramètres, et telles que chacune d'elles rencontre toutes les autres, c'est-à-dire un hyperfaisceau; mais on peut avoir une gerbe ou un système plan, d'où la distinction des plans générateurs de $\varphi$ en deux systèmes. Nous nommerons *plans générateurs du premier système* ceux qui correspondent aux gerbes et plans générateurs *du second système* ceux qui correspondent aux systèmes plans. Il est clair que deux plans du premier système ont un point commun et un seul, à moins qu'ils ne coïncident : car deux gerbes ne coïncidant pas ont une droite commune et une seule. Il en est de même pour deux plans du second système. Au contraire, à deux plans de systèmes différents correspondent une gerbe et un système plan : si le point de la gerbe est dans le plan du système plan, ils ont en commun toutes les droites D passant par ce point dans ce plan, et les plans $p_2$ considérés ont en commun une droite $p_1$; au contraire, dans le cas général où le point de la gerbe n'est pas dans le plan du système plan, les plans $p_2$ n'ont aucun point commun.

Il est aisé de vérifier ces résultats par le calcul; les équations (1) représentent les plans générateurs du premier système; nous obtiendrons les équations des plans du second système en écrivant que la droite $D(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ est dans le plan

$$UX + VY + WZ + 1 = 0.$$

L'équation générale d'un plan passant par D peut s'écrire

$$\lambda(x_2 Z - x_3 Y - x_4) + \mu(x_3 X - x_1 Z - x_5) + \nu(x_1 Y - x_2 X - x_6) = 0.$$

On doit donc avoir

$$(\lambda x_4 + \mu x_5 + \nu x_6)\,U = \nu x_2 - \mu x_3,$$
$$(\lambda x_4 + \mu x_5 + \nu x_6)\,V = \lambda x_3 - \nu x_1,$$
$$(\lambda x_4 + \mu x_5 + \nu x_6)\,W = \mu x_1 - \lambda x_2.$$

On déduit des deux dernières équations

$$(\lambda x_4 + \mu x_5 + \nu x_6)(V x_6 - W x_5) = \lambda(x_3 x_6 + x_2 x_5) - x_1(\nu x_6 + \mu x_5).$$

Or

$$\lambda(x_3 x_6 + x_2 x_5) = -\lambda x_1 x_4;$$

donc

$$(\lambda x_4 + \mu x_5 + \nu x_6)(V x_6 - W x_5 + x_1) = 0.$$

On écartera aisément le cas où $\lambda x_4 + \mu x_5 + \nu x_6 = 0$, et l'on aura les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} W x_5 - V x_6 = x_1, \\ U x_6 - W x_4 = x_2, \\ V x_4 - U x_5 = x_3, \end{cases}$$

qui représentent les plans générateurs $p_2$ du second système. Le système des équations (1) et (2) permet de vérifier analytiquement toutes les propriétés que nous avons démontrées par la Géométrie; on peut aussi vérifier analytiquement que les équations de tout plan générateur $p_2$ ont l'une des formes (1) ou (2).

Tout ce qui vient d'être dit s'applique aux sphères. On peut faire correspondre à toute sphère un point de la quadrique fondamentale $\varphi = 0$; ce point dépend d'ailleurs du signe du rayon. Nous avons vu que, si la relation entre les coordonnées d'une sphère de rayon nul a été mise sous la forme simple

$$x_6 = 0,$$

deux sphères concentriques, ayant des rayons égaux et de signes contraires, ont toutes leurs coordonnées égales et de même signe, sauf leurs coordonnées $x_6$, qui sont égales et de signes contraires. On en conclut que, plus généralement, si les coordonnées d'une sphère de rayon nul vérifient la relation

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_6 x_6 = 0,$$

qui représente un plan $\varpi$; les points représentant deux sphères opposées sont en ligne droite avec le pôle du plan $\varpi$.

47. Pour indiquer une première application des considérations précédentes, nous allons tout d'abord généraliser un théorème important de la théorie des quadriques (n° 434). L'équation quadratique homogène à six variables,

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0,$$

renferme vingt et un coefficients; la quadrique $Q_4$ qu'elle représente est donc définie en général par vingt points. D'autre part, d'après le théorème de Bézout, cinq quadriques $Q_4$ ont en général $2^5 = 32$ points communs. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

*Toutes les quadriques* $Q_4$ *passant par* seize *points ont, en général, en commun* seize *autres points.*

En effet, supposons les seize points choisis de telle manière que les seize équations linéaires, que l'on obtient en écrivant que leurs coordonnées vérifient l'équation $\varphi = 0$, soient indépendantes. L'équation générale des quadriques passant par les seize points sera alors de la forme

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 + \lambda_5\varphi_5 = 0$$

et ces quadriques ont manifestement en commun les trente-deux points communs aux cinq quadriques

$$\varphi_1 = 0 \ldots, \qquad \varphi_5 = 0.$$

Considérons maintenant deux groupes de cinq plans, dont nous écrirons les équations

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0, & B_1 = 0, \\ A_2 = 0, & B_2 = 0, \\ A_3 = 0, & B_3 = 0, \\ A_4 = 0, & B_4 = 0, \\ A_5 = 0, & B_5 = 0, \end{array}$$

et appelons *décaèdre* la figure formée par les trente-deux points que l'on obtient en prenant le point commun à cinq plans quelconques d'indices différents, ou, ce qui revient au même, en prenant de toutes les manières possibles un plan sur chaque ligne; nous supposerons qu'on obtient bien ainsi trente-deux points distincts.

Dans le cas où les deux plans de même indice sont parallèles, ce décaèdre est une généralisation du parallélépipède. Nous dirons que seize de ces trente-deux points sont *convenablement choisis* si les équations qu'on obtient en exprimant qu'une quadrique passe par ces seize points sont indépendantes.

Il est manifestement nécessaire pour cela qu'il n'y ait pas plus de onze de ces seize points dans chacun des plans donnés, et, par suite, qu'il y en ait au moins cinq dans chacun d'eux, puisque chaque point est situé, par exemple, ou dans le plan $A_1 = 0$, ou dans le plan $B_1 = 0$.

Nous laisserons à nos lecteurs le soin de rechercher si cette condition est suffisante; en prenant

$$A_i = x_i - x_6, \qquad B_i = x_i + x_6,$$

on constate aisément que, pour que seize points soient convenablement

choisis, il est nécessaire et suffisant qu'un certain déterminant du seizième ordre, aisé à former et dont les éléments sont égaux à $\pm 1$, soit différent de zéro.

Or, par seize sommets quelconques d'un décaèdre passent les cinq quadriques

$$A_1 B_1 = 0, \quad A_2 B_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_5 B_5 = 0,$$

qui ont en commun les seize autres sommets. Donc, *si une quadrique passe par seize sommets convenablement choisis d'un décaèdre, elle passe par les seize autres.*

Regardons maintenant $x_1, x_2, \ldots, x_6$ comme les coordonnées d'une sphère ou d'une droite; une relation

$$A_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 = 0$$

exprime que la droite appartient à un certain complexe linéaire $A_1$, ou que la sphère coupe une certaine sphère $A_1$ sous un angle constant $\alpha_1$. Si cinq équations

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_5 = 0$$

ont une solution commune satisfaisant à l'équation $\varphi = 0$, cela veut dire que les cinq complexes linéaires $A_1, A_2, \ldots, A_5$ ont une droite commune, ou qu'il existe une sphère S coupant les cinq sphères $A_1, A_2, \ldots, A_5$ sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$.

Ceci posé, donnons-nous deux systèmes de cinq complexes linéaires. $A_1, A_2, \ldots, A_5, B_1, \ldots, B_5$, ou deux systèmes de cinq sphères $A_1, A_2, \ldots, A_5$. $B_1, \ldots, B_5$ auxquels correspondent deux systèmes de cinq angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$. $\beta_1, \ldots, \beta_5$, nous avons les théorèmes suivants, en désignant par C une lettre qui peut être A ou B, et par $\gamma$ une lettre qui peut être $\alpha$ ou $\beta$.

Si parmi les trente-deux systèmes de cinq complexes linéaires $C_1, C_2, \ldots, C_5$, seize convenablement choisis ont une droite commune, il en est de même des seize autres.

S'il existe seize sphères coupant respectivement seize des trente-deux systèmes de cinq sphères $C_1, C_2, \ldots, C_5$, sous les angles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$, il en existe seize autres pour les seize autres systèmes.

Il est bon de remarquer que les angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_5$ sont supposés différents de zéro, car à deux sphères tangentes correspondent deux points de $\varphi$ situés dans un même plan générateur; on voit alors que les plans A et B seraient tangents à $\varphi$, ce qui modifie la question. Mais on peut supposer ces angles égaux à $\pi$, ce qui donne des sphères effectivement tangentes, mais qu'on ne doit pas regarder comme telles en coordonnées pentasphériques.

48. Une application plus importante est relative à l'étude du groupe $\mathcal{G}$ (nos 32, 33). On est amené à rechercher les transformations homographiques à six variables qui laissent invariante l'équation $\varphi = 0$, c'est-à-dire trans-

forment en elle-même la quadrique fondamentale. Or (ceci est vrai quel que soit le nombre de dimensions) une transformation homographique qui transforme une quadrique en elle-même remplace évidemment les plans générateurs par des plans générateurs. Donc, s'il y a deux systèmes de tels plans, deux cas sont possibles : les plans générateurs de l'un des systèmes sont remplacés par les plans générateurs du *même système* ou par ceux de *l'autre système;* ces deux cas correspondent respectivement aux transformations homographiques et corrélatives. Dans le cas où la forme $\varphi$ est réduite à une somme de carrés $\Sigma x_i^2$, on voit aisément que ce sont les transformations orthogonales de déterminant $+1$ qui conservent les systèmes de plans générateurs, et celles de déterminant $-1$ qui les échangent; on comparera utilement ces indications avec l'Exercice 15.

## EXERCICES.

1. Étant donnés quatre points définis par une équation de la forme

$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = 0, \tag{1}$$

démontrer que les six valeurs du rapport anharmonique des quatre points sont données par l'équation

$$216\,\frac{(1-\rho+\rho^2)^3}{(1+\rho)^2(2-\rho)^2(1-\rho)^2} = \frac{S^3}{T^2},$$

en posant

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

En conclure que le rapport $\frac{S^3}{T^2}$ est un *invariant absolu* de la *forme binaire* (1), c'est-à-dire conserve exactement la même valeur quand on effectue sur (1) une transformation homographique (page 486).

2. Déterminer les sous-groupes de G (n° 10) qui laissent invariants une droite donnée et un point donné non situé sur cette droite (transformations homologiques). Cas où la droite est à l'infini (transformations homothétiques). Cas où le point est situé sur la droite.

3. On dit qu'une équation est invariante par les transformations d'un groupe lorsque celles-ci reproduisent son premier membre à un facteur près, en général différent de zéro.

D'après cela, démontrer analytiquement et géométriquement que l'équation différentielle la plus simple, invariante par les transformations de G (n° 10) (écrites en coordonnées non homogènes), est l'équation différentielle des droites

$$y'' = 0.$$

Vient ensuite l'équation différentielle des coniques

$$\left(y''^{-\frac{3}{2}}\right)''' = 0.$$

**4.** Montrer que les coefficients des transformations du groupe des mouvements dans l'espace peuvent s'exprimer au moyen de quatre variables par les formules homogènes et de degré zéro, dues à Olinde Rodrigues,

$$\begin{array}{lll} \sigma a = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - \rho^2, & \sigma b = 2(\lambda\nu + \mu\rho), & \sigma c = -2(\lambda\rho - \mu\nu), \\ \sigma a' = -2(\lambda\nu - \mu\rho), & \sigma b' = \lambda^2 + \rho^2 - \mu^2 - \nu^2, & \sigma c' = 2(\lambda\mu - \nu\rho), \\ \sigma a'' = 2(\lambda\rho + \mu\nu), & \sigma c' = 2(\nu\rho - \lambda\mu), & \sigma c'' = \lambda^2 + \nu^2 - \mu^2 - \rho^2, \end{array}$$

où l'on a posé

$$\sigma = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2.$$

Relations entre les variables d'Olinde Rodrigues et les angles d'Euler.

**5.** Rechercher, en employant la méthode indiquée au n° 16, toutes les transformations homographiques réelles, telles qu'en les répétant $m$ fois on obtienne la transformation identique.

**6.** Étudier le groupe des mouvements qui transforment en lui-même un icosaèdre régulier, en indiquant les relations qu'il y a entre ses diverses transformations.

On désignera, par exemple, par S une rotation de $\frac{2\pi}{5}$ autour d'un diamètre joignant deux sommets opposés de l'icosaèdre A et A', et par T la même rotation autour du diamètre BB', AB étant une arête de l'icosaèdre, et l'on prouvera que tous les mouvements possibles s'obtiennent en combinant les transformations S et T. On pourra ainsi former, au moyen de S et T, les *soixante* transformations distinctes du *groupe de l'icosaèdre*. Leur nombre est soixante, car on peut faire coïncider l'icosaèdre avec lui-même de soixante manières différentes, puisqu'un sommet déterminé peut occuper douze positions différentes, et, lorsque ce sommet est fixé, l'icosaèdre peut encore avoir cinq positions distinctes autour de ce sommet.

**7.** Démontrer que dans une transformation ponctuelle quelconque, M et M' étant deux points correspondants, il existe en général deux droites rectangulaires passant en M, auxquelles correspondent deux courbes orthogonales passant en M'. S'il en existe plus de deux, il en existe une infinité, et deux courbes quelconques passant en M sont transformées en deux courbes se coupant sous le même angle en M'.

Même énoncé dans l'espace en remplaçant *deux droites rectangulaires* par *un trièdre trirectangle*.

Cas de la transformation homographique : Démontrer que, dans toute transformation homographique, un certain système de coniques (ou de quadriques) homofocales est transformé en un système de même nature et en conclure immédiatement quelles directions rectangulaires sont transformées en directions rectangulaires.

**8.** Rechercher les coordonnées pentasphériques des points situés dans le plan de l'infini et des points du cercle imaginaire à l'infini.

**9.** Trouver les sphères tangentes à quatre sphères données; montrer que, si l'on tient compte des signes des rayons, le problème revient à trouver les droites rencontrant quatre droites et admet deux solutions ou une infinité. Nombre total des solutions lorsqu'on donne aux signes des rayons toutes les valeurs possibles.

**10.** Démontrer que, si l'on considère toutes les sphères S tangentes à trois sphères données, il existe une infinité de sphères S′ tangentes à toutes les sphères S. Enveloppe des sphères S et S′. Lieux de leurs centres.

**11.** On considère un tétraèdre et l'on remarque un point sur chacune de ses arêtes. Par chacun des sommets du tétraèdre et les trois points situés sur les arêtes aboutissant à ce sommet, on fait passer une sphère. Démontrer que les quatre sphères ainsi obtenues ont un point commun.

**12.** Trouver la condition pour qu'une droite soit tangente à une quadrique. Soit

$$\varphi(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

cette condition. Montrer que les relations

$$\varphi = 0, \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

entraînent

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = 0.$$

On peut remplacer la relation $\varphi = 0$ par la relation $\psi = 0$, en posant

$$\psi = \varphi + K(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

et choisir convenablement la constante K de manière que la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

entraîne

$$\frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi}{\partial c}\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} = 0,$$

c'est-à-dire que $\alpha_1 = \frac{\partial\psi}{\partial a}$, $\beta_1 = \frac{\partial\psi}{\partial b}$, $\ldots$, $c = \frac{\partial\psi}{\partial\gamma}$ soient les coordonnées d'une droite $D_1$ lorsque $a, b, \ldots, \gamma$ sont les coordonnées d'une droite D. Quelle relation géométrique y a-t-il entre ces deux droites et la quadrique?

**13.** Rechercher les transformations de contact dans le plan; on trouvera des transformations analogues aux transformations de la première classe dans l'espace.

**14.** On fait correspondre les cercles du plan aux points de l'espace, comme il a été expliqué page 547, et l'on considère les coordonnées pentasphériques

du point comme étant les coordonnées du cercle. Démontrer que le groupe G des transformations homographiques, défini page 510, est alors dans le plan l'analogue du groupe défini dans l'espace par les formules (T) (page 522). On pourra donner une démonstration analytique ou bien une démonstration géométrique s'appuyant sur les remarques suivantes : quand on établit la correspondance indiquée entre les points de l'espace et les cercles du plan, à tout mouvement, homothétie ou inversion de l'espace *laissant invariable le plan* des $x, y$, correspond pour les cercles du plan une transformation de même nature et, à une translation parallèle à $Oz$, correspond dans le plan la transformation de contact qui augmente les rayons des cercles d'une quantité constante.

**15.** On a vu que la surface

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0$$

admet les plans générateurs

$$x_1 = cx_5 - bx_6,$$
$$x_2 = ax_6 - cx_4,$$
$$x_3 = bx_4 - ax_5.$$

Il est bien clair que l'on peut échanger dans ces formules $x_1$ avec $x_4$, ou bien $x_2$ avec $x_5$, ou bien $x_3$ avec $x_6$, ou faire simultanément deux de ces échanges, ou faire les trois. On obtient ainsi huit systèmes de formules d'aspects différents. *Vérifier qu'il n'y a néanmoins que deux systèmes de plans générateurs,* ou, si l'on préfère, rechercher parmi ces systèmes de formules ceux qui sont équivalents entre eux.

Étendre au cas où il y a $2n$ variables au lieu de six.

FIN DU TOME III ET DERNIER.

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME III.

### CHAPITRE I.

#### COORDONNÉES.



### CHAPITRE II.

#### TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES.

## CHAPITRE III.

### PLAN ET LIGNE DROITE.

## CHAPITRE IV.

### POINTS, DROITES, PLANS IMAGINAIRES.



## CHAPITRE V.

### SPHÈRE.



## CHAPITRE VI.

### COURBES GAUCHES; TANGENTE, PLAN OSCULATEUR, COURBURES.



## CHAPITRE VII.

### PLANS TANGENTS.

## CHAPITRE VIII.

### LIEUX GÉOMÉTRIQUES. — GÉNÉRATION DES SURFACES OU DES LIGNES.



## CHAPITRE IX.

### NOTIONS SUR LES SURFACES RÉGLÉES.



## CHAPITRE X.

### ENVELOPPES.

## CHAPITRE XI.

### NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DE DROITES. — COMPLEXES. — CONGRUENCES.



## CHAPITRE XII.

### FIGURES HOMOTHÉTIQUES.



## CHAPITRE XIII.

### CLASSIFICATION DES QUADRIQUES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES PONCTUELLES.



## CHAPITRE XIV.

### THÉORIE DU CENTRE.

## CHAPITRE XV.

### PLANS DIAMÉTRAUX. — DIAMÈTRES.



## CHAPITRE XVI.

### PLANS PRINCIPAUX. — CORDES PRINCIPALES. — AXES. — ÉQUATION EN S.



## CHAPITRE XVII.

### RÉDUCTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

(AXES RECTANGULAIRES.)



## CHAPITRE XVIII.

### PÔLES ET PLANS POLAIRES.

## CHAPITRE XIX.

### POLAIRES RÉCIPROQUES.



## CHAPITRE XX.

### PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DANS LES QUADRIQUES A CENTRE.



## CHAPITRE XXI.

### CÔNES DU SECOND DEGRÉ.

## CHAPITRE XXII.

### PLANS TANGENTS (FORMES RÉDUITES); SPHÈRE DE MONGE; LIEU DES SOMMETS DES CÔNES DE RÉVOLUTION CIRCONSCRITS A UNE QUADRIQUE.



## CHAPITRE XXIII.

### NORMALES.



## CHAPITRE XXIV.

### GÉNÉRATRICES RECTILIGNES.



## CHAPITRE XXV.

### SECTIONS CIRCULAIRES.

## CHAPITRE XXVI.

### DISCUSSION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE DU SECOND DEGRÉ.



## CHAPITRE XXVII.

### DÉTERMINATION DES QUADRIQUES.



## CHAPITRE XXVIII.

### INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES.



## CHAPITRE XXIX.

### FOCALES. — QUADRIQUES HOMOFOCALES.

## CHAPITRE XXX.

### ÉLÉMENTS D'UNE SECTION PLANE D'UNE QUADRIQUE.



## CHAPITRE XXXI.

### APPLICATION DES IMAGINAIRES A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III ET DERNIER.

# ERRATA.

## Tome Ier.

| Pages. | Lignes. | *Au lieu de :* | *Lisez :* |
|---|---|---|---|
| 7 | 10 | $\sum \frac{A}{\lambda^{m-2}}$ | $\sum \frac{A}{\lambda^{m-1}}$ |
| 12 | 8 en remontant | D | B |
| 43 | 4 en remontant | | *Supprimez :* comme pour l'ellipse |
| 43 | 3 en remontant | $\cos \frac{M}{2}$ | *Lisez :* $\sin \frac{M}{2}$ |
| 48 | 16 | $x_1$ | $x'$ |
| 48 | 17 | $y_1$ | $y'$ |
| 58 | 9 en remontant | BC | CD |
| 68 | 9 | $B = -\frac{C}{\alpha}$ | $B = -\frac{C}{\beta}$ |
| 74 | 16 | indépendants | linéairement indépendants |
| 75 | 1 | indépendants | linéairement indépendants |
| 102 | 9 en remontant | OD′ | O′D′ |
| 125 | 11 en remontant | distinctes de $x, y, z$; | distinctes, de $x, y, z$; |
| 144 | 20 | | *Ajoutez :* si les coordonnées sont rectangulaires, et un réseau de rectangles quand elles sont obliques. |
| 145 | 7 en remontant | $ab' - ba$ | *Lisez :* $ab' - ba'$ |
| 149 | 10 | aux droites | aux droites $X = 0$ |
| 158 | 16 | $A^1$ | A. |

| Pages. | Lignes. | *Au lieu de :* | *Lisez :* |
|---|---|---|---|
| 171 | 8 | | $x(\sin\varphi - \sin\varphi')$<br>$- y(\cos\varphi - \cos\varphi')$<br>$+ R\sin(\varphi' - \varphi) = 0$ |
| 182 | 6 et 7 en remont. | | $(X - x_0)(x - x_0)$<br>$+ (Y - y_0)(y - y_0) - R^2 = 0$<br>$(X - x_1)(x - x_1)$<br>$+ (Y - y_1)(y - y_1) - R'^2 = 0$ |
| 183 | 21 | retranchant | ajoutant |
| 187 | 3 | 243 | 244 |
| 193 | 2 et 3 en remont. | | $\alpha^2\cos^4\frac{1}{2}A + \beta^2\cos^4\frac{1}{2}B + \gamma^2\cos^4\frac{1}{2}C$<br>$- 2\beta\gamma\cos^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}C$<br>$- 2\gamma\alpha\cos^2\frac{1}{2}C\cos^2\frac{1}{2}A$<br>$- 2\alpha\beta\cos^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B = 0.$ |
| 194 | 2 | | $\alpha^2\cos^4\frac{1}{2}A + \beta^2\sin^4\frac{1}{2}B + \gamma^2\sin^4\frac{1}{2}C$<br>$- 2\beta\gamma\sin^2\frac{1}{2}B\sin^2\frac{1}{2}C$<br>$- 2\gamma\alpha\sin^2\frac{1}{2}C\cos^2\frac{1}{2}A$<br>$- 2\alpha\beta\cos^2\frac{1}{2}A\sin^2\frac{1}{2}B = 0.$ |
| 208 | 9 en remontant | OB | $OB''$ |
| 218 | 13 | $h$ | $2h$ |
| 224 | 5 en remontant | situés | situé |
| 227 | 5 | $2Bx + E$ | $Bx + E.$ |
| 227 | 8 | $h = 0 \quad m = -\frac{D}{B}$ | $m = 0 \quad h = -\frac{D}{B}:$ |
| 231 | 15 | $\Delta = \varepsilon(\alpha E - \beta D)^2$ | $\Delta = -\varepsilon(\alpha E - \beta D)^2$ |
| 238 | 10 en remontant | $g$ | $f_1$ |
| 247 | 3 | $\delta = 0$ | $\delta = 0, \quad A \neq 0, \quad AE - BD = 0.$ |
| 265 | 12 en remontant | $B = A'\cos\theta$ | $B = A\cos\theta$ |
| 275 | 16 | $\varphi(\alpha, \beta)$ | $\varphi(x, y)$ |
| 283 | 8 en remontant | $\sin^2\theta$ | $\sin^4\theta$ |
| 288 | dernière | $a^2, -b^2(b^2, -a^2)$ | $a^2, -b^2$ ou $b^2, -a^2.$ |
| 293 | 6 | $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{C}$ | A et C |
| | | | *Ajoutez en exercice :* |
| 295 | 4 | | 5. Rapporter une hyperbole à ses asymptotes. |
| | | | *Lisez :* |
| 296 | 19 | F' | F |
| 297 | 6 en remontant | M'N | MN' |

| Pages. | Lignes. | *Au lieu de :* | *Lisez :* |
|---|---|---|---|
| 297 | 3 en remontant | $\overline{S'N}$ | $\overline{S'N'}$ |
| 299 | 7 | $-x'\sin\alpha+y'+\sin(\theta-\alpha)$ | $-x'\sin\alpha+y'\sin(\theta-\alpha)$ |
| 299 | 8 en remontant | $f(a+kx_1\ a+ky)$ | $f(a+kx,\ b+ky)$ |
| 300 | 18 | $BE_1$ | $bE_1$ |
| 318 | 12 en remontant | $bu+b'v+a''w$ | $b'u+bv+a''w$ |
| 318 | 9 en remontant | $b,\ b',\ a''$ | $b',\ b,\ a''.$ |
| 319 | 15 | $y$ | $x$ |
| 319 | 8 en remontant | Y | X |
| 329 | 6 en remontant | $k(x,y)$ | $kf(x,y)$ |
| 333 | 7 en remontant | l'équation (6) | les équations (6) |
| 334 | 11 en remontant | $(x-a)^2-R^2$ | $(x-a)^2-R'^2$ |
| 339 | 1 | $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$ | $\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$ |
| 340 | 12 en remontant | $+1\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$ | $1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$ |
| 352 | 14 | de | du |
| 352 | 16 | $x=(a-b)\sin\varphi+b\sin\frac{a-b}{b}\varphi$ | $y=(a-b)\sin\varphi-b\sin\frac{a-b}{b}\varphi$ |
| 373 | 6 | $a'w^2$ | $a''w^2$ |
| 373 | dernière | $u$ et | $u$ et $v$ |
| 378 | 2 | MF | NF |
| | | | *Supprimez :* |
| 387 | 15 en remontant | | aussi |
| | | *Au lieu de :* | *Lisez :* |
| 387 | 14 en remontant | $y=b'$ | $y=-b'$ |
| 394 | 15 | P' | F' |
| 395 | 6 | $e'd'$ | $c'd'$ |
| 395 | 7 | $c'g'$ | $e'g'$ |
| 429 | 14 en remontant | celle | cette |
| 432 | 1 | $a$ | $a''$ |
| 433 | 15 | $\alpha-k_1\beta$ | $\alpha-k\beta$ |
| 438 | 8 | polynome | polygone |
| 438 | 9 | polynomes | polygones |
| 441 | 7 | direction | directrice |

## TOME II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 4 en remontant | $q$ | $2q$ |
| 143 | 21 | $A=0$ | $B=0$ |
| 143 | 22 | $B=0$ | $A=0$ |
| 143 | 23 | OY | OX |
| 143 | 25 | $-\frac{B}{A}$ | $-\frac{A}{B}$ |

| Pages. | Lignes. | Au lieu de : | Lisez : |
|---|---|---|---|
| 146 | 10 en remontant | $C = 0$ | $c = 0$ |
| 151 | 13 en remontant | $\frac{f'(\omega_1)}{f(\omega_1)}$ | $\frac{f(\omega_1)}{f'(\omega_1)}$ |
| 184 | 11 en remontant | que, $c$ | que $c$, |
| 186 | 5 | par le pied | par le point diamétralement opposé au pied... |
| 190 | 5 en remontant | (1) | (2) |
| 193 | 13 | $\frac{y'}{b'}$ | $\frac{y'}{b}$ |
| 194 | 18 | $xy' - xy'$ | $xy' - yx'$ |
| 205 | 21 | $x = \frac{a}{b} y$ | $x = \frac{a}{b} y'$ |
| 281 | 5 | les asymptotes | une asymptote. |

## TOME III.

Le n° 59 a été imprimé par erreur en petits caractères.

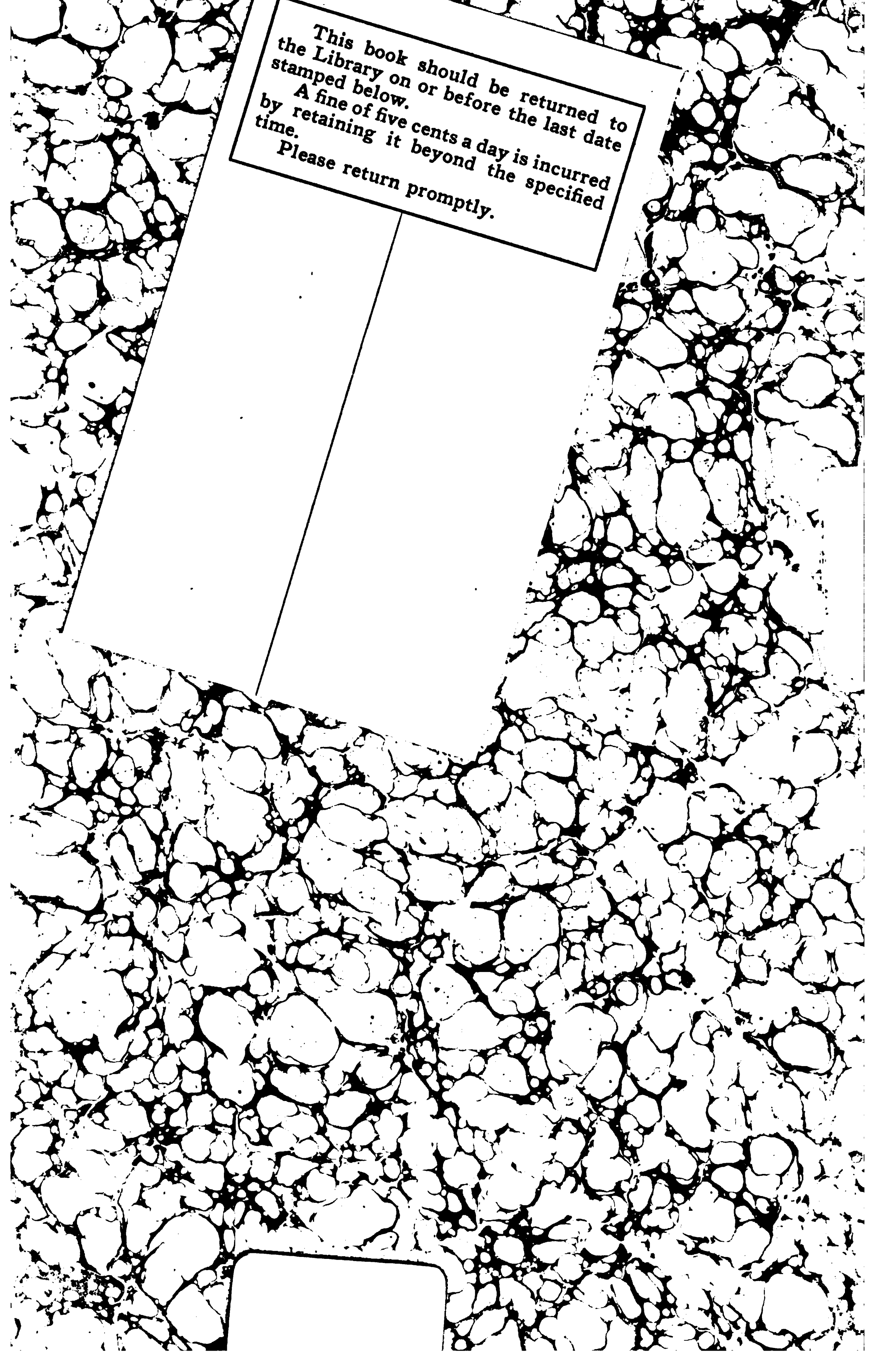
FIN DES ERRATA DES TOMES I, II ET III.

21847 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS quai des Grands-Augustins 55.

32 ... 3603




21847 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.


This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.
A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.
Please return promptly.